المحاضرة الثانية عشر - الاربعاء

2015/11/18

حل التمرين من المحاضرة السابقة

ايجاد الاحداثيات الكروية لعدد عقدي بالشكل الجبري

ليكن $\beta \in \mathbb{C}$ عشتي صورته النقطة $B(x_1, x_2, x_3)$ ممثلة لـ β في كرة ريمان

ان معادلة المستوي المار من $B(x_1, x_2, 0)$ والقطب الشمالي $N(0,0,1)$.

لتكن Q نقطة داخلة في المستوي حيث $Q(x, y, x_3)$ عناصر.

$\exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{NQ} = t \cdot \overrightarrow{NB}$

$(x, y, x_3 - 1) = t(x_1, x_2, -1)$

معادلات وسيطية $\Rightarrow$ $x = tx_1$, $y = tx_2$, $x_3 = 1 - t$

هنا المستوي NAB و Q تحقق معادلة الكرة ريمان أي:

$x^2 + y^2 + x_3^2 = 1$

$(tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (1-t)^2 = 1$

$t^2 x_1^2 + t^2 x_2^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$

$t(tx_1^2 + tx_2^2 - 2 + t) = 0$

اما: $t = 0$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$

او: $tx_1^2 + tx_2^2 - 2 + t = 0$

$t(x_1^2 + x_2^2 + 1) = 2$

$\Rightarrow t = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2\,Re\beta}{|\beta|^2 + 1}$

$x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2\,Im\beta}{|\beta|^2 + 1}$

$x_3 = 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$

$= \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2}{x^2 + y^2 + 1}$

$x_3 = \frac{|\beta|^2 - 1}{|\beta|^2 + 1}$

هذه هي الصيغة لايجاد الاحداثيات الكروية لعدد عقدي بمعلومية الاحداثيات الديكارتية

مثال: أوجد الاحداثيات الكروية للعدد β

$\beta = 1 + 3i$

$x_1 = \frac{2}{11}$

$x_2 = \frac{6}{11}$

$x_3 = \frac{9}{11}$

والآن لنكتب الاحداثيات الديكارتية لـ Ω بدلالة احداثياته الكروية

$$x_3 = 1 - t \Rightarrow t = 1 - x_3$$

$$x_1 = tx \Rightarrow x_1 = x(1-x_3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1}{1-x_3}$$

$$x_2 = ty \Rightarrow x_2 = y(1-x_3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x_2}{1-x_3}$$

برهان النظرية الحادية عشر

- نعين العلاقة بين المسافة الوترية والمسافة المكونة بين عددين عقديين

نعلم أن المسافة المكونة بين $\Omega, \Omega' \in \mathbb{C}_\infty$

$$d(\Omega, \Omega') = |\Omega - \Omega'|$$

حالة خاصة إذا كان $\Omega' = \infty$ فإن

$$d(\Omega, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|\Omega|^2}}$$

بينما المسافة الوترية:

$$d_1(\Omega, \Omega') = \ell([PP'])$$

حيث P, P' هما صورتا Ω, Ω' على الترتيب.

المطلوب إيجاد العلاقة بين d_1 و d

حيث $\Omega, \Omega' \in \mathbb{C}_\infty$

حالة $\Omega' \neq \infty$ و $\Omega \neq \infty$

$$d^2(\Omega, \Omega') = \ell^2[(PP')]$$

$$= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2$$

$P(x_1, x_2, x_3)$, $P'(x_1', x_2', x_3')$ حيث

$$d^2(\Omega, \Omega') = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')$$

$\in$ معكوسة P', P

$$d^2(\Omega\Omega') = 1 + 1 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')$$

حول هذه الأخيرة إلى كتابة بدلالة ذ ديكارتية -

$$= 2 - 2\left(\frac{4xx'}{(|\Omega|^2+1)(|\Omega'|^2+1)} + \frac{4yy'}{(|\Omega|^2+1)(|\Omega'|^2+1)} + \frac{(|\Omega|^2-1)(|\Omega'|^2-1)}{(|\Omega|^2+1)(|\Omega'|^2+1)}\right)$$

$$= 2 - 2\left(\frac{|\Omega|^2|\Omega'|^2 - |\Omega|^2 - |\Omega'|^2 + 1 + 4(xx'+yy')}{(|\Omega|^2+1)(|\Omega'|^2+1)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{|\Omega|^2|\Omega'|^2 + |\Omega|^2 + |\Omega'|^2 + 1 - |\Omega|^2|\Omega'|^2 + |\Omega|^2 + |\Omega'|^2 - 1 - 4(xx'+yy')}{(|\Omega|^2+1)(|\Omega'|^2+1)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2|\Omega|^2 + 2|\Omega'|^2 - 4(xx'+yy')}{(|\Omega|^2+1)(|\Omega'|^2+1)}\right)$$

$$= 4\left(\frac{|3|^2+|3'|^2-2(xx'+yy')}{(|3|^2+1)(|3'|^2+1)}\right) \quad (*)$$

نلاحظ أن:

$$2(xx'+yy') = 2\,Re(3.\bar{3}')$$
$$= 3.\bar{3}' + \bar{3}.3'$$

$$d_0^2(3,3') = |3-3'|^2 = (3-3')\overline{(3-3')}$$
$$= 3\bar{3} - 3'\bar{3}' - 3\bar{3}' - 3'\bar{3}$$
$$= |3|^2 + |3'|^2 - 2(xx'+yy')$$

نعوض في (*)

$$\Rightarrow d_1^2(3,3') = \frac{4\,d^2(3,3')}{(|3|^2+1)(|3'|^2+1)}$$

$$d_1(3,3') = \frac{2\,d(3,3')}{\sqrt{(|3|^2+1)(|3'|^2+1)}}$$

الحالة المناسبة $3 = 3' = x$ $\Leftarrow P = P' = N$

$$d_1(3,3') = \ell([NN]) = 0$$

الحالة المختلفة $3' = x$ ، $3 \in \mathbb{C}$

$$d_1(3,3') = d_1^2(3,x) = \ell^2([PN])$$
$$= (x_1-0)^2 + (x_2-0)^2 + (x_3-1)^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 1$$
$$= 1 - 2x_3 + 1$$
$$= 2(1-x_3)$$
$$= 2\left(1 - \frac{|3|^2-1}{|3|^2+1}\right)$$
$$= \frac{4}{|3|^2+1}$$

$$\Rightarrow d_1(3,x) = \frac{2}{\sqrt{|3|^2+1}}$$

ملاحظات:

* لو أخذنا $3 = 0$ أي شعاعي طيلة؟ فسيكون 2 "قيمة من عظم" لسنا وكتوب.

- ان مقلوب الاستواء الحدي هو كرة ريمان
- ان الاستواء الحدي هو تقابل شاذ الاستواء (هو موجود فقط)
- ان تقابل شاذ الاستواء هو تقابل وتقابل عكسي وكلاهما مستمر

هذا الاستواء الحدي هو تكبير محدود ثم متوحد
تقابل شاذ الاستواء يطور المتوحد متوحد
ستمر هو أي حوار لا هو حوار الأرثية

ع المستوي