١٤٣

مثال: حل الوظيفة

		جاف	ماطر
		q	$1-q$
p	c_1	5	2
$1-p$	c_2	1	8

1- جاف:

$$Ex_1 = 5p + 1(1-p) = 1+4p$$

ماطر:

$$Ex_2 = 2p + 8(1-p) = 8-6p$$

2- $q = \frac{1}{3}$ توقع الربح

$$Ex = \frac{1}{3}5p + \frac{2}{3}\cdot 2p + \frac{1}{3}1(1-p) + \frac{2}{3}8(1-p)$$

$$= \frac{17}{3} - \frac{8}{3}p$$

من أجل $q = \frac{1}{3}$ أفضل قرار للمزارع
(أن يزرع النوع C_2 ($p=0$))

* **الاستراتيجية المختلطة**: العبارة تعاد أكثر من مرة

إذا كان للاعب الأول m خيار فليكن p_i احتمال اختيار الخيار i

$$0 \le p_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

إذا كان اللاعب الثاني n خيار فليكن p_i احتمال اختيار الخيار i

$$0 \le q_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

لتكن $\Pi(p,q)$ = توقع ربح اللاعب الطرفي إذا اختار السطر الأول باحتمال p ← باقي الأسطر $1-p$ وإذا اختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال q ← باقي الأعمدة $1-q$

الاستراتيجية المختلطة للمثال السابق

الاستراتيجية البحتة

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$(5,8)$

7

$\text{Min Max} = 5$

$\text{Max Min} = 2$

$(1,2)$

المختلطة:

من المصفوفة

$$\Pi(p,q) = \underline{5}pq + 2p(1-q) + 1(1-p)q + 8(1-p)(1-q)$$

في حال كانت المقادير أكبر من الواحد سنضرب المعادلة كاملة بحيث نصفر المقام ويصبح لدينا احتمالات.

لازم يكون أكبر من MaxMin

$$\pi(p,q) = 10\left(p-\frac{8}{10}\right)\left(q-\frac{7}{10}\right) + \boxed{3.8}$$

شرح الانتقال:

$$\pi(p,q) = 5pq + \cancel{2p} - 2pq + q - pq + 8 - 8q - \cancel{8p} + 8pq$$

$$\pi(p,q) = 10pq - 6p - 7q + 8$$

$$\pi(p,q) = \delta pq - \delta\beta p - \delta\alpha q + \alpha\beta\delta + \gamma$$ تقابل

$\delta = 10$

$-\delta\beta = -6$

$-\delta\alpha = -7$

$\gamma + \alpha\beta\delta = 8$

$\Rightarrow \beta = \frac{6}{10}$

$\alpha = \frac{7}{10}$

$\gamma = 8 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 8 - \frac{42}{10} = 3.8$

الاستراتيجية المتكافئة

نقول أن يختار اللاعب السطري السطر الأول باحتمال $p = \frac{7}{10}$

ويضمن أن يربح 3.8 على الأقل

أي (أن يختار اللاعب السطري السطر الأول باحتمال $p = \frac{7}{10}$

ويضمن أن يربح بالمتوسط 3.8 على الأقل

وأن يختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال $q = \frac{6}{10}$

ويضمن أن يخسر بالمتوسط (3.8) على الأكثر

* توازن ناش : Nash equili

هي الزوج من الاستراتيجيات (p^*, q^*) للاعب السطري والعمودي على الترتيب

$p^* \in R_{Row}(q^*)$ (p^* أفضل استجابة لـ q^*)

سطر

$q^* \in R_{Coulum}(p^*)$ (q^* أفضل استجابة لـ p^*)

عمود

* منحنيات أفضل استجابة

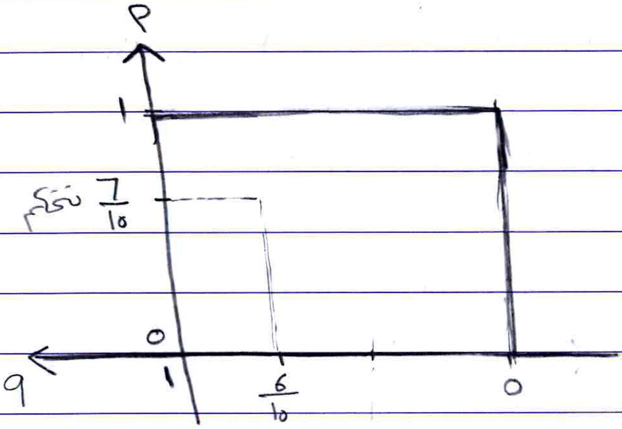
يُظهر المنحني أفضل استجابة للاعب من أجل كل استراتيجية ممكنة للاعب الخصم

$R_R(q)$ = مجموعة الاستراتيجيات التي تشكل أفضل استجابة للاعب السطري وذلك من أجل أي استراتيجية للاعب العمودي $(\forall q)$

$R_C(P)$ مجموعة الاستراتيجيات التي تشكل أفضل استجابة للاعب العمودي وذلك من أجل أي استراتيجية للاعب السطري $(\forall p)$

SABBAGH STATIONERY

مثال:



$R_R(q)$: أفضل استجابة للاعب الطري من أجل $q < \frac{6}{10}$

أن تكون $p = 0$

أفضل استجابة للاعب الطري من أجل $q > \frac{6}{10}$

أن تكون $p = 1$

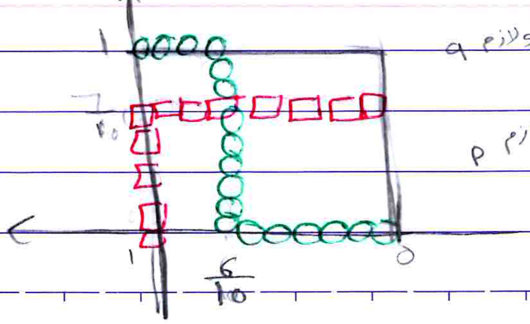
أفضل استجابة للاعب الطري من أجل $q = \frac{6}{10}$

للتغير $\forall p$

$$\pi(p,q) = 10\left(p - \frac{7}{10}\right)\left(q - \frac{6}{10}\right) + 3.8$$

لازم أخذ أكبر مقدار سالب ← سالب ← $q < \frac{6}{10}$

وبالتالي $p = 0$



لو كان $q = \frac{8}{10}$ شو لازم q

$p = \frac{5}{10}$ شو لازم p

$R_c(P)$ أفضل استجابة للاعب العمودي عندما يكون $p < \frac{7}{10}$

أن تكون $q = 1$

أفضل استجابة للاعب العمودي من أجل $p > \frac{7}{10}$

أن يكون $q = 0$

أفضل استجابة للاعب العمودي من أجل $p = \frac{7}{10}$

أن يكون $\forall q$

$$10\left(p - \frac{7}{10}\right)\left(q - \frac{6}{10}\right) + 3.8$$

$p < \frac{7}{10} \Rightarrow q = 1$ لازم أخذ مقدار موجب

$p > \frac{7}{10} \Rightarrow q = 0$

لازم أخذ مقدار سالب

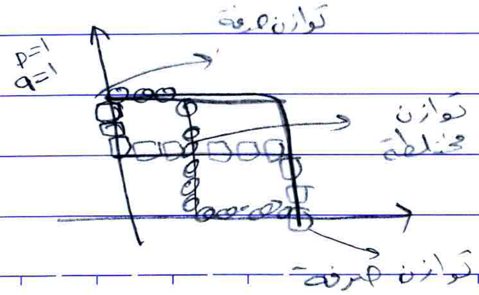
نقاط التوازن:

يوجد نقطة توازن واحدة عندما:

$$q = \frac{6}{10} , \; p = \frac{7}{10}$$

* عندما تكون نقاط التوازن (1 أو 0) تكون نقاط توازن صرفة

أي



* مباراة ذات مجموع غير صفري:

في هذا النوع من المباريات ما يربحه اللاعب الأول لا يساوي ما يخسره الثاني

* مصفوفة الدفع معطاة بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix}$$

حيث a_{ij} ما يربحه اللاعب السطري

b_{ij} ما يربحه اللاعب العمودي

الاستراتيجية الصرفة:

اللاعب السطري بـ Max Min

اللاعب العمودي بـ Max Min

الاستراتيجية المختلطة:

$\pi_R(p,q)$: توقع ربح اللاعب السطري إذا اختار السطر الأول باحتمال p واختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال q

$\pi_C(p,q)$: توقع ربح اللاعب العمودي إذا اختار اللاعب السطري السطر الأول باحتمال p واختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال q

مثال:

مباراة مصفوفة الدخل لها معطاة.

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\
\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{bmatrix} (6,7) & (4,8) \\ (9,3) & (3,1) \end{bmatrix}
\end{array}$$

Max Min = 3

Max Min = 4

ما هي الاستراتيجية الصرفة والمختلطة للاعبين

* الاستراتيجية الصرفة:

- أن يختار اللاعب ١ العمودي العمود الأول ويضمن أن يربح $\boxed{3}$ على الأقل

- أن يختار اللاعب السطري السطر الأول ويضمن أن يربح $\boxed{4}$ على الأقل

التجسس على الخصم يفيد اللاعب الآخر (لأنه لا يوجد نقطة توازن)

* الاستراتيجية المختلطة:

النقطة الأولى من كل ثنائية

$\pi_R(p,q)$: $6pq + 4p(1-q) + 9(1-p)q + 3(1-p)(1-q)$

$\pi_C(p,q)$: $7pq + 8p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q)$

نحل المعادلات نجد أن كما في المحاضرة السابقة:

نجد أن: من أجل $\pi_R(p,q)$ ،

$$\pi_R(p,q) = 6pq + 4p - 4pq + 9q - 9pq + 3 - 3p - 3q + 3pq$$
$$= -4pq + p + 6q + 3$$

SABBAGH STATIONERY

بمقابلة $\Pi_R(p,q)$ مع الشكل:

$$\Pi_R(p,q) = \delta pq - \delta\beta p - \delta\alpha q + \alpha\beta\delta + \gamma$$

$* \boxed{\delta = -4}$

$-\delta\alpha = 6 \Rightarrow * \boxed{\alpha = \frac{6}{4}} = \frac{3}{2}$ ← الدكتور قنبت في حال الكسر ا نطلب عند التعويض

$-\delta\beta = 1 \Rightarrow * \boxed{\beta = \frac{1}{4}}$

$\alpha\beta\delta + \gamma = 3 \Rightarrow \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot (\cancel{-4}) + \gamma = 3$

$-\frac{6}{4} + \gamma = 3 \Rightarrow \gamma = 3 + \frac{6}{4}$

$* \boxed{\gamma = 4.5}$ ومنه $\gamma = \boxed{\frac{13}{4}}$

ومنه بتعويض القيم (*) بالعلاقة التالية:

$$\Pi_R(p,q) = \delta(p-\alpha)(q-\beta) + \gamma$$

نحصل: $\Pi_R(p,q) = -4\left(p - \frac{2}{3}\right)\left(q - \frac{1}{4}\right) + 4.5$

وبنفس الطريقة نتعامل مع العلاقة $\Pi_C(p,q)$

ونحصل على:

$$\Pi_C(p,q) = -3\left(p - \frac{2}{3}\right)\left(q - \frac{3}{7}\right) + \frac{17}{3}$$

ومنه الاستراتيجية:

* أن يختار اللاعب السطري الأول بمعدل $\frac{2}{3}$ ويضمن أن يربح بالمتوسط 4.5 على الأقل

* أن يختار اللاعب العمودي العمود الأول بمعدل $\frac{3}{7}$ ويضمن أن يربح بالمتوسط $\frac{17}{3}$ على الأقل

* ماهي منحنيات أفضل استجابة للاعبين :

منحنيات أفضل استجابة للاعب الطري : $R_R(q)$

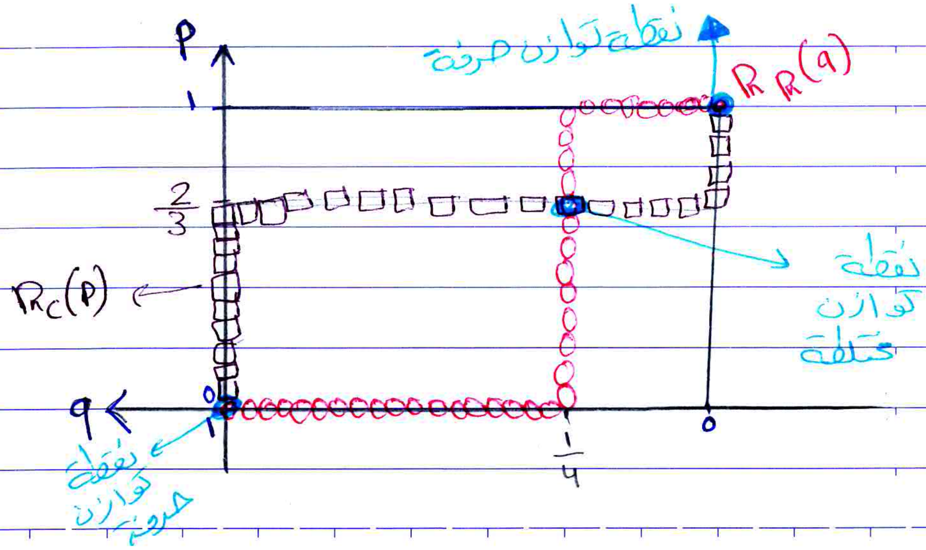
* من أجل $q < \frac{1}{4}$ أفضل استجابة للاعب الطري
أن يكون $p = 1$

$$\Pi_R(p,q) = -4\left(p - \frac{2}{3}\right)\left(q - \frac{1}{4}\right) + 4.5$$

يجب أن يكون 1 $q < \frac{1}{4}$

* من أجل $q > \frac{1}{4}$ أفضل استجابة للاعب الطري
أن يكون $p = 0$

* من أجل $q = \frac{1}{4}$ (أي استجابة للاعب الطري لا تغير
قيمة الربح)



منحنيات أفضل استجابة للاعب العمودي $R_C(q)$:

من أجل $p < \frac{2}{3}$ أفضل استجابة للاعب العمودي أن يكون $q=1$

من أجل $p > \frac{2}{3}$ أفضل استجابة للاعب العمودي أن يكون $q=0$

$p=\frac{2}{3}$ (أي استجابة للاعب العمودي لا تغير قيمة الربح) $(\forall q)$

نقاط التوازن:

1) صرفة: $p=1, q=0$

2) صرفة: $p=0, q=1$

3) مختلطة: $p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{4}$

وظيفة:

من أجل مصفوفة الدفع التالية

ما هي الاستراتيجية الصرفة - الاستراتيجية المختلطة

ارسم منحنيات أفضل استجابة ما هي نقاط التوازن

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

SABBAGH STATIONERY

١٥٢

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14