/ /

المحاضرة السابعة

تمرين: باستخدام النواة الحالة اوجد حل المعادلة التكاملية:

$$g(x) = ch(x) + \int_0^x \frac{ch\,x}{ch\,s} \cdot g(s)\, ds$$

الحل:

$$F(x) = ch(x) \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad k(x,s) = \frac{ch(x)}{ch(c)}$$

$$k_1(x,s) = k(x,s) = \frac{ch(x)}{ch(c)}$$

$$k_2(x,s) = \int_s^x k(x,\tau)\, k_1(\tau,s)\, d\tau = \int_s^x \frac{ch(x)}{ch(\tau)} \cdot \frac{ch(\tau)}{ch(s)} \cdot d\tau$$

$$\Rightarrow k_2(x,s) = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot (x-s)$$

$$k_3(x,s) = \int_s^x k(x,\tau) \cdot k_2(\tau,s)\, d\tau = \int_s^x \frac{ch(x)}{ch(\tau)} \cdot \frac{ch(\tau)}{ch(s)} (\tau - s)\, d\tau$$

$$\Rightarrow k_3(x,s) = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot \frac{(x-s)^2}{2!}$$

$$k_4(x,s) = \int_s^x k(x,\tau) \cdot k_3(\tau,s)\, d\tau = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot \frac{(x-s)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$k_m(x,s) = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$

وبالتالي نواة الحالة هي:

$$R(x,s,\lambda) = k_1(x,s) + \lambda k_2(x,s) + \lambda^2 k_3(x,s) + \dots$$

$$R(x,s,\lambda) = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot \left[1 + (x-s) + \frac{(x-s)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right]$$

$$R(x,s,\lambda) = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-s)^m}{m!} = \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot e^{(x-s)}$$

وهذه المتسلسلة متقاربة دوماً وبالتالي فإن حل المعادلة التكاملية هو

$$g(x) = ch(x) + \int_0^x \frac{ch(x)}{ch(s)} \cdot e^{(x-s)} \cdot \underbrace{ch(s)}_{f(s)} \, ds$$

$$g(x) = ch(x) + e^x ch(x) \int_0^x e^{-s} \, ds$$

$$g(x) = ch(x) + e^x \cdot ch(x) \left[e^{-s} \right]_0^x$$

$$g(x) = ch(x) + e^x ch(x) \left(-e^{-x} + 1 \right)$$

$$g(x) = ch(x) - ch(x) + e^x ch(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = e^x ch(x)$$

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض الحل بالمعادلة التكاملية.

تمرين: باستخدام النواة الحالة اوجد حل للمعادلة التكاملية الآتية:

$$g(x) = e^x \cdot \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)} \cdot g(s) \, ds$$

الحل:

$$f(x) = e^x \cdot \sin x, \quad \lambda = 1, \quad k(x,s) = \frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)}$$

$$k_1(x,s) = k(x,s) = \frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)}$$

$$k_2(x,s) = \int_s^x k(x,s) \cdot k_1(x,s) \, ds = \int_s^x \left(\frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)} \cdot \frac{2+\cos(\tau)}{2+\cos(s)} \right) d\tau$$

$$k_2(x,s) = \frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)} \cdot (x-s)$$

$$k_3(x,s) = \frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)} \cdot \frac{(x-s)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$k_m(x,s) = \frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)} \cdot \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$

/ /

$$R(x,s,\lambda=1)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)}\cdot\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$R(x,s,\lambda=1)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)}\cdot\frac{(x-s)^{m}}{m!}=\frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)}\cdot e^{(x-s)}$$

المتسلسلة دوماً متقاربة فهي تمثل دالة كليلية حيث $\lambda=1$

$$\Rightarrow g(x)=e^{x}\cdot\sin x+\int_{0}^{x}\frac{2+\cos(x)}{2+\cos(s)}\cdot e^{(x-s)}\cdot\underbrace{e^{s}\cdot\sin(s)}_{f(s)}\,ds$$

$$g(x)=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}(2+\cos(x))\int_{0}^{x}\frac{\sin(s)}{2+\cos(s)}\cdot ds$$

$$g(x)=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}(2+\cos x)\left[-\ln(2+\cos(s))\right]_{0}^{x}$$

$$g(x)=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}(2+\cos(x))\left(-\ln(2+\cos x)+\ln 3\right)$$

$$\Rightarrow g(x)=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}(2+\cos x)\ln\left(\frac{3}{2+\cos(x)}\right)$$

وهو حل المعادلة التكاملية..

ملاحظة:

نلاحظ انه عند استخدام طريقة النواة الحالة في حل معادلة فولترا التكاملية قد يكون من الصعب إن لم يكن من المستحيل حساب مثل هذه التكاملات بالطريقة التقليدية او الكلاسيكية إذ أن حسابها تتطلب وقتاً وجهداً كبيراً ، لذلك نلجأ لطريقة التقريب المتالي ونوجد حل المعادلة التكاملية عند اي قيمة ابتدائية ومن ثم نشكل متوالية الحل التكراري فإذا تحققت جميع شروط التكرار فحتماً متوالية الحل تتقارب من قيمة ما (مبرهنة النقطة الثابتة - باناخ) ونعتبرها القيمة التقريبية للحل

كذلك يمكن حل اي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى من الشكل ① ... $y'=f(x,y)$ والخاضعة للشرط الابتدائي $y(x_0)=y_0$ وتدعى مسألة كوشي او مسألة القيمة

الابتدائية ، فبدءاً من الشرط الابتدائي نستطيع ان نشكل متوالية الحل التكراري كما فرضنا ان الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق وكذلك شرط وجود الحل محقق ومنه فإن متوالية الحل التكراري علينا ايجادها من العلاقة:

$$y(x) = y(x_0) + \int_0^x f(x, y_{n-1}(x))\, dx \quad : n=1,2,\dots$$

وهي ليست إلا معادلة فولتيرا التكاملية ضمن الحل لاي قيمة لـ x ضمن مجال ما وليكن $I=[a,b]$ واذا افترضنا x_0 هي a فعندئذٍ نجد ان متوالية الحل تتقارب من الحل النهائي الذي يعتبر حل عند نقطة معينة.

مثال على ذلك (معادلة سابقة لم تُحل):

استخدم طريقة الحل التكراري في ايجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$y'(x) = 0.133\,(x^2 + \sin(2x)) + 0.872\, y$$

حيث $y(0)=0.1$ عند $x=0.1$

الحل:

$$y'(x) - 0.872 \cdot y(x) = 0.133\,(x^2 + \sin(2x))$$

من الشكل: $y' + p(x)\, y(x) = Q(x)$

$$y_n(x) = 0.1 + \int_0^x [0.133(x^2 + \sin 2x) + 0.872\, y_{n-1}(x)]\, dx$$

حيث $n=1,2,\dots$ رقم التكرار

$$n=1 \Rightarrow y_1(x) = 0.1 + \int_0^x [0.133(x^2 + \sin 2x) + 0.872 \cdot \overset{0.1}{y_0}]\, dx$$

$$\Rightarrow y_1 = y(x=0.1) =$$

ونتابع من اجل $n=2$ و $n=3$ و ..... فنحصل على متوالية من القيم حتماً هذه المتوالية متقاربة من نقطة وهي تمثل حل للمعادلة التفاضلية عند $x=0.1$.

ملاحظة:

! ان الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية السابقة هو (حل عام بدون طرف ثاني + حل خاص مع طرف ثاني)

انتهت المحاضرة...