المحاضرة الخامسة :

تمرين : استخدم طريقة النواة الحالة في ايجاد حل المعادلة :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 x.s \, g(s) \, ds$$

الحل :

المعادلة هي من نمط معادلة فريدهولم حيث $k(x,s) = x.s$

$$I = [a,b] = [0,1]$$

$$R(x,s,\lambda) = k(x,s) + \lambda k_2(x,s) + \lambda^2 k_3(x,s) + \dots$$

$$k_1(x,s) = k(x,s) = x.s$$

$$k_2(x,s) = \int_0^1 k(x,\tau) . k_1(\tau,s) \, d\tau = \int_0^1 x.\tau^2.s \, d\tau = \frac{x.s}{3}$$

$$k_3(x,s) = \int_0^1 k(x,\tau) \, k_2(\tau,s) \, d\tau = \int_0^1 x.\tau.\frac{\tau s}{3} \, d\tau = \frac{x.s}{3^2}$$

$$k_4(x,s) = \frac{xs}{3^3} \quad , \dots , \quad k_m(x,s) = \frac{x.s}{3^{m-1}}$$

$$\Rightarrow R(x,s,\lambda) = xs + xs\left(\frac{\lambda}{3}\right) + xs\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 + \dots$$

$$R(x,s,\lambda) = xs\,[\underbrace{1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{m-1} + \dots}]$$

متسلسلة هندسية اساسها $\frac{\lambda}{3}$ وحدها الاول 1 تكون متقاربة عندما

$$|\lambda| < 3 \iff \left|\frac{\lambda}{3}\right| < 1$$

اي ان المتسلسلة متقاربة في القرص المفتوح $R(0,3)$

فالمتسلسلة لها مجموع ضمن نطاق التقارب وهو $|\lambda| < 3$ ؛ $\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3}{3-\lambda}$

$$\Rightarrow R(x,s,\lambda) = \frac{x.s}{3-\lambda} \quad ; |\lambda| < 3$$

/ /

وحل المعادلة من الشكل
$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x,s,\lambda) \cdot f(s)\, ds$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xs}{3-\lambda} \cdot f(s) \cdot ds$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xs}{3-\lambda} f(s)\, ds$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) + \frac{\lambda x}{3-\lambda} \int_0^1 s\, f(s)\, ds$$

ومن هذه الصيغة نلاحظ ان للمعادلة التكاملية المعطاة حل من اجل اي λ بحيث تحقق $|\lambda|<3$ ومن اجل اي دالة اختيارية $f(x)$.

مثال على ذلك: اوجد حل المعادلة التكاملية السابقة من اجل x $f(x)=x$

فيكون الحل:
$$g(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{3x.s}{3-\lambda} (s)\, ds$$

$$\Rightarrow g(x) = x + \frac{3x\lambda}{3-\lambda} \int_0^1 s^2 ds = x + \frac{x\lambda}{(3-\lambda)}$$

ومن اجل اي دالة $f(x)$ يوجد حل دوماً

تمرين: لتكن لدينا المعادلة التكاملية:
$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^1 x.s \cdot g(s)\, ds$$

بين ان متسلسلة نيومان متقاربة عندما $|\lambda|<3$ ثم حلها عن طريق النواة الحالة

الحل:

نعلم ان متسلسلة نيومان متقاربة عندما $|\lambda|< B$.

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |k(x,s)|^2 dx\, ds$$

والنواة متصلة على المربع $1 \geq x \geq 0 \;\wedge\; 1 \geq s \geq 0$

وهو محدود و(x و s) مستقلان نوجد B^2 ببساطة كما يلي:

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2 \cdot s^2\, dx\, ds = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 s^2 ds = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{s^3}{3}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

وبالتالي متسلسلة نيومان متقاربة في القرص الدائري الذي مركزه المبدأ ونصف قطره 3.

ووجدنا سابقاً أن $R(x,s,\lambda) = \dfrac{3 \cdot x \cdot s}{3-\lambda}$

$$\Rightarrow g(x) = 1 + \lambda \int_0^1 \frac{3x \cdot s}{3-\lambda}(1)\, ds = 1 + \frac{3\lambda x}{3-\lambda} \int_0^1 s\, ds$$

$$g(x) = 1 + \frac{3\lambda x}{3-\lambda} \int_0^1 s \cdot ds$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda x}{3-\lambda}\right)$$ وهو حل المعادلة

تمرين: باستخدام نواة الحالة اوجد حل المعادلة التكاملية التالية:

$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1-3xs) \cdot g(s)\, ds$$

نلاحظ أن: $I = [0,1]$, $f(x) = 1$, $k(x,s) = 1-3xs$

تحتاج الحل وظيفة "إضافة" إلى إيجاد القرص الذي سيوجد الحل ضمنه

ملاحظة: إن حل معادلة تكاملية باستخدام طريقة النواة الحالة لا تختلف عن الحل بطريقة النواة الحالة لمعادلة فريدهولم التكاملية.

مثال: استخدم التقريب المتتالي لإيجاد حل معادلة فولتيرا التكاملية التالية:

$$g(x) = 1 + \int_0^x (x-s) \cdot g(s)\, ds$$

وباعتبار التقريب الأول $g_0(x) = 1$

الحل: نلاحظ أن الحد الأعلى للتكامل هو متحول وكذلك اخترنا الحد الأدنى (صفر) لسهولة العمليات الحسابية نبدل في المعادلة التكاملية $g(s) = g_0(s) = 1$

$$\Rightarrow g_1(x) = 1 + \int_0^x (x-s)\, ds = 1 + \left. xs - \frac{s^2}{2} \right]_0^x$$

/ /

$$\Rightarrow g_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

وعبارة $g_1(x)$ لا تمثل حلاً للمعادلة بشكل عام فإن

$$g_2(x) = 1 + \int_0^x (x-s)\, g_1(s) = 1 + \int_0^x (x-s)\left(1+\frac{s^2}{2}\right) ds$$

$$\Rightarrow g_2(x) = 1 + x \int_0^x \left(1 + \frac{s^2}{2}\right) ds - \int_0^x s\left(1+\frac{s^2}{2}\right) ds$$

$$g_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\Rightarrow g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = ch(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = ch(x)$$

نلاحظ أن $g(x)$ هي دالة تحليلية أياً كان x وبالتالي فالسلسلة متقاربة دوماً.

انتهت المحاضرة ...