$z_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{z_n} \to \infty$

$z_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{z_n} \to 0$

- بعض معايير التقارب

لأن $\mathbb{C}$ حقل غير مرتب كلياً فلا يمكن استخدام كثير من المبرهنات الخاصة بـ $\mathbb{R}$ لكن هناك معيار، وهو اختبار المقارنة:

ليكن $\{z_n\}$ و $\{w_n\}$ متتاليتين عقديتين تحققان الشرط:

$|z_n - z_m| \le |w_n - w_m| \; ; \; \forall m, n \ge N \; ; \; \forall N$

عندئذ تقارب $\{w_n\}$ يقتضي تقارب $\{z_n\}$

البرهان: فكرة

نفرض w_n متقاربة فهي كوشية فإنه يوجد N بحيث

$|w_m - w_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$

وبالتالي z_n كوشية وبالتالي متقاربة لأن $\mathbb{C}$ تام.

• جداء متتالية محدودة بمتتالية تؤول إلى 0 هو متتالية تؤول إلى 0

مثال:

$\{\frac{e^{in}}{n}\} \to 0$

$|e^{in}| \le 1 \; , \; \frac{1}{n} \to 0$

يمكن البرهان بطريقة أخرى

$\left|\frac{e^{in}}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$

ملاحظة

$|z_n| \to 0 \Rightarrow \{z_n\} \to 0$

تذكير: $e^{in} = \cos n + i \sin n$

المتسلسلات العقدية

ليكن $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عقدية، A مجموعة جزئية

- إذا كانت A ~~[illegible]~~ منتهية فإن المتتالية منتهية فإن مجموعة حدودها منتهية وله عدد منته.

ملاحظة

يسمى تسلسل الحدود [illegible]

[illegible]

- إذا كانت A غير منتهية فإن المتتالية غير منتهية وهي مجموعة حدودها غير منتهية وليس له منتهى.

هذا الفرض مناسبة [illegible]

نفرض $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$S_0 = z_0$

$S_1 = z_0 + z_1$

$\vdots$

$S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

بالتالي أوجدنا S_n مجموع منته أي له معنى وحدها العام $\{B_n\}$ ... المتتالية التي لا نتحدث باسم المتسلسلة ونرمز للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

كما نسمي المتتالية S_n متتالية المجاميع الجزئية «المرفقة» للمتسلسلة

◆ نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ إنها متقاربة ومجموعها S إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية S_n متقاربة إلى S

أما إذا كانت S_n متباعدة نقول عن المتسلسلة متباعدة إي ليس لها مجموع منتهٍ

مبرهنة

$\sum B_n$ متقاربة $\Rightarrow B_n \to 0$

البرهان

$$S_{n-1} = B_0 + B_1 + \dots + B_{n-1}$$
$$S_n = B_0 + B_1 + \dots + B_n = S_{n-1} + B_n$$

$$S_n - S_{n-1} = B_n$$
$$S - S = 0$$

العكس غير صحيح بالضرورة أي يمكن أن متسلسلة حدها العام يسعى إلى الصفر وهي متباعدة مثل $\sum \frac{1}{n}$

أي استخدام المبرهنة هو إذا لم يكن الحد العام يسعى إلى الصفر فهي متباعدة

مثال $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ متباعدة وحدها العام يسعى إلى الصفر

مبرهنة

تكون المتسلسلة العددية $\sum B_n$ متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$\forall m > n \geq N_\varepsilon : |B_{n+1} + \dots + B_m| < \varepsilon$

البرهان

($\Leftarrow$) نفرض B_n متقاربة فإن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية متقاربة $\Leftarrow$ $\{S_n\}$ كوشية $\Leftarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \ \forall m, n \geq N_\varepsilon$

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |B_{n+1} + B_{n+2} + \dots + B_m| < \varepsilon$$

وهو المطلوب

البرهان من العكس : بنفس بالعكس موضح
من نفس النظرية إلا أنه يجب التنويه هنا
نقول إن $\sum S_n$ كومبلكسية متقاربة
يجب التنويه الى أنه العكس (!) ناتج

ملاحظة:

$\sum (x_n + i y_n)$ متقاربة ومجموعها S
إذا وفقط إذا $\sum x_n$ و $\sum y_n$
متقاربتان ومجموعهما $Re\,S$ و $Im\,S$
على التوالي

البرهان:

$$S_n = (x_0+iy_0)+(x_1+iy_1)+\dots+(x_n+iy_n)$$
$$= (x_0+x_1+x_2+\dots+x_n)+i(y_0+y_1+\dots+y_n)$$

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$ المجموع الجزئي لسلسلة الجزء الحقيقي

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} y_n$$

$$S_n = \sigma_n + i\beta_n$$

الآن بما أن $\sum(x_n+iy_n)$ متقاربة $\Leftrightarrow$
S_n متقاربة ومجموعها S $\Leftrightarrow$ حسب المبرهنة
السابقة σ_n و β_n متقاربتان إلى $Re\,S$
و $Im\,S$ على التوالي $\Leftrightarrow$ $\sum x_n$ و $\sum y_n$ متقاربتان
ومجموعهما $Re\,S$ و $Im\,S$ على التوالي

تنبيه: $\sum (x_n + iy_n) = \sum x_n + i\sum y_n$
لو الجمع غير منته لا يمكن كتابتها بالشكل
السابق لأن الجمع الغير منته غير تبديلي
وغير تجميعي ولا يستطاع إخراج عامل مشترك
منها مجموعها غير منته.

• حذف عدد منته أو إضافة عدد منته
من حدود المتسلسلة لا يؤثر في نوع
وطبيعة المتسلسلة لكنه يؤثر في المجموع
في حال تقاربها

• استبدال بين عدد منته من حدود متسلسلة
لا يؤثر في خصائصها لكنه ربما يؤثر في
المجموع في حال التقارب

• أيضاً تبديلات تجميع عدد منته من
المتسلسلات لا يؤثر في طبيعة المتسلسلة لكنه
يؤثر في المجموع

• لو كانت الحدود حقيقية موجبة فإن
حذف أو إضافة أو تجميع عدد غير منته
لا يؤثر في شيء.

ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات:

$$\sum \left(\frac{1}{n} + i\frac{n}{n^3+1}\right)$$

متسلسلة ~~[illegible]~~ الأجزاء الحقيقية لا $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة وعليه المتسلسلة متباعدة. ملاحظة إن متسلسلة الأجزاء التخيلية لا متقاربة لأن $3-1=2>1$

(بيانية) $\sum \frac{1}{n^p}$	
$p \le 1$	متباعدة
$p > 1$	متقاربة

[illegible]

$$\sum \left(\frac{\cos n}{n^2} + i\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}\right)$$

متقاربة لأن متسلسلة الأجزاء التخيلية متقاربة $3-\frac{1}{2}>1$

و $\frac{\cos n}{n^2}$ متقاربة لأن

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

بما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن $\sum \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ متقاربة حسب اختبار المقارنة وعليه $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق

"وكل متقاربة بالإطلاق متقاربة"

ملاحظة

اختبار المقارنة محصور في متسلسلات ذات الحدود الموجبة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + i\frac{1}{n!}\right)$$

متسلسلة الأجزاء الحقيقية $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ متقاربة لأنها هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و $|r|<1$

ملاحظة: المتسلسلة الهندسية الحقيقية إذا كان [illegible] أصغر من الواحد متقاربة وإذا أكبر [illegible] من الواحد فهي متباعدة ومجموعها

$$\alpha = \frac{\text{الحد الأول}}{1-\text{[illegible]}}$$

المجموع

$$\alpha = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

ومتسلسلة الأجزاء التخيلية لها متقاربة

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

وبالتالي e هو مجموع المتسلسلة التخيلية

$$\Rightarrow \sum\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + i\frac{1}{n!}\right)$$

متقاربة ومجموعها $2+ie$

ملاحظة

المتسلسلة [illegible] استخدام اختبار الأمير فكل متسلسلة [illegible] حساب المجموع [illegible]