مبرهنة: كل فضاء جزئي منته البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً وبوجه خاص كل فضاء منظم منته البعد تام.

البرهان

ملاحظة: المبرهنة السابقة تعطينا فكرة انه اذا طلب منا ايجاد فضاء منظم غير تام يجب أن نفكر بالفضاءات الغير منتهية البعد

البرهان: ليكن $(X, \|.\|)$ فضاء منظم وليكن Y فضاء جزئي من X حيث $\dim Y = n$.

ولتكن $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشية في Y ولدينا $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة تولد الفضاء Y. عندئذ يكون لكل y_m تمثيل وحيد

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

و y_m كوشية وعليه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall m,r \geq N_0 : \|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}) e_i\right\| < \varepsilon$$

وحسب مبرهنة التراكيب الخطية

$\exists c,\ m,r \geq N_0$

$\varepsilon > 0$

$$\varepsilon > \left\|\sum (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}) e_i\right\| \geq c \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}|\right)$$

$$\varepsilon > 0; \exists N_0 \in \mathbb{N}, m,r \geq N_0 : |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| \leq \frac{\varepsilon}{c} \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

هذا يعني أنه يوجد n متتالية متقاربة في $\mathbb{R}$ جزء كوشية في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

ولنرمز بـ α_i بالنهايات

$$y_1 : \alpha_1^{(1)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(1)} e^n$$

$$\vdots$$

$$y_r : \alpha_1^{(r)} e_1 + \alpha_2^{(r)} e_2 + \cdots + \alpha_n^{(r)} e^n$$

ملاحظة: ان متتالية العمود الأول كوشية

$$\alpha_1^{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_1$$

نسمي العنصر y المرتبط بالأعداد

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

2015 / 12 / 15

المحاضرة الثامنة عشر [illegible]

$$\|y_m - y\| = \|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i) e_i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \|e_i\| \to 0$$

وبالتالي $y_m \to y$

بداية المحاضرة الثامنة عشر

برهنه

- كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون مغلق

- ليس لزاماً من الفضاءات الجزئية في المبرهنة الابعاد أن يكون مغلق

- أي فضاء جزئي منتهي الابعاد يكون فضاء مغلق

// نهاية البرهان //

- ~~[illegible]~~

أي ليس بالضرورة أن تكون الفضاءات الجزئية غير منتهية البعد أن تكون مغلقة

مثال على ذلك

الفضاء $X = C[0,1]$ و

$Y = \mathrm{Span}\{x_0, \dots, x_n\}$ حيث

$x_i(t) = t^i$

ملاحظة: هو Span هو مجموعة كل التراكيب الخطية

البرهان: نريد اثبات أن Y غير مغلق.

نأخذ متتالية من هذا الفضاء لا تملك نهاية في هذا الفضاء، فسيكون عندها الفضاء الجزئي غير مغلق لأن المجموعة المغلقة تحوي نهاياتها ..

$x_0 = 1$

$x_1 = 1 + \frac{t}{1!}$

$\vdots$

$x_n = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$

هذه تشبه المتتالية المجاميع الجزئية لـ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow e^x$$

وهو لا ينتمي لـ Y ومنه Y غير مغلق وهو منتهي البعد

ملاحظة:

$e^x \in C[a,b]$ لأنه مستمر

$e^x \notin Y = \mathrm{Span}(\dots)$ لأن الـ Span هو كل التراكيب الخطية لكن هذه التراكيب ستكون منتهية، ولكن e^x هنا منشور، غير منتهي ومنه $e^x \notin \mathrm{Span}(x_0 \dots x_n)$

* النظائم المتكافئة

نقول عن النظيمين المعرفين على نفس الفضاء X ويكن أي

$$(X, \|\cdot\|_1), \quad (X, \|\cdot\|_2)$$

نقول عن النظيمين انهما متكافئين اذا وجد ثابتين موجبين α و β حيث

$$\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$$

أي المتتالية الكوشية بالنسبة $\|x\|_2$ أي المتقاربة بـ $\|x\|_2$ ستكون كوشية أيضا بـ $\|x\|_1$ والمتقاربة أيضا سيكون لها نفس الغاية بلا شك .. الخ

ملاحظة هامة:

أي نظيمان متكافئان على X تبولوجي واحدة على X

مبرهنة النظائم المتكافئة:

كل نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء معياري منتهي البعد X يكافئ أي نظيم آخر $\|\cdot\|_0$ على X.

البرهان

نفرض أن $\dim X = n$ والنظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ على X

ونفرض $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة للفضاء X

$\forall x \in X$: ~~$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots$~~

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

وحسب مبرهنة التراكيب الخطية

$$\|x\| \ge C(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$$

$$\ge C\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) \quad ①$$

ولدينا

$$\|x\|_0 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|_0$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\|_0$$

$$\le K \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \quad ②$$

حيث $K = \max \|e_i\|_0$

وبملاحظة ① و ② نجد

$$\frac{1}{K} \|x\|_0 \le \frac{1}{C} \|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\|_0 \le \frac{K}{C} \|x\|$$

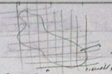
$$\|x\|_0 \le a \|x\|$$

بنفس الطريقة نجد أن

$$\|x\|_0 \ge b \|x\|$$

وبالتالي المعيارين متكافئين على X

تحقيق عن التراص:

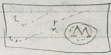


⊕ التراص:

طبولوجيا:

ما كل تغطية مفتوحة يوجد تغطية جزئية منتهية

مترياً:



نقول عن X انه متراص
إذا حوى كل متتالية
في X. متتالية جزئية متقاربة

(X, d)

ونقول عن مجموعة جزئية M في X انها متراصة
اذا حوت كل متتالية في M متتالية جزئية
متقاربة في M "أي اذا كانت M متراصة".

حل التمارين ص 52

$\boxed{52 \mid 6}$ ~~مثال المجموعة~~

بين أن $\mathbb{R}$ مجموعة كل الاعداد الحقيقية المزودة بالتابع
d المحدد بالمساواة

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$$

تشكل فضاء متري غير تام؟

- من السهل البرهان على انه متري
- نأخذ المتتالية الكوشية

$$x_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq N_0$$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ؟! هل هذا صحيح
سنرى

$$d(x_n, x_m) =$$
$$= \left|\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)\right) - \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}\right)\right)\right|$$
$$= \left|\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

حسب ارخميدس يمكن جعل الفرق ε
وبالتالي x_n كوشية...
انتبه اذا صعب عليكم الطالب..

ملاحظة هامة جداً: كما لا بد من إنها غير متقاربة
بالنسبة للمترك الذي لدينا مثلاً

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \cancel{x}$$

هذا مجرد رمز لا يعني إن دائما سنأخذ
التقارب بهذا الشكل ... فهذا الرمز يعني
إن لأي متتالية هي متقاربة لكن حق
نرى المترك الذي لدينا ولذلك لا نقول
$x_n \to \infty$ وبالتالي (∞) هي نهاية
هذا هام

52|7 ليكن X مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبة و $d(m,n) = |m^{-1} - n^{-1}|$
اثبت ان (X, d) فضاء غير تام

نأخذ المتتالية $x_n = n$
هذه المتتالية كوشية بالنسبة للمترك السابق. (الاثبات واضح جدا)

ملاحظة:
المتتالية السابقة ليست كوشية في $\mathbb{R}$ أي ليست كوشية بالكلمة العامة ولكن كوشية بخصوص المترك الموجود لدينا ولذلك يجب التركيز والانتباه الى هذه الفكرة

52|8 اثبت ان الفضاء الجزئي X من $C[a,b]$ المؤلف من كل الدوال المحققة للشرط $X(a) = X(b)$ هو فضاء تام

ملاحظة: بالكتاب مكتوب اثبت انه غير تام لكن هو تام

نأخذ متتالية x_n كوشية في Y ستكون كوشية في $C[a,b]$

وبما ان الفضاء $C[a,b]$ تام فإن المتتالية x_n الكوشية ستكون متقاربة في $C[a,b]$ وليكن $x_n \to x$
يجب ان نبرهن ان $x \in Y$
ينتج المطلوب .. مع التفاصيل

ملاحظة مهمة جدا جدا
عندما نذكر الفضاء $C[a,b]$ فورا نفكر بالمترك max ولا نفكر بمترك التكامل الا اذا ذكر ذلك أي اذا لم يذكر أي مترك على $C[a,b]$ سنعتبره الـ max ..

كما في $\mathbb{R}$ عندما نذكر الفضاء $\mathbb{R}$ فورا يذهب تفكيرنا الى المترك الصيغة المطلقة المألوفة على $\mathbb{R}$

19|4
أوجد متتالية متقاربة من 0 دون ان تكون منتمية الى أي فضاء ℓ^p
حيث $1 \le p < +\infty$

$1, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}}, \dots \dots \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}$

2^2 مرة　　3^3 مرة　　n^n مرة

$x_n \to 0$

الذي يجب ان يتحقق ان

$\sum |\xi_i|^p > \infty$

يمكن اخذ المثال $\sum |\frac{1}{k_n}|^p > \infty$

$\boxed{2(11)}$ اثبت ان مجموعة كل الاعداد الحقيقية المزودة بعمليتي الجمع والضرب العاديتين تشكل فضاء متجهي حقيقيا وما هو البعد

من الواضح انه متجهي

وما هو البعد أي ان الفضاء هنا متساوي يوجد عدد لا يمكن توليد كامل R من هذا الفضاء

(1): هو متجه يمكن توليد R منه

يوجد عدد غير صفر يمكن توليد R منه

مثلا $\frac{17}{13}$ هو متجه في R ويمكن توليد كامل R منه

مثلا $K \cdot \frac{17}{13} = 10^6$

[illegible] R

$\boxed{2(13)}$ جد Span المجموعة M في R^3

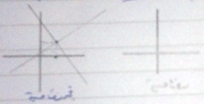
$M = \{(1,1,1),(0,0,2)\}$

ملاحظة الحل

Span $n = \{(0,1),(1,0)\}$

هي R^2 و R^1

ونستطيع اخذ $\{(1,1),(0,1)\}$ كمجموعة غير متعامدة ... الاكثر من العادي



$\boxed{2(14)}$ جد أي من هذه المجموعات تشكل فضاء جزئي في R^3

(أ) مجموعة كل المتجهات [illegible]

$\xi_3 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \xi_2$

عندما قلنا ان $\xi_3 = 0$ بانت [illegible] بالمستوي و عندما قلنا ان $\xi_1 = \xi_2$ هو [illegible]