المحاضرة السادسة

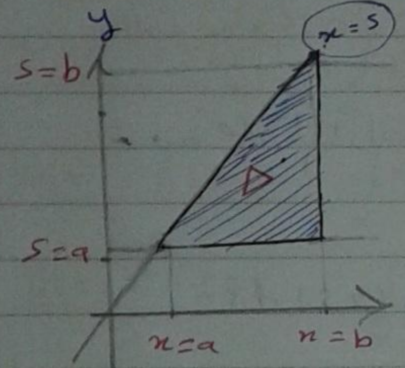
- وجدنا سابقاً أنه يمكن إيجاد حل معادلة فريدهولم التكاملية باستخدام نواة حالة إذا كانت متسلسلة نيومان متقاربة والتي تحقق الشرط $|\lambda| < \frac{1}{B}$

- والآن لندرس حل معادلة فولتيرا التكاملية باستخدام نواة الحالة:

إن معادلة فولتيرا التكاملية من الشكل:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,s)\, g(s)\, ds$$

حيث $f(x)$ دالة مكاملة تربيعياً على $I=[a,b]$ والنواة $k(x,s)$ دالة متصلة على المثلث (مع محيطه) Δ في المستوي xs والمحدد بالمتراجحات $a \le x \le b$, $x \le s \le b$



حيث يمكن رد معادلة فولتيرا إلى معادلة فريدهولم إذا أمكن تعريف النواة كما يلي:

$$\bar{k}(x,s) = \begin{cases} k(x,s) & : a \le \ \le \\ 0 & : x < s < b \end{cases}$$

واستناداً إلى تعريف النواة الحالة:

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,s)$$

$$R(x,s,\lambda) = k_1(x,s) + \lambda k_2(x,s) + \lambda^2 k_3(x,s) + \dots + \lambda^{m-1} k_m(x,s) + \dots$$

وحسب ما درسناه في النواة الحالة لمعادلة فريدهولم:

$$k_1(x,s) = k(x,s)$$

$$k_2(x,s) = \int_a^b k(x,\tau) \,.\, k_1(\tau,s)\, d\tau$$

$$\Rightarrow k_2(x,s) = \int_a^s k(x,\tau) \,.\, k(\tau,s)\, d\tau + \int_s^x k(x,\tau)\, k_1(\tau,s) + \int_x^b k(x,\tau) \,.\, k_1(\tau,s)\, d\tau$$

وبملاحظة أن التكامل الأول والثالث معدومين فإن:

$$k_2(x,s) = \int_s^x k(x,\tau)\, k_1(\tau,s)\, d\tau$$

وبنفس الطريقة نحصل على $k_3(x,s)$:

$$k_3(x,s) = \int_s^x k(x,\tau)\, k_2(\tau,s)\, d\tau$$

$$\vdots$$

$$k_m(x,s) = \int_s^x k(x,\tau) \cdot k_{m-1}(\tau,s)\, d\tau$$

وبما أن المثلث مغلق ومحدود ((حسب مبرهنة في التبولوجيا فإن المجموعة (المثلث المغلق) مجموعة متراصة وبما أن النواة متصلة على مجموعة متراصة فهي محدودة))

إذاً مما سبق يوجد $C>0$ بحيث : $\quad |k_1(x,s)| \leq C$

وبحسابات تكاملية بسيطة نحصل على :

$$|k_2(x,s)| \leq C^2 (x-s)$$

$$|k_3(x,s)| \leq C^3 \frac{(x-s)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$|k_m(x,s)| \leq C^m \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$\Rightarrow |\lambda^{m-1} k_m(x,s)| \leq \overbrace{|\lambda^{m-1}|\, C^m \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}}^{\text{حد عام المتسلسلة}} \quad \dots \mathrm{I}$$

ونعلم أن $\quad R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,s)$

فنجد مع الاستعانة بالمتراجحة I :

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{U_{m+1}}{U_m} \right| = 0 < 1$$

ومنه فهي متقاربة (أي $R(x,s,\lambda)$) بانتظام على Δ وذلك من أجل أي قيمة لـ λ

وبالتالي نواة الحالة للمعادلة فولتيرا التكاملية هي متسلسلة لـ λ وهي متقاربة.

(أي متقارب أياً كانت λ وأياً كان $f(x)$)

فإنه يوجد لمعادلة فولتيرا حلاً وحيداً يعطى بالعلاقة:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_s^x R(x,s,\lambda) f(s)\, ds$$

ومن اجل كل قيمة لـ λ وقيمة لـ $f(s)$ يوجد حل لمعادلة فولتيرا التكاملية.

مثال: اوجد حل للمعادلة التكاملية التالية:

$$g(x) = \cos x + \int_{s=0}^{s=x} g(s)\, ds$$

الحل:

هذه المعادلة من نمط فولتيرا حيث $\lambda = 1$ و $k(s,x) = k(s,x) = 1$

و $f(x) = \cos x$

$$k_2(x,s) = \int_s^x k(x,\tau)\,.\,k(\tau,s)\, d\tau = \int_s^x (1)(1)\, d\tau = (x-s).$$

$$k_3(x,s) = \int_s^x k(x,\tau)\, k_2(x,\tau)\, d\tau = \int_s^x (\tau - s)\, d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2} - s\tau\right]_s^x$$

$$k_3(x,s) = \frac{x^2}{2} + s^2 - sx - \frac{s^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{s^2}{2} - sx = \frac{(x-s)^2}{2!}$$

$\vdots$

$$k_m(x,s) = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$\Rightarrow R(x,s,\lambda) = 1 + (x-s) + \frac{\lambda (x-s)^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{m-1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} + \dots$$

$$\Rightarrow R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = e^{-\lambda(s-x)} = e^{\lambda(x-s)}$$

وبالتالي حل معادلة فولتيرا تعطى بالعلاقة:

$$g(x) = \cos x + \int_0^x e^{\lambda(x-s)}\,.\,\cos(s)\, ds$$

$$g(x) = \cos x + e^{x} \underbrace{\int_0^x e^{-s} \cos(s)\, ds}$$

لنرمز لهذا التكامل بـ I ونحسب قيمته.

$$I = \int_0^x e^{-s} \cos(s)\, ds$$

نفرض مايلي:

$$u = e^{-s} \Rightarrow du = -e^{-s}\, ds$$

$$dv = \cos(s)\, ds \Rightarrow v = \sin(s)$$

$$I = \left[e^{-s} \cdot \sin(s)\right]_0^x + \int_0^x e^{-s} \sin(s)\, ds$$

نفرض ثانيةً:

$$u = e^{-s} \Rightarrow du = -e^{-s}\, ds$$

$$dv = \sin s\, ds \Rightarrow v = -\cos(s)$$

$$I = \left[e^{-s} \cdot \sin(s)\right]_0^x + \left[-e^{-s} \cos(s)\right]_0^x - \int_0^x e^{-s} \cos(s)\, ds$$

$$I = e^{-x} \sin x + \left(-e^{-x} \cos x + 1\right) - I$$

$$2I = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + 1$$

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + 1\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \cos x + e^{x}\left[\frac{1}{2}\left(e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + 1\right)\right]$$

$$g(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} e^{x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left(\cos x + \sin x + e^{x}\right)$$

وحلول القابلي للمعادلة لابد المتسلسلة دوماً متقاربة، ويمكن التأكد مباشرةً من صحة الحل بتعويض الحل الناتج بالمعادلة التكاملية.

انتهت المحاضرة ...