احداثيات o الثلاث مرتبطة بعلاقتين هما البعد بين o و o_1 ثابت والبعد بين o و o_2 ثابت . $(3-2=1)$

مثال (٤) : إن للقضيب الصلب AB الطليق في الفراغ خمس درجات حرية

الاثبات: يتعين القضيب الطليق في الفراغ إذا عرف موضع نقطتين منه ، أي إذا عرفت ستة وسطاء . ولكن هذه الوسطاء مرتبطة بعلاقة واحدة هي البعد الثابت بين النقطتين مما يدل على أن للقضيب خمس درجات حرية $(6-1=5)$

تمرين (١) : عين عدد درجات حرية مجموعة مادية مؤلفة من قضيب يلازم مستوياً ثابتاً ونقطة مادية تلازم القضيب .

الحل : إن القضيب يتعين في المستوي بأربعة وسطاء هي احداثيات نقطتين منه ، وترتبط هذه الوسطاء بعلاقة البعد بين النقطتين فيكون للقضيب ثلاث درجات حرية . ونعلم أن للنقطة التي تلازم القضيب درجة حرية واحدة لذا يكون للمجموعة المادية أربع درجات حرية.

تمرين (٢) : عين عدد درجات حرية قضيب يتحرك في الفراغ بحيث يلازم أحد طرفيه سطح كرة ثابتة ويلازم طرفه الثاني مستقيماً ثابتاً .

الحل : للقضيب الطليق كما وجدنا خمس درجات حرية ، احدى نقطه تحقق معادلة الكرة والنقطة الثانية تحقق معادلتي المستقيم وبالتالي هناك ثلاث علاقات تربط الوسطاء الخمس ويبقى للقضيب درجتا حرية .

١-١-٥ الاحداثيات المعممة لمجموعة مادية :

نسمي الوسطاء المستقلة التي تعين وبشكل وحيد وكامل موضع المجموعة المادية ، الاحداثيات المعممة لهذه المجموعة . ويتضح من هذا أن عدد الوسطاء المعممة يساوي عدد درجات حرية المجموعة ، فإذا كان لمجموعة ما n درجة حرية كان لها n احداثي معمم نرمز لها q_i حيث $(i=1,2,\dots,n)$

- إن للنقطة المادية في المستوي xoy مثلاً درجتي حرية واحداثياها المعممان هما $q_1=x$ ، $q_2=y$
- إن للجسم الصلب الطليق ست درجات حرية فله ستة احداثيات معممة q_i ، $i=1,2,\dots,6$ يمكن اختيارها بطرق عديدة
- إن للنقطة الطليقة في الفراغ ثلاث درجات حرية واحداثياتها المعممة يمكن أن نختارها

2

تمارين

١- A ، B ، C ثلاث نقط من جسم صلب يتحرك بحيث تكون مواضع ومتجهات سرع هذه النقط في لحظة t معلومة وهي :

$$A=(0,0,0) \qquad V_A=(2,1,-3)$$
$$B=(1,1,0) \qquad V_B=(0,3,-1)$$
$$C=(1,1,1) \qquad V_C=(-1,2,-1)$$

عين متجهات سرع النقط التالية في اللحظة المذكورة

$\boxed{M_1(2,2,0)}$, $\boxed{M_2(1,1,-1)}$, $M_3(1,2,0)$, $M_4(1,0,1)$

٢- بفرض A , B , C ثلاث نقط من جسم صلب احداثيات النقط وسرعها في لحظة t هي :

$$A=(0,0,0) \qquad V_A=(2,1,-3)$$
$$B=(1,1,0) \qquad V_B=(0,3,-1)$$
$$C=(-1,-1,0) \qquad V_C=(1,2,-5)$$

عين سرع النقط :

$\boxed{M_1(1,1,-1)}$, $M_2(1,2,3)$

٣- ليكن لدينا ثلاث نقط A , B , C من مجموعة مادية احداثياتها وسرعها في لحظة t من الزمن هي:

$$A=(0,0,1) \qquad V(A)=(0,1,2)$$
$$B=(1,1,0) \qquad V(B)=(0,0,1)$$
$$C=(1,2,-1) \qquad V(C)=(-1,1,1)$$

هل المجموعة التي اخذت منها هذه النقط متماسكة أم لا ؟ ولماذا؟

٤- صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB رأسها O ثابت . برهن أن قياس مسقط سرعة النقطة A على المستقيم OB يساوي قياس مسقط سرعة النقطة B على OA .

تمارين

١ - قرص دائري نصف قطره a يتحرك بحركة انسحابية معادلات حركته تعطى كما يلي:

$$x_0 = t \quad , \quad y_0 = \sin t \quad , \quad z_0 = \cos t$$

عين مسار نقطة M من محيط القرص وسرعة وتسارع هذه النقطة.

٢- يتحرك جسم صلب S بحركة انسحابية ، معادلات حركة مركز عطالته C هي .

$$x = a\cos(kt - \alpha) \quad , \quad y = b\cos kt \quad , \quad z = 0$$

نقطة M من الجسم احداثياتها بالنسبة لجملة احداثيات متماسكة مع الجسم مبدؤها في C (مركز عطالته) هي : $\overrightarrow{CM} = (1,0,1)$ والمطلوب:

١- عين مسار النقطة C ومسار النقطة M

٢- عين متجه سرعة النقطة M ومتجه تسارعها

محذوف ٣- كيف يتغير مسار النقطة C إذا تغيرت α في الفترة $[0, 2\pi]$

٣ - تعطى معادلات حركة ثلاث نقط بالشكل التالي

$$x(o_1) = \cos t \quad , \quad y(o_1) = \sin t \quad , \quad z(o_1) = 0$$

$$x(o_2) = \cos t - 2 \quad , \quad y(o_2) = \sin(\pi - t) \quad , \quad z(o_2) = 2$$

$$x(o_3) = -2 \quad , \quad y(o_3) = 2\sin t \quad , \quad z(o_3) = 1$$

والمطلوب :

١- عين متجهات السرعة لكل من النقط الثلاث o_1 , o_2 , o_3

٢- هل تنتمي النقطتان o_1 , o_2 إلى جملة متماسكة ؟ وهل تتحرك هذه الجملة بحركة انسحابية ؟

$\cos(\pi - t) = -\cos t$

٣- أعد السؤال السابق من أجل النقطتين o_2 , o_3

٤- هل تؤلف النقط الثلاث مجموعة متماسكة ؟

٤ - علمت مواضع وسرع النقط التالية:

$A(0, 0, 0)$ $\quad B(1, 1, 0)$ $\quad C(1, 0, 1)$ $\quad D(1, 1, 1)$

$\overrightarrow{V_A}(2, 1, -3)$ $\quad \overrightarrow{V_B}(0, 3, -1)$ $\quad \overrightarrow{V_C}(0, 0, 1)$ $\quad \overrightarrow{V_D}(-1, 2, -1)$

أيٌّ من هذه النقط تؤلف مجموعة متماسكة

٣ - تعيين التسارعات :

تتعيــن مركبات متجه التسارع على جملة الاحداثيات الثابتة باشتقاق مركبات متجه السرعة على هذه المحاور فنكتب :

$$\vec{\Gamma}(M)=x_1''\,\vec{i_1} + y_1''\,\vec{j_1} + z_1''\,\vec{k_1}$$

أو من اسقاط عبارة التسارع (٤-٣) على المحاور الثابتة الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M)=(-\theta''\,y_1-\theta'^2\,x_1)\,\vec{i_1} + (\theta''\,x_1-\theta'^2\,y_1)\,\vec{j_1} + b\theta''\,\vec{k_1} \qquad (٤-٧)$$

ونحصــل على مركبات التسارع على جملة المحاور المتماسكة باسقاط العبارة (٤-٣) على هذه المحاور فنجد :

$$\vec{\Gamma}(M)=(-\theta''\,y-\theta'^2\,x)\,\vec{i} + (\theta''\,x-\theta'^2\,y)\,\vec{j} + b\theta''\,\vec{k} \qquad (٤-٨)$$

١ - ٤ -٦ مثال: تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $\omega = 2$ وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة قيمتها $v = 6$ والمطلوب تعيين الخطـوة المختزلة للحركة اللولبية للاسطوانة ثم تعيين موضع ومسار وسرعة وتسارع نقطة من الاسطوانة . احداثياتها بالنسبة لمحاور متماسكة مع الاسطوانة هي $(2,2,3)$.

الحل : نعلم من خواص اللولب الدائري أن $S=b\,\theta$

أي $v = s' = b\,\omega \quad \Leftarrow \quad 6=2\,b$

ومنه فإن خطوة اللولب المختزلة $b=3$.

ومعادلة حركة الاسطوانة : $\theta = \int \omega\, dt = 2t$

بفرض أن $\theta = 0$ في لحظة البدء

إن موضع النقطة M يتعين من (٤ -٤) التي تعطي في هذه الحالة :

$$x_1 = 2\,(\cos 2t - \sin 2t\,)$$
$$y_1 = 2\,(\sin 2t + \cos 2t\,)$$
$$z_1 = 3 + 6t$$

وهي معادلات حركة النقطة M . وبحذف t بين هذه المعادلات الثلاث نجد :

(١) $x_1^2 + y_1^2 = 8$ وهي معادلة سطح اسطوانة نصف قطرها $2\sqrt{2}$ محورها $o_1\,z_1$

(٢) $$x_1 = 2\,(\cos\frac{z_1-3}{3} - \sin\frac{z_1-3}{3})$$

إن (١) و (٢) همـا معادلتـا مسـار النقطة M وهو منحن لولبي يرتسم على سطح الاسطوانة بيان المعادلة (١) .

وتتعين سرعة M من (٤ - ٦) بالشكل :

$$\vec{V}(M) = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

ويتعين تسارع M من (٤ - ٨) بالشكل :

$$\vec{\Gamma}(M) = -8\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

(6)

تمارين

١- يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول محور ثابت Δ حسب المعادلة :

$$\varphi = \alpha \log \left(1 + \frac{\omega_0 t}{\alpha} \right) \qquad (\alpha\ ,\ \omega_0 \text{ ثابتتان})$$

والمطلوب ١) تعيين متجه الدوران ومتجه التسارع الزاوي للجسم

٢) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R

٣) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي

٤) تعيين القيمة العددية للسرعة و التسارع عندما تسعى t إلى اللانهاية .

٢- تتحرك أسطوانة دائرية حول محورها وفق المعادلة :

$$\theta = a\left[\ t + \frac{1}{b}\ (e^{-bt} - 1)\ \right] \qquad (b\ ,\ a \text{ ثابتتان موجبتان})$$

والمطلوب ١) عين متجه الدوران ومتجه التسارع الزاوي للاسطوانة

٢) عين سرعة وتسارع نقطة من قاعدة الاسطوانة تبعد عن مركز القاعدة

بالمقدار $r = \dfrac{R}{2}$ حيث R نصف قطر قاعدة الاسطوانة

٣) عين سرعة وتسارع نقطة من سطح الاسطوانة تبعد عن قاعدتها بالمقدار R

٤) ناقش قيم السرع والتسارعات عندما يسعى t إلى اللانهاية

٣- يدور قرص دائري نصف قطره R ، حول قطره الثابت oA بسرعة زاوية

$\omega = 2e^{-t}$ والمطلوب :

١) أوجد معادلة حركة القرص $\omega = \theta' \Rightarrow \theta = -2e^{-t} + c$

٢) عين السرعة والتسارع لنقطة من محيط القرص تقع على القطر الذي يصنع

زاوية $\dfrac{\pi}{3}$ مع القطر oA بالطريقة الشعاعية ثم بالطريقة التحليلية بالنسبة لمحاور

متماسكة مع القرص وبالنسبة لمحاور ثابتة .

عند بدء $t=0 \Rightarrow c$ $\theta=0$

٤- أعد حل المسألة (١) بفرض أن الحركة لولبية خطوتها $b = \alpha$

٥- يتحرك قرص دائري نصف قطره a بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة

$x + y$

$-y \quad + x \quad - \alpha$

$\omega = \omega_o$ علماً أن محور القرص ينتقل بمقدار $2\,\omega_o$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره والمطلوب :

١ – تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة M من محيط القرص

٢– تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة تبعد عن مركز القرص بالمقدار $\frac{1}{2}a$

وبحذف الوسيط الوحيد (الزمن) بين المعادلتين (٥-١٥) أو (٥-١٦) نحصل على معادلة سطح مخروطي رأسه o هو المخروط القاعدة في الفراغ الثابت أو هو المخروط المتدحرج في الفراغ المتحرك .

٦ - تعيين التسارعات تحليلياً:

ليست هناك أدنى صعوبة في تعيين مركبات متجه التسارع $\vec{\Gamma}(M)$ لنقطة ما من الجسم بعد أن عينا مركبات شعاعي الدوران والتسارع الزاوي على كل من الجملتين الثابتة والمتحركة وذلك بإسقاط عبارة التسارع (٥-٤) فنجد :

$$\vec{\Gamma}(M)=(p'_1, q'_1, r'_1)\times(x_1, y_1, z_1)+(p_1,q_1,r_1)\times(x'_1,y'_1,z'_1) \quad (٥-١٧)$$

$$\vec{\Gamma}(M)=(p', q', r')\times(x, y, z)+(p,q,r)\times(V_x,V_y,V_z) \quad (٥-١٨)$$

على أن لا ننسى أن (x_1, y_1, z_1) مقادير تابعة للزمن في حين (x, y, z) مقادير ثابتة.

١-٥-٧ مثال : يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول نقطة ثابتة o وفق المعادلات :

$$\psi = 2t \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \varphi = 30t$$

والمطلوب تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي ومعادلتي مخروط القاعدة ومخروط المتدحرج ثم تعيين سرعة وتسارع نقطة M من الجسم احداثياتها بالنسبة لجملة الاحداثيات xyz المتماسكة مع الجسم هي $(0, 0, -1)$.

الحل : لدينا شعاع الدوران

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$$

نشتق ونعوض فنجد

$$\vec{\omega} = 2\vec{k}_1 + 30\vec{k}$$

نسقط $\vec{k}_1$ على المحاور المتماسكة مع الجسم ونكتب بعد تعويض الزوايا بقيمها :

$$\vec{\omega} = (\sin 30t)\,\vec{i} + (\cos 30t)\,\vec{j} + (\sqrt{3} + 30)\,\vec{k}$$

نشتق فنحصل على شعاع التسارع الزاوي :

$$\vec{\varepsilon} = (30\cos 30t)\,\vec{i} - (30\sin 30t)\,\vec{j}$$

معادلات مخروط المتدحرج :

$$\frac{x}{\sin 30t} = \frac{y}{\cos 30t} = \frac{z}{\sqrt{3}+30}$$

بحذف t بين هاتين المعادلتين نجد المعادلة الديكارتية للمتدحرج :

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{(\sqrt{3}+30)^2}$$

ولتعيين مخروط القاعدة نسقط $\vec{k}$ على المحاور الثابتة ونعوض في عبارة $\vec{\omega}$ فنجد

$$\vec{\omega} = (15 \sin 2t)\ \vec{i_1} - (15 \cos 2t)\ \vec{j_1} + (15\sqrt{3} + 2)\ \vec{k_1}$$

وتكون معادلات مخروط القاعدة هي :

$$\frac{x_1}{15 \sin 2t} = \frac{y_1}{15 \cos 2t} = \frac{z_1}{15\sqrt{3}+2}$$

وتنتج المعادلة الديكارتية للقاعدة من حذف t بين هاتين المعادلتين على النحو :

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{225}{(15\sqrt{3}+2)^2}\ z_1^2$$

نعين شعاع سرعة النقطة M في الفراغ المتحرك من العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{oM} = (p , q , r) \times (0 , 0, -1)$$

فنجد

$$\vec{V}(M) = (-\cos 30\ t)\ \vec{i} + (\sin 30\ t)\ \vec{j}$$

ونعين شعاع تسارع النقطة M في الفراغ المتحرك أيضاً من العلاقة:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{V(M)}$$

$$= (p', q', 0) \times (0, 0, -1) + (p, q, r) \times (V_x, V_y, 0)$$

فنجد :

$$M) = (-30\sin 30\ t, -30\cos 30\ t, 0) + (\sqrt{3}+30)(-\sin 30\ t, -\cos 30\ t, 0)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = -(\sqrt{3}+60)\ \sin 30\ t\ \vec{i} - (\sqrt{3}+60)\ \cos 30\ t\ \vec{j}$$

تمارين

١- يتحرك قضيب oA طوله l في الفراغ بحيث تبقى نهايته o ثابتة . تتعين حركته بتابعية زوايا اولر :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta = 2t \quad , \quad \psi = t$$

والمطلوب تعيين شعاع الدوران الآني وشعاع التسارع الآني ومخروطي القاعدة والمتدحرج وسرعة نهاية القضيب A وتسارعها.

٢- يتحرك جسم صلب s في الفراغ بحيث تبقى النقطة o منه ثابتة ، $o\,x\,y\,z$ جملة احداثيات متعامدة ومباشرة متماسكة مع s . فإذا كانت مركبات متجه السرعة للنقطة $M_1(0,0,2)$ على $o\,x\,y\,z$ هي $\vec{V}(M_1) = (\,t\,,\,2t^2\,,\,0\,)$ وجيوب تمام توجيه متجه السرعة للنقطة $M_2(0,1,2)$ بالنسبة للجملة $o\,x\,y\,z$ هي $(\frac{-2}{3}\,,\,\frac{2}{3}\,,\,\frac{-1}{3})$

عين المحور الآني لدوران s وعين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي الآني والمعادلة الديكارتية للمتدحرج .

٣- مخروط دوراني زاويته الرأسية $2\,\alpha = \frac{\pi}{6}$ يتحرك بحيث يبقى رأسه o ثابتاً ويصنع محوره oc مع المحور الشاقولي الثابت oz_1 زاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ راديان فإذا كانت سرعة النقطة A التي تقع على سطح المخروط وتبعد عن ذروته بالمقدار $\alpha - 1$ هي:

$$\vec{V}(A) = (-\sin t\ \vec{i_1} + \cos t\ \vec{j_1})$$

عين معادلات حركة المخروط وشعاع الدوران الآني ، ثم عين القاعدة والمتدحرج .

٤- $o\,A\,B\,C$ صفيحة بشكل مستطيل تدور حول رأسها الثابت o بحيث يبقى ضلعها oA ملازما للمستوي الثابت $o\,x_1\,y_1$ والمطلوب :

١- تعيين الوسطاء المستقلة التي تعين موضع وحركة الصفيحة

٢- تعين شعاع الدوران الآني بتابعية الوسطاء المستقلة

٣- بفرض أن طول شعاع الدوران الآني ثابت ويساوي a وأن القيمة العددية لسرعة النقطة A تساوي a أيضاً وأن طول $oA=2$ وطول $AB=1$ ، يطلب تعيين معادلات حركة الصفيحة وسرعة وتسارع الرأسين B و C من الصفيحة .

٥- صفيحة دائرية مركزها o ثابت نصف قطرها a تستند بنقطة من محيطها إلى مستو ثابت $o_1x_1y_1$ يبعد عن مركزها o بالمقدار $\frac{a}{2}$ والمطلوب :

١- تعين الاحداثيات المعممة للصفيحة وتعيين شعاع الدوران الآني بدلالة هذه الاحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمن

٢- بفرض أن نقطة التماس تدور حول المحور o_1z_1 بسرعة قيمتها $v(c)=\frac{\sqrt{3}}{2}t$ وأن طويلة شعاع الدوران الآني $|\omega|=1$ عين معادلات حركة الصفيحة ثم عين سرعة نقطة ما من الصفيحة وتسارعها .

٣- بفرض أن الصفيحة تتدحرج دون انزلاق على المستوي $o_1x_1y_1$ عين المحور الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج.

تمارين محلولة

تمريـــن (١) : يتحرك جسم S في الفراغ بحركة عامة . علمت سرع ثلاث نقط منه في لحظة معينة t وهي :

$$A(0\,,0\,,0) \qquad \vec{V}(A)=(1\,,0\,,0)$$
$$B(1\,,1\,,1) \qquad \vec{V}(B)=(0,-1,2)$$
$$C(1\,,0\,,-1) \qquad \vec{V}(C)=(1,3,0)$$

عين عناصر الفتل المكافىء لحركة الجسم في اللحظة المذكورة ثم عين سرعة النقطة $M(a\,,b\,,c)$ في اللحظة المذكورة :

الحـل : لتعيــين عناصـــر الفتل المكافىء للحركة علينا أن نعين مركبات شعاع الدوران ، ومعادلات محور الفتل واحداثيات نقطة من محور الفتل وخطوة اللولب في اللحظة المذكــورة . فمـن أجـل ذلك نختار النقطة A قطباً للحركة ونفرض مركبات شعاع الدوران $\vec{\omega}$ هي (p,q,r) ، إن سرعة النقطة B تكتب كما نعلم بالشكل :

$$\vec{V}(B)=\vec{V}(A)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}$$

بالتعويض نجد :
$$(0,-1,2)=(1,0,0)+(p,q,r)\times(1,1,1)$$

ومنه
$$1=r-q \quad , \quad 1=p-r \quad , \quad 2=p-q \qquad (١)$$

وكذلك فإن سرعة النقطة C تكتب بالشكل :
$$\vec{V}(C)=\vec{V}(A)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{AC}$$

وبالتعويض نجد :
$$(1,3,0)=(1,0,0)+(p,q,r)\times(1,0,-1)$$

ومنه نجد :
$$0=-q \quad , \quad 3=p+r \qquad (٢)$$

بحل المعادلات (١) و (٢) نجد .

مركبات شعاع الدوران :
$$p=2 \quad , \quad q=0 \quad , \quad r=1$$

لتعيــين معــادلات محــور الفــتل نحســب ســرعة نقطة ما o_1 منه ونكتب شرط التوازي $\vec{V}(o_1)\,//\,\vec{\omega}$ فنجد :

$$\vec{V}(o_1)=\vec{V}(A)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{Ao_1}$$
$$=(1\,,0\,,0)+(2\,,0\,,1)\times(x,y,z)$$
$$=(1-y)\,\vec{i}\;+(x-2z)\,\vec{j}+2y\,\vec{k}$$

13

وشرط التوازي يعطي :

$$\frac{1-y}{2}=\frac{x-2z}{0}=\frac{2y}{1}$$

ومنه فإن معادلات محور الفتل هي :

$$x=2z$$

$$y=\frac{1}{5} \qquad (٣)$$

من المعادلات (٣) وبفرض $x\,(o_1)=0$ نجد $y(o_1)=\frac{1}{5}$ $z\,(o_1)=0$

أي $o_1(\,0,\frac{1}{5},0\,)$ هي احدى نقط محور الفتل .

أما خطوة اللولب فتتعين من العلاقة :

$$b=\frac{\vec{V}(A)\cdot\vec{\omega}}{\omega^2}=\frac{2}{5}$$

وأخيراً يمكن حساب سرعة نقطة ما من الجسم $M(\,a\,,b\,,c\,)$ من العلاقة

$$\vec{V}(M)=\vec{V}(A)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{AM}$$

أو من العلاقة

$$\vec{V}(M)=\frac{2}{5}\,\vec{\omega}\,+\vec{\omega}\,\times\overrightarrow{o_1M}$$

فنجد :

$$=(1-b)\,\vec{i}\,+(q-2\,c)\,\vec{j}+2\,b\,\vec{k}$$

تمرين (٢) : تعطى معادلات حركة جسم صلب بالشكل :

$$x_o=-\cos t\qquad,\qquad y_o=\sin t\qquad,\qquad z_o=0$$

$$\psi=t\qquad,\qquad \theta=\frac{\pi}{2}\qquad,\qquad \varphi=t$$

عيـن معادلات محوٍر الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة للحركة العامة السابقة ثم عين محور الفتل وخطوة اللولب في اللحظة $t=0$.

الحل: نعلم أن شعاع الدوران يتعين من العلاقة

$$\vec{\omega}=\psi'\,\vec{k_1}+\theta'\,\vec{u}+\varphi'\,\vec{k}$$

أي

$$\vec{\omega}\;=\;1\,\vec{k_1}\;+1\,\vec{k}$$

وباسقاط $\vec{k}$ على المحاور الثابتة نجد :

$$\vec{k} = \sin\theta \;\sin\psi \;\vec{i_1} - \sin\theta \;\cos\psi \vec{j_1} + \cos\theta \;\vec{k_1}$$

نعوض في عبارة $\vec{\omega}$ فنجد :

$$\vec{\omega} = (\;\sin t\;)\;\vec{i_1} \;+(-\cos t)\;\vec{j_1} + (1)\;\vec{k_1}$$

فإذا فرضنا أن o_1 نقطة من محور الفتل احداثياتها $(\,x\,,\,y\,,\,z\,)$ فإن سرعتها تكتب بالشكل :

$$\vec{V}(o_1) = \vec{V}(o) \;+\; \vec{\omega} \times \overline{oo_1}$$

ونحسب $\vec{V}(o)$ فنجد :

$$\vec{V}(o) \;=\; \sin t \;\vec{i_1} + \cos t \;\vec{j_1}$$

$$V_{x_1}(o_1) = \sin t - z\;\cos t - y + \sin t = 2\;\sin t - y - z\;\cos t$$

$$V_{y_1}(o_1) = \cos t + x + \cos t - z\;\sin t = 2\;\cos t + x - z\;\sin t$$

$$V_{z_1}(o_1) = y\;\sin t - \sin^2 t + x\cos t + \cos^2 t = y\;\sin t + x\;\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t$$

ومعادلات محور الفتل هي بالتالي :

$$\frac{V_{x_1}(o_1)}{\sin t} = \frac{V_{y_1}(o_1)}{-\cos t} = \frac{V_{z_1}(o_1)}{1}$$

وخطوة اللولب :

$$b = \frac{\vec{V}(o).\vec{\omega}}{\omega^2} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{2}$$

أما في اللحظة $t = 0$ فإن معادلات محور الفتل هي :

$$\frac{-z-y}{0} = \frac{2+x}{-1} = \frac{x+1}{1}$$

أي :

$$x = \frac{3}{2} \quad , \quad z = y$$

وخطوة اللولب في اللحظة الابتدائية تساوي :

$$b = -\frac{1}{2}$$

15

تمارين

١- $A\,,B\,,C$ ثلاث نقط من جسم صلب احداثياتها في لحظة معينة بالنسبة لجملة ثابتة هي

$$A(0\,,0\,,0) \qquad B(1,1,0) \qquad C(1,1,1)$$

ومركبات سرع هذه النقط هي

$$\vec{V}(A)=(2\,,1\,,-3)\ ,\ \vec{V}(B)=(0,3,-1)\ ,\ \vec{V}(C)=(-1,2,-1)$$

عين عناصر الحركة اللولبية المماسة في اللحظة t لحركة الجسم

٢- تعطى معادلات حركة جسم صلب بالشكل :

$$x_0=t \quad , \quad y_0=-t \quad , \quad z_0=1$$

$$\psi=\frac{\pi}{2} \quad , \quad \theta=t \quad , \quad \varphi=2t$$

عيـن معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم ثم عين شعاع التسارع الزاوي الآني وسرعة وتسارع نقطة من الجسم احداثياتها (x_1,y_1,z_1)

٣- عين النقط التي تنتمي إلى مجموعة متماسكة واحدة من بين النقط التالية علماً أن:

$$A(0\,,0\,,-1)\ ,\ B(1,1,0)\ ,\ C(1,0,1)\ ,\ D(1,0,0) \text{ و}$$

$$\vec{V}(A)=(0,0,-1)\ ,\ \vec{V}(B)=(1,1,1)\ ,\ \vec{V}(C)=(2,0,0)\ ,\ \vec{V}(D)=(1,1,0)$$

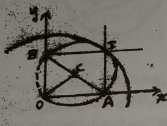
في لحظة معينة

ثم عين عناصر الحركة الفتلية المماسة لحركة هذا الجسم في اللحظة المذكورة .

تمارين محلولة

تمريـــن(١) : قضـــيب AB طولـــه $2\ l$ تتحرك نهايته A على مستقيم أفقي ox ، ويـتحرك طـرفهB علـى مستقيم شاقولي oy عين المركز الآني لدوران AB والقاعدة والمتدحرج .

الحل: إن سرعة النقطة A تحمل فرضاً على ox لذا فإن المركز الآني للدوران يقع على العمود المقام من A على ox ، كما أن سرعة النقطة B تحمل على oy والمركز الآني للـدوران يقع على العمود المقام منB على oy مما يدل أن المركز الآني للدوران I هو نقطة تقاطع العمودين السابقين ، كما في الشكل .



الشكل (١٥)

تعيين القاعدة : إن القطعة المستقيمة oI هي قطر في المستطيل $o\ A\ I\ B$ إي أن طـول oI يسـاوي طـول AB يساوي $2\ l$ ولما كانت o نقطة ثابتة في المستوي فإن المحل الهندسي لـI في المستوي الثابت (أي القاعدة) هي دائرة مركزها o ونصف قطرها $2\ l$

تعيين المتدحرج : إن النقطة C منتصف AB هي نقطة ثابتة من القضيب ، وإن طول CI يساوي نصف طول القضيب AB أي يساوي l وبالتالي فإن I تبعد عن النقطة C الثابتة فـي المستوي المتماسك مع القضيب بمقدار ثابت أي أن المحل الهندسي للنقطة I في المستوي المتحرك (أي المتدحرج) هو دائرة مركزها C ونصف قطرها l .

تمريـــن(٢) : لتكن s نصف دائرة شاقولية مركزها o نصف قطرها a وAB قضيب طوله$2\ l$ تتحرك نهايته A على محيط نصف الدائرة بسرعة قيمتها ثابتة $v = 2\ a$ ويستند

القضيب على الحافة c للدائرة والمطلوب :

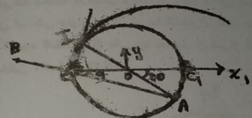
١) تعيين المركز الآني لدوران القضيب AB والقاعدة والمتدحرج

٢) تعيين معادلات الحركة للقضيب AB

٣) تعيين سرعة وتسارع النقطة B (نهاية القضيب)

٤) تعيين مركز التسارع المعدوم في اللحظة $t = 0$.

الحل:



الشكل(٩٦)

١) نعلم أن سرعة A تحمل على مماس الدائرة لذا فإن المركز الآني للدوران يقع على العمود على المماس في A أي على نصف القطر Ao ، ولما كان المستقيم يستند على الحافة C فسرعة النقطة المنطبقة على C من القضيب تحمل على القضيب أي أن المركز الآني للدوران يقع على العمود على القضيب في النقطة C ، فنقطة تقاطع هذين العمودين هي المركز الآني للدوران المطلوب.

إن الزاوية $\hat{ACI}$ قائمة أي أن AI هو قطر للدائرة الثابتة التي مركزها o ونصف قطرها a فهي القاعدة . كما أن بعد I عن النقطة A الثابتة بالنسبة للقضيب يساوي $2a$ ثابت مما يدل على أن المتدحرج دائرة مركزها A نصف قطرها $2a$.وتتم حركة القضيب بالتالي بتدحرج الدائرة الكبيرة $(A, 2o)$ خارج الدائرة الصغيرة (o, a) دون انزلاق .

٢) إن حركة القضيب مستوية فهي تتعين باحداثيات قطب نختاره A ، وزاوية يصنعها مستقيم متماسك مع القضيب (نختاره القضيب) مع مستقيم ثابت وليكن القطر CoC_1 ، فتكون الاحداثيات المعممة θ , $x(A)$, $y(A)$.

لتعيين معادلات الحركة ، أي العلاقات الزمنية للاحداثيات المعممة نكتب القيمة العددية لسرعة A على محيط الدائرة

$$\omega_1 = -(2\theta)' \quad , \quad v = 2a = \omega_1 a$$

أي أن

$$\theta' = -1 \quad \Leftarrow \quad -2a\theta' = 2a$$

نكامل بالنسبة للزمن ونفرض أن $\theta = 0$ في لحظة البدء فنجد :

$$\theta = -t$$

المعادلة الاولى للحركة.

ونكتب احداثيات A على المحاور الثابتة التي نختارها ox , oy فنجد

$$y(A) = a\sin 2\theta \qquad x(A) = a\cos 2\theta$$

وبتعويض θ بقيمتها نجد معادلات الحركة المطلوبة :

$$y(A) = -a\sin 2t \qquad x(A) = a\cos 2t \quad , \quad \theta = -t$$

٣) تحسب سرعة النقطة B من العلاقة

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B) = (-2a\sin 2t\ , -2a\cos 2t\ ,\ 0) + (-1\vec{k}) \times (-2l\cos t\ , 2l\sin t, 0)$$

و بالاصلاح نجد:

$$\vec{V}(B) = (-2a\sin 2t + 2l\sin t)\ \vec{i} + (-2a\cos t + 2l\cos t)\ \vec{j}$$

أما تسارع النقطة B فنحصل عليه باشتقاق مركبتي شعاع السرعة على المحاور الثابتة فنجد:

$$\vec{\Gamma}(B) = (-4a\cos 2t + 2l\cos t)\ \vec{i} + (4a\sin t - 2l\sin t)\ \vec{j}$$

٤) لتعيين Q مركز التسارع المعدوم نكتب:

$$\vec{\Gamma}(Q) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AQ} - \omega^2\ \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$$

$$-4a\cos 2t - (x - a\cos 2t) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3a\cos 2t$$

$$4a\sin 2t - (y + a\sin 2t) = 0 \ \Rightarrow\ y = 3a\sin 2t$$

وفي اللحظة $t = 0$ نجد

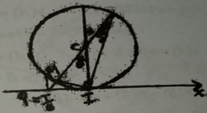
$$x(Q) = -3a \qquad , \qquad y(Q) = 0$$

تمرين(٣) : يتدحرج قرص دائري مركزه c نصف قطره a في مستو شاقولي على المحور الافقي o_1x دون انزلاق والمطلوب :

١- عين المركز الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج

٢- عين مسار نقطة M من محيط القرص كانت منطبقة على نقطة تماس القرص مع المحور o_1x في لحظة البدء ، وعين سرعة هذه النقطة وتسارعها علماً أن سرعة النقطة c مركز القرص تساوي ٧ .

الحل : ١) نعلم أنه في حركة التدحرج دون انزلاق تكون نقطة التماس هي المركز الآني للدوران I وبالتالي فإن القاعدة هي المستقيم o_1x أما المتدحرج فهو محيط القرص أي الدائرة (c, a) .



الشكل (١٧)

٢) لنفرض أن M كانت منطبقة على I_o في لحظة البدء ولنختر I_o مبدأ للاحداثيات المتماسكة مع المستوي الثابت o_1xy وبعد مرور زمن قدره t أصبحت M في وضعها الجديد على محيط الدائرة وأصبحت نقطة التماس (المركز الآني للدوران) في الموضع I ولنفرض الزاوية بين cM و cI تساوي θ .

نعلم من شرط التدحرج دون انزلاق أن طول المنحني $\widehat{MI}$ يساوي طول القطعة المستقيمة o_1I أي :

$$\overrightarrow{o_1I} = a\theta\,\vec{i}$$

ولتعيين احداثيات M نكتب

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1I} + \overrightarrow{IM}$$

لكن طول $\overline{IM}$ يساوي $2a\sin\frac{\theta}{2}$ فباسقاط العلاقة * على المحورين o_1x و o_1y *

$$\overrightarrow{o_1M} = a\theta\,\vec{i} - (2a\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2})\vec{i} + 2a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{j}$$

أي : $y(M) = a\,(1-\cos\theta)$ $\qquad x(M) = a(\theta - \sin\theta)$ **

وهي معادلات المنحني الذي يدعى سيكلوئيد.

– يمكن تعين سرعة النقطة M من العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \overline{IM}$$

ولدينا $\vec{\omega} = -\theta' \vec{k}$ (الإشارة السالبة لأن الدوران باتجاه عقارب الساعة) وباسقاط عبارة $\vec{V}(M)$ على المحورين o_1x و o_1y نجد :

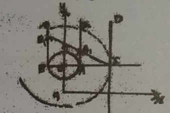
$$\vec{V}(M) = a\theta'(1-\cos\theta)\ \vec{i}\ + a\theta' \sin\theta\ \vec{j}$$

ونحصل على العبارة ذاتها باشتقاق ** بالنسبة للزمن .

ويتعين متجه التسارع باشتقاق عبارة السرعة ، الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M) = a\,[\ \theta''(1-\cos\theta) + \theta'^2 \sin\theta\ \,]\,\vec{i}\ + a[\ \theta''\ \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta\ ]\vec{j}$$

تمرين(٤): بكرة متحركة مركزها c نصف قطرها a ترفع شاقولياً بوساطة حبل يمر على محيطها وتمر نهايتا الحبل على بكرتين صغيرتين ثابتتين . A و B نقطتا تماس الحبل مع البكرة و AB قطر أفقي فيها فإذا علمت أن سرعة النقطة A شاقولية نحو الأعلى وتساوي $\vec{v}_1$ وأن سرعة النقطة B هي $\vec{v}_2$: $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ فالمطلوب: تعيين المركز الأني للدوران للبكرة وتعيين القاعدة والمتدحرج ثم تعيين سرعة النقطة c (مركز البكرة)



الشكل (١٨)

الحـل: بما أن سرعة A توازي سرعة B و $\vec{V}(A) \neq \vec{V}(B)$ فإن المركز الأني للدوران هو نقطة تقاطع المستقيم BA مع B_1A_1 المستقيم الواصل بين نهايتي سرعتي النقطتين A و B . نلاحظ من الشكل أن :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \qquad *$$

من العلاقة • يمكن أن نكتب :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}-\overline{IA}} = \frac{\overline{IA}}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{IA} = 2a$$

وبالتالي فإن:

$\overline{cI} = 3a$ أي أن بعـد المركز الآني للدوران عن النقطة c المتماسكة مع مستوي البكرة ثابت فالمحل الهندسي لـ I في هذا المستوي دائرة مركزها c نصف قطرها $3 \ a$ وهي تمثل المتدحرج.

كما أن بعد I عن المستقيم o_1y الثابت يساوي المقدار الثابت $3 \ a$ فالمحل الهندسي للمركز الآني للدوران في المستوي الثابت هو المستقيم بيان المعادلة $x_1(I) = 3 \ a$ فالقاعدة مستقيم وتتم الحركة بتدحرج الدائرة $(c, 3a)$ على المستقيم الشاقولي D .

إن سرعة النقطة c تعامد Ic فهي شاقولية نحو الأعلى وقيمتها تتعين من العلاقة:

$$\frac{v(c)}{\overline{Ic}} = \frac{v(A)}{\overline{IA}} \Rightarrow$$

$$v(c) = \frac{3a}{2a} \ v_1 = \frac{3}{2} v_1$$

تمارين

١) ذراع oA طوله a يدور في مستو ثابت بسرعة زاوية ثابتة ω_1 حول النقطة الثابتة o ، AB يد طولها $2a$ مرتبطة مفصلياً في A بالذراع oA وتنزلق نهايتها B على مستقيم ثابت ox فالمطلوب :

١- تعيين المركز الآني لدوران AB ومعادلات حركتها

٢- تعيين القاعدة والمتدحرج

٣- تعيين سرعة وتسارع النقطة B ثم تعيين السرعة والتسارع حين تكون الزاوية $B\hat{o}A$ مساوية الصفر أو 30° أو 60° .

٤- عين النقطة M من AB التي تكون سرعتها أصغرية

٢) قضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي xoy بحيث تتحرك النقطة A على ox بسرعة ثابتة قيمتها v ، وتحرك النهاية B في المستوي xoy بحيث تبقى القيمة العددية لسرعتها ثابتة وتساوي v أيضاً . كان القضيب AB منطبقاً على oy في لحظة البدء والمطلوب: ١- إيجاد مسار النقطة B

٢- تعيين المركز الآني لدوران القضيب والقاعدة والمتدحرج

٣) يتدحرج قرص دائري دون انزلاق على مستقيم ox في المستوي xoy وتبقى سرعة مركزه ثابتة عين تسارع المركز الآني للدوران

٤) زاوية صلبة AMC قائمة في M تنزلق النقطة A نهاية الضلع الأول على المحور الشاقولي oy بسرعة ثابتة تساوي v ويمر الضلع MC من نقطة ثابتة B على المحور الأفقي ox فإذا علمت أن $AM = oB = a$ فالمطلوب:

١- تعيين مسار النقطة M

٢- تعيين المركز الآني للدوران ومعادلات حركة الزاوية القائمة بفرض أن A كانت في o في اللحظة الابتدائية ، وعين سرعة وتسارع النقطة M

٣- تعيين القاعدة والمتدحرج

٤- تعين سرعة وتسارع النقطة التي تنطبق على B في اللحظة المذكورة .

٥) قرص دائري C نصف قطره a مركزه o يتدحرج دون انزلاق على المحيط الخارجي لقرص دائري ثابت مركزه o_1 ونصف قطره a_1 بحيث يدور المستقيم o_1o حول o_1 في المستوي الثابت $o_1x_1y_1$ بسرعة زاوية $\omega_1 = bt$ ، احسب سرعة وتسارع النقطة D من محيط القرص C في اللحظة التي يكون فيها oD عمودياً على o_1o وعين معادلات حركة القرص C .

٦) يتحرك المستوي xoy في مستو ثابت $x_1o_1y_1$ بحيث تنزلق النقطة o على نصف المستقيم $B y_1$ علماً أن احداثيا B في المستوي الثابت هما $B(0,b)$ ويمس المستقيم ox دوماً دائرة ثابتة مركزها o_1 نصف قطرها b ، عين المركز الآني لدوران المستوي xoy ثم عين القاعدة والمتدحرج.

٢- بفرض أن قيمة سرعة نقطة تماس ox مع الدائرة هي $v=bt$ يطلب تعيين معادلات حركة المستوي xoy . ثم تعيين مركز التسارع المعدوم

٧) نصف دائرة ثابتة مركزها o نصف قطرها a قطرها coc_1 أفقي . AB قضيب طوله $2l > 2a$ تتحرك نهايته A على محيط الدائرة بسرعة قيمتها ثابتة وتساوي $v = 2\,a$ كما يستند القضيب على حافة الدائرة في c والمطلوب :

١- تعيين المركز الآني للدوران للقضيب AB وتعيين القاعدة والمتدحرج .

٢- كتابة المعادلات الزمنية لحركة القضيب وتعيين شعاع التسارع الزاوي الآني .

٣- تعيين سرعة وتسارع النهاية B من القضيب .

٤- تعيين مركز التسارع المعدوم للقضيب في اللحظة $t = 0$.