المحاضرة العاشرة:

حل المعادلة التكاملية الآتية بردها إلى معادلة تفاضلية عادية:

$$y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-s)\, y(s)\, ds$$

الحل: $\lambda = 1$, $k(s,x) = (x-s)$, $f(x,s) = (x-s) \cdot y(s)$, $f(x) = x - 1$

نشتق المعادلة التكاملية بالنسبة لـ x:

$$y'(x) = 1 + (1)(x-x)\, y(x) - (0)(x-0)\, y(0) + \int_0^x g(s)\, ds$$

$$\Rightarrow y'(x) = 1 + \int_0^x y(s)\, ds$$

$$y''(x) = y(x) \Rightarrow y''(x) - y(x) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية بدون طرف ثاني.

معادلتها المميزة: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 1$

وهما جذران حقيقيان مختلفان.

وبالتالي: $y_c(x) = y(x) = c_1 e^{x} + c_1 e^{-x}$

الثوابت c_1 ، c_2 يمكن إيجادهما حسب الشرط الابتدائي:

$y'(0) = -1 \quad \ldots (1)$

$$\Rightarrow y'(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = c_1 - c_2 \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) $\leftarrow$ $\boxed{c_1 + c_2 = -1}$ I

$y(0) = -1$
$y(0) = c_1 + c_2$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 1}$ II

من I و II نجد: $c_1 = 0$ و $c_2 = -1$

وبالتالي حل المعادلة التكاملية ...... $\boxed{y(x) = -e^{-x}}$

"تأكد من صحة الحل بالتعويض في المعادلة التكاملية".

Magic Book

/ /

تمرين: حل المعادلة التكاملية الآتية بردها إلى معادلة تفاضلية:

$$y(x) = ch(x) - \int_0^x sh(x-s) \cdot y(s)\, ds$$

الحل:

$$y'(x) = sh(x) - \int_0^x ch(x-s) \cdot y(s)\, ds$$

$$y''(x) = ch(x) - y(x) - \int_0^x sh(x-s)\, y(s)\, ds$$

$$\Rightarrow y''(x) = 0 \quad \wedge \quad y(x) = c_1 x + C_2$$

من الشروط الابتدائية نوجد C_1 و C_2:

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \Rightarrow y(x) = 1$$

تمرين: اوجد حل للمعادلة التكاملية بردها إلى معادلة تفاضلية:

$$y(x) = sh(x) - \int_0^x ch(x-s) \cdot y(s)\, ds$$

الحل:

$$y'(x) = ch(x) - (1)\, ch(x-x) \cdot y(x) - \int_0^x sh(x-s) \cdot y(s)\, ds.$$

$$\begin{cases} y'(x) = ch(x) - y(x) - \int_0^x sh(x-s) \cdot y(s)\, ds \\ y''(x) = sh(x) - y'(x) - \int_0^x ch(x-s) \cdot y(s)\, ds \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' + y' - y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية بأمثال ثابتة
نوجد المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad , \Delta = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

وحسب الشروط الابتدائية نوجد كلاً من C_1 و C_2.

Magic Book

/ /

تمرين. اوجد حل المعادلة التكاملية بردها الى معادلة تفاضلية:

$$y(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-s)\cdot y(s)\cdot ds$$

الحل:

$$y'(x) = e^x + \int_0^x \cos(x-s)\cdot y(s)\, ds$$

$$\Rightarrow y''(x) = e^x + (1)(\cos(x-x))\, y(x)) - \int_0^x \sin(x-s)\cdot y(s) ds$$

$$\Rightarrow y''(x) = e^x + y(x) - \int_0^x \sin(x-s)\cdot y(s)\, ds$$

$$y''(x) = e^x + y(x) + e^x - y(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y''(x) = 2e^x}$$

والحل العام لها ليس إلا حل عام بدون طرف ثاني + حل خاص مع طرف ثاني.

$$y''(x) = 0 \Rightarrow y_c(x) = \frac{1}{D^2}(2e^x) = 2\cdot\frac{1}{D^2}\cdot(e^x)$$

بما أن $\lambda = 1$ و λ ليست جذر لـ D نعوضه بدلاً من D

$$F(D)\cdot y = e^{\lambda x} \Rightarrow y_p(x) = \left[\frac{1}{F(D)}\right]\cdot e^{\lambda x}$$

إذا كانت λ ليست احد جذور المعادلة المميزة نبدل كل D بـ λ:

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{F(\lambda)}\cdot e^{\lambda x}$$

وإذا كانت λ احد جذور المعادلة المميزة فعندئذٍ نكتب:

$$F(D) = (D-\lambda)\cdot \varphi(D)$$

نبدل كل D بـ $D+\lambda$

نبدل كل D بـ λ

كثير حدود بالنسبة لـ D من المرتبة اقل درجة من مرتبة $F(D)$

$$\Rightarrow y_p(x) = 2\cdot\frac{1}{(1)^2}\cdot e^x = 2e^x$$

ومنه $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c_1 x + c_2 + 2e^{x}$$

نعين c_1 ، c_2 حسب الشروط الابتدائية لدينا.

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y(0) = c_2 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(0) = c_1 + 2 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = -1$$

نبدل كل من c_1 و c_2 بعبارة الحل العام:

$$\Rightarrow y(x) = -x - 1 + 2e^{x}$$

تمرين: حل المعادلة التكاملية التالية بردها إلى معادلة تفاضلية:

$$y(x) = e^{x} + \int_0^{x} y(s)\, ds$$

$$y'(x) = e^{x} + (1)\, y(x) + \int_0^{x} 0 \; y(s)\, ds$$

$$y'(x) = e^{x} + y(x) \Rightarrow y'(x) - y(x) = e^{x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات امثال ثابتة مع طرف ثاني.

وحلها العام بدون طرف ثاني هو:

$$y' - y = 0 \xrightarrow[\text{المميزة}]{\text{المعادلة}} \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\Rightarrow y_c(x) = c_1 e^{x}$$

والحل الخاص مع طرف ثاني باستخدام المؤثر التفاضلي:

$$[D-1]\, y = e^{x} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{D-1}(e^{x})$$

نلاحظ ان $\lambda = 1$ هو جذر للمعادلة المميزة لذلك نبدل كل D بـ $D+1$

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{D+1-1}\right)(e^{x}) = e^{x}\left(\frac{1}{D}(1)\right)$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x \cdot e^{x}$$

/ /

وبالتالي

$$y_p(x) = x \cdot e^x$$

والحل العام للمعادلة $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$$\Rightarrow y(x) = c e^x + x e^x$$

ونوجد الثابت c من الشروط الابتدائية ونعوضه بالحل العام.

طريقة ثانية لحل المعادلة $y'' - y' = 0$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \lambda = 1$$

وهما جذران حقيقيان مختلفان:

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2$$

والحل الخاص نوجده باستخدام المؤثر التفاضلي D:

$$(D^2 - D)\, y = e^x \Rightarrow y_p(x) = \left[\frac{1}{D(D-1)}\right] \cdot e^x$$

$\lambda = 1$ جذر للمعادلة المميزة نبدل كل D بـ 1 وكل D بـ $D+1$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^x \left[\frac{1}{D}(1)\right] = x e^x$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 + x e^x$$

وهو نفس الحل السابق

ملاحظة: ليس من الضروري أن نشتق مرتين للحصول على حل معادلة فولتيرا التكاملية - إذ يمكن أن نشتق أكثر من مرتين وذلك تبعاً للمترتبة.

تذكرة:

$$\cos(x+s) = \cos(x) \cdot \cos(s) - \sin x \cdot \sin(s)$$
$$\cos(x-s) = \cos(x) \cos(s) + \sin x \sin(s)$$
$$\sin(x+s) = \sin x \cos(s) + \cos x \sin(s)$$
$$\sin(x-s) = \sin x \cos(s) - \cos x \sin(s)$$

Magic Book

$$ch(x+s) = ch(x)\,ch(s) + ch(x)\,sh(s)$$

$$ch(x-s) = sh(x)\cdot ch(s) + ch(x)\cdot sh(s)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \, ds = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\, dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,.\,\sin(mx)\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,.\,\cos mx = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(mx)\, dx = 0$$

ملاحظة اولى : $e^{is} = \cos(s) + i\sin s$

$$e^{-is} = \cos(s) + (-1)\, i \sin s$$

$$\Rightarrow ch(x+is) = \frac{e^{x+is} + e^{-(x+is)}}{2} = \frac{e^{x}(\cos(s) + i\sin(s)) + e^{-x}(\cos(s) - i\sin s)}{2}$$

تبسيط هذه العبارة يترك كتمرين ...

$$- \sin(is) = \frac{e^{i(is)} - e^{-i(is)}}{2i} = -\left(\frac{e^{s} - e^{-s}}{2i}\right) = i\,ch(s)$$

انتهت المحاضرة ...