③ الانتقال بشعاع عشوائي منفصل لكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً منفصلاً كثافته الاحتمالية $f_{(X,Y)}(x,y)$ حيث

$$x \in R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

$$y \in R_y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$$

$$f(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

و

ـ ولنفرض أنه هناك متغيرين عشوائيين منفصلين معرفين بدلالة X و Y من خلال العلاقة

$\boxed{U = \psi_1(X,Y)}$ و $\boxed{V = \psi_2(X,Y)}$

حيث أنه يمكن حساب X و Y بدلالة U و V بالشكل

$\boxed{X = W_1(U,V)}$ و $\boxed{Y = W_2(U,V)}$

عندئذ كثافة الشعاع العشوائي المنفصل (U, V) تعطى بالعلاقة:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(W_1(u,v), W_2(u,v))$$

ومجموعة القيم

$$(u_i, v_j) = (\psi_1(x_i, y_j), \psi_2(x_i, y_j))$$

$$R_U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$$

$$R_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$$

و

$$P(U=u_i, V=v_j) = P(X=W_1(u_i, v_j), Y=W_2(u_i, v_j))$$

مثال: ليكن (X,Y) متغيرا عشوائيا كثافته المشتركة

$$f(x,y) = \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!} \cdot P_1^{x} \cdot P_2^{y} \cdot (1-P_1-P_2)^{n-x-y}$$

$$x = 0,1,2,\dots,n$$
$$y = 0,1,2,\dots,n$$
$$0 \le x+y < n$$

ولنعرف المتغيرين $U = X+Y$

و $V = \dfrac{X}{X+Y}$

عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل

$$\left.\begin{aligned} U &= \psi_1(X,Y) = X+Y \\ V &= \psi_2(X,Y) = \frac{X}{X+Y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$Y = U - X \Rightarrow V = \frac{X}{\cancel{X} + U - \cancel{X}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{X}{U} \Rightarrow \boxed{X = U \cdot V}$$

$$\Rightarrow Y = U - U \cdot V = U(1-V)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} X &= W_1(U,V) = U \cdot V \\ Y &= W_2(U,V) = U(1-V) \end{aligned}}$$

والكثافة المشتركة لـ (U,V) :

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(u.v \,,\, u(1-v)\right)$$

$$= \frac{n!}{(u.v)!\,.\,u(1-v)!\,.\,(n-u)!}\,.\,P_1^{uv}\,.\,P_2^{u(1-v)}\,.\,(1-P_1-P_2)^{n-u}$$

حيث

$$u.v = 0,1,2,\dots,n$$

$$u(1-v) = 0,1,2,\dots,n$$

$$0 \le u < n$$

4. الانتقال لشعاع عشوائي مستمر: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً له دالة الكثافة المشتركة $f_{(X,Y)}(x,y)$ ولنفرض المتغيرات

$$X = \phi_1(U,V)$$

$$Y = \phi_2(U,V)$$

$$U = \psi_1(X,Y)$$

$$V = \psi_2(X,Y)$$

عندئذٍ فإن كثافة الشعاع (U,V) تعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\phi_1(u,v)\,,\,\phi_2(u,v)\right).\,|J|}$$

القيمة المطلقة لـ اليعقوبي J المعرف بـ

/ /

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثال: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته الاحتمالية المشتركة

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1/12 & ; 0<x<3 \;,\; 0<y<4 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ المتغيرين

$$V = X+Y$$

$$U = \frac{4X}{3Y}$$

عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل:

$$V = X+Y \Rightarrow X = V-Y$$

$$\Rightarrow U = \frac{4(V-Y)}{3Y} = \frac{4V}{3Y} - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow U + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{Y}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}U + 1 = \frac{V}{Y}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{V}{\frac{3}{4}U+1}} = \phi_2(u,v)$$

$$X = V - Y = V - \frac{V}{\frac{3}{4}U + 1}$$

$$= V\left(1 - \frac{4}{3U+4}\right)$$

$$= V\left(\frac{3U}{3U+4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \frac{3U \cdot V}{3U+4}} = \phi_1(u,v)$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{12v}{(3u+4)^2} & \frac{3u}{3u+4} \\ \frac{-12v}{(3u+4)^2} & \frac{4}{3u+4} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \left(\frac{12v}{(3u+4)^2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3u+4}\right) - \left(\frac{-12v}{(3u+4)^2}\right)\cdot\left(\frac{3u}{3u+4}\right)$$

$$= \frac{48v + 36u \cdot v}{(3u+4)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{12v}{(3u+4)^2}}$$

. نحدد مجالات تعريف u , v بالشكل

$0 < y < 4$

$\Rightarrow 0 < \frac{4v}{3u+4} < 4$

$\Rightarrow \boxed{0 < v < 3u+4}$

$\Rightarrow 0 < x < 3$

$\Rightarrow 0 < \frac{3.u.v}{3u+4} < 3$

$\Rightarrow \boxed{0 < u.v < 3u+4}$

. نعوض في علاقة دالة الكثافة لـ (U, V) :

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v)) . |J|$$

$$= \frac{1}{12} . \left| \frac{12v}{(3u+4)^2} \right|$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} \frac{v}{(3u+4)^2} & ; 0 < v < 3u+4 . \\ & \;\; 0 < u.v < 3u+4 . \\ 0 & \text{، خلاف ذلك .} \end{cases}$$

مثال: ليكن (X, Y) متغيراً عشوائياً كثافته المشتركة

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 4xy & , 0<x<1 , 0<y<1 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ونأخذ $U = X$ ، $V = X.Y$

عين كثافة (U, V) ثم أوجد كثافة V ؟

الحل:

$$\boxed{X = U} = \phi_1(u,v)$$

$$Y = \frac{V}{X} = \boxed{\frac{V}{U}} = \phi_2(u,v)$$

وبالتالي

$$0<x<1 \Rightarrow \boxed{0<u<1}$$

$$0<y<1 \Rightarrow 0<\frac{v}{u}<1$$

$$\Rightarrow \boxed{0<v<u<1}$$

نحسب J:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{u}}$$

نعوض في علاقة الكثافة لـ (U, V)

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))\,|J|$$

$$= 4.u\left(\frac{v}{\cancel{u}}\right).\left|\frac{1}{u}\right|$$

$$\Rightarrow f_{(U,V)}(u,v)=\begin{cases}4\cdot\frac{v}{4} & ;\ 0<u<1 \\ & ,\ 0<v<u<1 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du$$

$$=\int_v^1 4\cdot\frac{v}{u}\,du$$

$$=4v\left[\ln u\right]_v^1$$

$$=4v(0-\ln v)=\boxed{-4v\ln v}$$

$$\Rightarrow f_V(v)=\begin{cases}-4v\ln v & ,\ 0<v<1 \\ 0 & ,\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

تمرين: ليكن (X,Y) متغيرا عشوائيا كثافته المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}} & ,\ x>0\ ,\ y>0 \\ 0 & ,\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

إذا كان $U=\frac{X}{Y}$, $V=Y$

عين كثافة U

الحل: نوجد الكثافة المشتركة لـ (U, V)

$Y = \boxed{V = \phi_2(u,v)}$

$X = U \cdot Y = \boxed{u \cdot V = \phi_1(u,v)}$

$y > 0 \Rightarrow v > 0$

$x > 0 \Rightarrow u \cdot v > 0 \Rightarrow u > 0$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

نعوض في $f_{(U,V)}(u,v)$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(u \cdot v, v)\,|J|$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{4} e^{-\frac{v(1+u)}{2}} \cdot v$$

$$\Rightarrow f(u,v) = \begin{cases} \frac{v}{4} e^{-\frac{v(1+u)}{2}} & ; \; 0<u,\ 0<v \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{v}{4} e^{-\frac{v(1+u)}{2}} dv$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left[v \left(\frac{-2}{1+u} e^{-\frac{(1+u)v}{2}} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2}{1+u} e^{-\frac{(1+u)v}{2}} dv \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(0 + \frac{2}{1+u} \left[\frac{-2}{1+u} e^{-\frac{(1+u)v}{2}} \right]_0^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{(1+u)^2} \right) = \frac{1}{(1+u)^2}$$

$$\Rightarrow f_v(u) = \begin{cases} \frac{1}{(1+u)^2} & ; \; 0 < u \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت.