هذه المحاضرة عبارة عن حل تمارين.

$\boxed{2|10}$ هل تحدد المساواة التالية متريكاً على مجموعة الأعداد الحقيقية

$$d(x,y) = (x-y)^2$$

لا تحدد متريك لأنه لو أخذنا

$x=5,\ y=1,\ z=2$

$d(x,y) \overset{?}{\le} d(x,z)+d(z,y)$

$16 \not\le 9+1$

ومنه العلاقة السابقة لا تشكل متريك

$\boxed{3|10}$ اثبت أن $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ تحدد متريك على مجموعة الأعداد الحقيقية. اكمل يا الطالب

الشروط الأولى ① ② ③ محققة [illegible]

$|x-y| = |x-z+z-y|$

$\le |x-z|+|z-y|$

وبما أن $2\sqrt{|x-z||z-y|}$

$\Rightarrow |x-y| \le |x-z|+|z-y|+2\sqrt{|x-z||z-y|}$

$|x-y| \le \left(\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}\right)^2$

بجذر الطرفين:

$\sqrt{|x-y|} \le \sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}$

$d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$

ومنه d متريك على R

$\boxed{5|10}$ ليكن d متريكاً على X، حدد كل الثوابت k حيث يكون kd متريكاً على X

$\tilde{d} = k.d$

if : $k<0$ مرفوضة وضوحاً

: $k=0$ مرفوضة لأنه سوف يخالف الخاصة $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

: $k>0$

$\tilde{d} = k.d$ هذه الحالة الوحيدة التي تحدد متريكاً على X

$\boxed{7|10}$ إذا كان A فضاء جزئي من l^∞ متألفاً من كل المتتاليات التي كل حدودها إما 0 أو 1، فما هو المتريك على A؟

بما أن $A\subset l^\infty$ فإن المسافات على A تقاس بمتريك الفضاء l^∞ ومنه نلاحظ أنه إذا كانت العناصر مختلفة فإن المسافة سوف تكون بينها $d(x,y)=\sup|\xi_i-\eta_i|=1$

وفي حالة الانطباق سيكون المسافة 0

وهذا هو تعريف المتريك المتقطع

$\boxed{8|10}$ بين أن $d(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$ يحدد متريك على $C[a,b]$

يترك للطالب.

$\boxed{1|13}$ أثبت استناداً إلى متباينة المثلث أن $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

فكرة الحل: يكفي أن

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y) \quad \text{و}$$

$$d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$$

$\boxed{1|14}$ أثبت أنه يمكن الاستعاضة عن (M_3) بموضوعات المتراجحة (M_4) الأخرى، بمعنى سبيل هنالك أن ... شمانات (M_2) و المتباينة

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y)$$

$$\left.\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ d(x,y) \leq d(z,x)+d(z,y) \end{matrix}\right.$$

أي يجب أن نبرهن صحة الاستعاضة السابق

فكرة الاتجاه $(\Longleftarrow)$ أخذ حالة خاصة

خاصة $x=z$ ثم $y=z$

$$d(x,z) \leq d(z,x) + 0$$

$$d(z,y) \leq d(z,y)$$

يمكننا أن نبدل شرط المتراجحة المعروفة بالشرطين M_1 و M_2 وهذا صحة السابقة

$\boxed{19|4}$ أوجد متتالية متقاربة من 0 دون أن تكون منتمية إلى أي فضاء ℓ^p

الدليل أن إيجاد متتالية من هذا السبيل

الرمز لكن متقاربة ... كافية

p: أي ...

$\boxed{20|5}$ أوجد متتالية منتمية إلى ℓ^p ولا تنتمي إلى ℓ^1 أي تنتمي إلى ℓ^p: $p > 2 \Leftarrow$

~~...~~ المتتالية $\frac{1}{n^p}$ متتالية

والمتسلسلة $\sum \frac{1}{n^p}$ متقاربة

عندما $p > 1$

ومتباعدة عندما

$p \leq 1$

$\boxed{20|6}$ بين أنه إذا كان $A \subset B$ فإن $\delta(A) \leq \delta(B)$

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

$$\delta(B) = \sup_{x,y \in B} d(x,y)$$

$\delta(B)$

A) أصغر لأن B محتوى فيها

التكملة 2 الطالب: مجرد تكملة لغوية

2015 / 12 / 1

المحاضرة الرابعة عشر - الثلاثاء

$\boxed{9|20}$. إذا كان $A\cap B\neq\emptyset$ فبيّن أن $D(A,B)=0$ ،، العكس صحيح ،، ماذا يمكن قوله عن العكس؟!

$A\cap B\neq\emptyset \Longrightarrow D(A,B)=0$ واضح

اما العكس غير صحيح ومثال على ذلك

$A=[1,2]$, $]2,4]=B$

$A\cap B=\emptyset$ لكن $D(A,B)=0$

$\boxed{11|21}$. إذا كان (X,d) فضاء متري فأثبت أن المسافة

$$\bar d(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

الشروط الثلاثة الأولى محققة

مراجعة الملف

$$\alpha\le\beta$$
$$\Rightarrow \alpha\beta+\alpha\le\alpha\beta+\beta$$
$$\alpha(\beta+1)\le\beta(\alpha+1)$$
$$\frac{\alpha}{\alpha+1}\le\frac{\beta}{\beta+1}$$

نحقق الخاصة السابقة

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

محققة لأن $d(x,y)$ هو فضاء متري ~~...~~

نعتبر أن $\alpha=d(x,y)$ و $\beta=d(x,z)+d(z,y)$

نصحح

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\le\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\le\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

نصغر الكسر: نصغر البسط ونكبر المقام

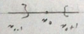
نكبر الكسر: نكبر البسط ونصغر المقام

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\le\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

$$\bar d(x,y)\le\bar d(x,z)+\bar d(z,y)$$

$\boxed{2|30}$ ما هي الكرة المفتوحة $B(x_0,1)$ في $\mathbb{R}$؟ وما هي في $\mathbb{C}$؟ وما هي في $C[a,b]$

في $\mathbb{R}$:



أي هو المجال المفتوح $]x_0-1,x_0+1[$

~~في $\mathbb{C}$~~ حيث

$d(x_0,x)<1$

$|x-x_0|<1$

$\Rightarrow -1<x-x_0<1$

ج. $\notin$. $d(x,x_0) < 1$

$x=(\xi,\eta)$

$x_0=(\xi_0,\eta_0)$

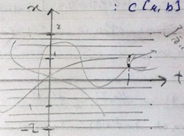
$\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2} < 1$

بتربيع الطرفين نحصل

معادلة .

القرص المفتوح $D(x_0,1)$

ج. $C[a,b]$:



أولاً: أخذنا المحور العمودي هو x

لأن دائماً العمودي هو محور التوابع

مثال توضيحي

$x\in B(1,1)$

التابع (1) ‏ العدد (1).

$d(x,1) < 1$

$\max|x(t)-1| < 1$

$1 < t \leq 1$

في المثال السابق أخذنا $x_0 = 1$

و قمنا بالرسم ما هي الكرة...

التكملة ع الرسم البياني

$\boxed{20|2}$ في الفضاء $C[0,2\pi]$ عيّن أصغر

عدد r بحيث $y\in\bar{B}(x,1)$ بفرض

أن $x(t)=\sin t$ و $y(t)=\cos t$

$y\in\bar{B}(x,r)$

$d(x,y)\leq r$

$\Rightarrow \max|\sin t-\cos t|\leq r$

بتحويلها إلى عبارة مثلثية نحصل

الجواب ... $\boxed{r=\sqrt{2}}$

$\boxed{31|7}$ صف اللصاقة لكل من المجموعات الآتية

• مجموعة الأعداد الصحيحة في $\mathbb{R}$

هي $\mathbb{Z}$ أي $\bar{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$

• مجموعة الأعداد العادية في $\mathbb{R}$

هي $\mathbb{R}$ أي $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

• مجموعة الأعداد العقدية إن أجزاؤها الحقيقية والعقدية أعداد عادية.

هي $\mathbb{C}$

• القرص $\{z \mid |z|<1\}\subset\mathbb{C}$

هي لصاقة قرص الواحدة المغلق

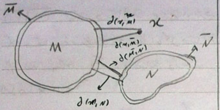
$\boxed{31|8}$ بين أن اللصاقة $\overline{B(x_0,r)}$ للكرة

المفتوحة $B(x_0,r)$ يمكن أن تكون

مختلفة عن الكرة المغلقة $\bar{B}(x_0,r)$

في فضاء متري X

ضمناً للتوضيح رسمنا بعد بين M و N
أو $\bar{M}$ و $\bar{N}$ بالحالة لا يهم



البرهان على جهة ② يكفي برهان أ
جهة ① لأن ① هي حالة خاصة من ②
من الواضح أن

$$d(\bar{M},\bar{N}) \le d(M,N)$$

للبرهان على الاحتواء المعاكس

$$\forall \bar{x} \in \bar{M},\ \bar{y} \in \bar{N}$$

$$\varepsilon > 0 : d(\bar{x},\bar{y}) < d(\bar{M},\bar{N}) + \varepsilon/3$$

من تعريف اللصاقة نستطيع إيجاد نقطة من M و نقطة من N بحيث:

$$\forall x \in M, y \in N : \begin{cases} d(x,\bar{x}) < \varepsilon/3 \\ d(y,\bar{y}) < \varepsilon/3 \end{cases}$$

$$d(M,N) \le d(x,y)$$

$$\le d(x,\bar{x}) + d(\bar{x},\bar{y}) + d(\bar{y},y)$$

$$\le d(\bar{M},\bar{N}) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow d(N,M) \le d(\bar{M},\bar{N})$$

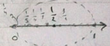
$$\Rightarrow d(N,M) = d(\bar{M},\bar{N})$$

$$X = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, \dots\}$$

$$x, y \in X$$

$$d(x,y) = |x-y|$$

نجد أن



~~$0,1 \notin B(\ldots)$~~

$0, 1 \notin B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ مفتوحة

لكن

$1 \in \bar{B}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ مغلقة

$1 \notin \overline{B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}$ لصاقة

$$\Rightarrow \bar{B}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \ne \overline{B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}$$

تمرين خارجي:

أثبت أن بعد x عن M
هو نفس بعد $\bar{x}$ عن $\bar{M}$
نميز حالتين أن تكون x نقطة أو أن تكون
مجموعة .. لكن نستطيع أن نقول عن x
إنها مجموعة وحيدة العنصر في حالات x
عنصر وبهذا البرهان للمجموعة يكفي
عن برهاننا عن نقطة وبعد عن مجموعة

① $d(x,M) = d(x,\bar{M})$ أي

هو نفسه البرهان

② $d(N,M) = d(\bar{N},\bar{M})$

2015/12/7

المحاضرة الخامسة عشر - الاثنين

$\boxed{1|41}$. x_n متتالية في فضاء متري X متقاربة وتتقارب من x بين أن كل متتالية جزئية منها تكون متقاربة وتكون النهاية x نفسها

$x_n \longrightarrow x$

$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}: n\geq N_0$

$d(x_n,x)<\varepsilon$

ولنأخذ المتتالية الجزئية x_{n_k} من x_n

$\varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}: n_k\geq N_0$

فعندما إن

$d(x_{n_k},x)<\varepsilon$

ومنه x_{n_k} متقاربة منه x

$\boxed{2|41}$ بين أنه إذا كانت x_n متتالية كوشية ووجدنا متتالية جزئية x_{n_k} متقاربة منه x فبين أن المتتالية x_n متقاربة ولها نفس النهاية

x_n كوشية

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}: n,m\geq N_1$

$d(x_n,x_m)<\varepsilon/2$

x_{n_k} متقاربة منه x

$\forall\varepsilon>0, \exists N_2\in\mathbb{N}: n_k\geq N_2$

$d(x_{n_k},x)<\varepsilon/2$

وباختيار

$n_0=\max\{N_1,N_2\}$

$\forall\varepsilon>0, \exists N_0: n\geq N_0$

$d(x_n,x)\leq d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)$

$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

ومنه $d(x_n,x)<\varepsilon$

أي x_n متقاربة منه x

$\boxed{4|41}$ بين أن كل متتالية كوشية محدودة

x_n كوشية

$\varepsilon>0: \exists N_0\in\mathbb{N}: n,m\geq N_0$

$d(x_n,x_m)<\varepsilon$

باختيار $\varepsilon=1$ نجد $d(x_n,x_m)<1$

وبجعل $n,m>n_0$

$\Rightarrow d(x_n,x_{n_0})<1$

$l=\max\{d(x_{n_0},x_1), d(x_{n_0},x_2)\dots$

$\dots d(x_{n_0},x_n)\}$

$\Rightarrow K(x_{n_0},M)$

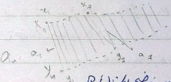
كرة تحوي جميع عناصر المتتالية حيث

$M=l+1$

$\boxed{5 \mid 41}$ هل يكفي أن تكون المتتالية محدودة حتى تكون كوشية في فضاء متري... هل يكفي ان تكون محدودة حتى تكون متقاربة؟

لا. لأن $\{(-1)^n\}$ متتالية محدودة وليست كوشية... وليست متقاربة

$\boxed{6 \mid 41}$ اذا كانت x_n و y_n متتاليتين لكوشي في فضاء متري (X,d) بين ان a_n متقاربة حيث $a_n = d(x_n,y_n)$



ترتيبا سنوضع المثال في $\mathbb{R}$:

بما أن a_n كوشية في $\mathbb{R}$ فستكون متقاربة لأن $\mathbb{R}$ فضاء تام...

لإثبات ان a_n كوشية

$\varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N} : n,m \geq N_0$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| < \varepsilon.$

نلاحظ

$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| < \dots$

$\dots \leq d(x_n,y_n) + d(x_m,y_m)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow |d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| < \varepsilon$

ملاحظة: هكذا أثبتنا

$d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)$

والباقي اذا الزمنا بإضافة x_n و y

بر مضاجه العلاقة وباعتنا بجزأين

$d(x_m,y_m) - d(x_n,y_n) < \varepsilon$

محصلة $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| < \varepsilon$

$\boxed{8 \mid 41}$ اذا كانت d_1, d_2 مترتين على مجموعة واحدة X ووجد عددان موجبان a,b بحيث تحقق المتباينة

$$a d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية ما كوشية في الفضاء (X,d_1) هي أن تكون كوشية في (X,d_2)

نفرض x_n كوشية بخصوص d_2

$\varepsilon>0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : n,m \geq N_0 : d_2(x_n,x_m) < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{a} > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : n,m \geq N_0 : d_1(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{a}$

محقق..

العكس ايضا "بنفس الطريقة"

$\boxed{5|1|1}$ ليكن a و b عددين حقيقين

بحيث $a<b$ أثبت أن الفترة $]a,b[$

هي فضاء جزئي غير تام من R في حين

أن الفترة المغلقة $[a,b]$ تامة

$a_n = a+\frac{1}{n}$; $b-a>0$.

$a_m = a+\frac{1}{m}$

$|a_m - a_n| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$

بدءاً من n_0 متتالية كوشية لكنها

غير متقاربة في الساحة $]a,b[$

$[a,b]$.

مجموعة مغلقة في فضاء تام حسب مبرهنة

سابقة. $\Leftarrow$ $[a,b]$ فضاء تام.

سؤال خارج عن المحاضرة ..

- كل كوشية محدودة

- كل كوشية وفيها جزئية متقاربة

تكون الكوشية متقاربة

حسب بولزانو فاير ستراس

تكون كل كوشية متقاربة !!

~~[illegible]~~

لكن يجب أن نعلم أن الكوشية لا تكون

متقاربة إلا في الفضاء التام ..

الجواب :

لأن بولزانو فاير ستراس قال هناك

نقطة تجمع للمتتالية لكن لم يجزم بوجودها

ضمن الفضاء و التقارب اليه ..

$\boxed{5|2|5}$ M فضاء جزئي من l^∞

مؤلفاً من كل المتتاليات $x=(\xi_i)$ التي

حدودها كل منها أصفار إلا عدد محدود

منها .. أوجد متتالية كوشية في M

غير متقاربة في M وبالتالي M غير تام

خذ المتتالية

$x_1 : 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

$x_2 : 1, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots$ هذه كوشية

$x_3 : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0, \ldots$

$x_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots$

x_{n+1} مؤلفة

$x_{n+1} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, 0, \ldots$

نهاية العمود الأول هي 1

$\frac{1}{2}$ " " الثاني هي

$\frac{1}{n}$ " " " هي

ناخذ متتالية كوشي

$x_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots$

ومن الحساب:

~~[illegible]~~

$d(x_n, x_{n+1}) = \sup |t_i - y_i| = \frac{1}{n}$

ومن الواضح انها كوشي متتالية ايضاً

ومن الواضح ان هذه المتتالية ليست من

M لأن حدودها الغير صفرية غير منتهية

يعني انها تؤول $\frac{1}{n}$ هي رتبة المتتالية

وينتج المطلوب

(5c|5) اثبت ان مجموعة كل الاعداد الصحيحة

المزودة بـ $d(n,m) = |n-m|$ تشكل فضاء متريا تاما

طريقة اولى: $X = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

ومعرف عليها نفس المترك

ومن مبرهنة سابقة يكون $\mathbb{Z}$

فضاء جزئي تام لانه مغلق

$\mathbb{Z}$ مغلقة لأن متممتها مفتوحة ؟

طريقة 2:

ناخذ كل المتتاليات الكوشية في $\mathbb{Z}$

حينئذ ستكون متتاليات ثابتة بدءا

من حد معين وكل ثابتة متقاربة

وبالتالي $\mathbb{Z}$ تام

(5214) أثبت ان M السابق ليس تاما

لأن العنصر x من اللصاقة ،، الانغلاق ،،

ولكن $x \in M$

$\Rightarrow \bar{M} \neq M$

وهذا M مغلق وحسب مبرهنة سابقة

يكون M غير تام