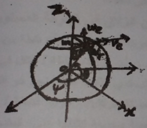
تمارين محلولة

(١)

تمريـــن(١): نقطـــة مادية تتحرك على خط طول من الشمال إلى الجنوب على سطح الكرة الأرضية بسرعة ثابتة v فإذا افترضنا أن محور الأرض ثابت . يطلب تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M .

الحل: طريقة أولى : إن الحركة النسبية هي حركة النقطة M على محيط دائرة مركزها مركز الأرض o ونصف قطرها $R=$ نصف قطر الكرة الأرضية ، وهي حركة دائرية منتظمة سرعتها الزاوية ثابتة تساوي $\omega_r = \dfrac{v}{R}$



الشكل(١٩)

أي أن شـــعاع السرعة النسبية هو شعاع مطبق في M ويحمل على مماس الدائرة (o, R) وقيمته v ويتجه وفق الحركة النسبية من الشمال إلى الجنوب.

الحـــركة الجرية هي حركة النقطة M مع الكرة حول محور ثابت هو محور الكرة الأرضية وليكـــن oz_1 وهـــي حركة دورانية منتظمة سرعتها الزاوية $\omega_e = \dfrac{2\pi}{24\times 3600}$، و شعاع السـرعة الجرية يحمل على مماس دائرة عرض مركزها m (على محور الكرة الأرضية) ونصـــف قطرها $r = \overline{mM}$ ، وقيمته $= \omega_e . r$ وجهته باتجاه دوران الأرض (من الغرب إلى الشرق)

وتكون السرعة المطلقة بالتالي هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{V_e}$, $\overrightarrow{V_r}$

أما التسارع المطلق فهو محصلة ثلاثة أشعة $\vec{\Gamma_r}$, $\vec{\Gamma_e}$, $\vec{\Gamma_c}$

$\vec{\Gamma_r}$ التسارع النسبي هو تسارع ناظمي لأن الحركة النسبية دائرية منتظمة فهو شعاع يحمل على $\vec{Mo}$ وقيمته $|\Gamma_r| = v^2 R = \omega_r^2 . R$ ويتجه نحو o

$\vec{\Gamma_e}$ التسارع الجري وهو بدوره تسارع ناظمي يحمل على $\vec{Mm}$ وقيمته $\omega_r^2 . r$

أما التسارع المتمم $\vec{\Gamma_c}$ فهو كما نعلم : $\vec{\Gamma_c} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V_r}$ فهو شعاع يعامد كلاً من $\vec{\omega_e}$ الذي يحمل على محور الأرض ، $\vec{V_r}$ المماس لدائرة الطول فهو يعامد مستوي دائرة الطول أي يعامد $M\,m$ لذا فهو يحمل على مماس دائرة العرض أي يوازي $\vec{V_e}$ وقيمته $2\omega_e v \sin\theta$ حيث θ الزاوية المتممة لـ α التي يصنعها oM مع محور الأرض . وجهته تتعين من الجداء الخارجي $\vec{\omega}_e \times \vec{V_r}$.

والتسارع المطلق بالتالي هو محصلة الأشعة الثلاث السابقة

طريقة ثانية : نختار جملة احداثية ديكارتية قائمة مباشرة متماسكة مع محور الأرض مركزها الكرة الأرضية ولتكن $ox_1y_1z_1$ ونختار جملة احداثية متحركة مع الكرة الأرضية بحيث ينطبق oz على oz_1 ويقع ox في مستوي دائرة الطول للنقطة M , oy يعامد مستوي هذه الدائرة ولنعين مركبات $\vec{V_r}$, $\vec{V_e}$, $\vec{V_a}$ على الجملة $o\,x\,y\,z$ فنجد:

$$\vec{V_r} = (0,\omega_r,0) \times (x,0,z) = \omega_r\, z\, \vec{i} - \omega_r\, x\, \vec{k}$$

حيث $x = R\cos\theta$ $\quad y = R\sin\theta$ $\quad \theta = \omega_r t$ باختيار مناسب لشروط البدء

و
$$\vec{V_e} = (0,0,\omega_e) \times (x,0,z) = \omega_e\, x\, \vec{j}$$

والسرعة المطلقة
$$\vec{V_a} = \omega_r\, z\, \vec{i} + \omega_e x \vec{j} - \omega_r\, x \vec{k}$$

ولنعين مركبات التسارع المطلق على الجملة $x\,y\,z$ فنكتب

$$\vec{\Gamma_r} = -\omega_r^2\, \vec{oM} = -\omega_r^2\, x\, \vec{i} - \omega_r^2\, z\, \vec{k} \quad , \quad \vec{\varepsilon_r} = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma_e} = -\omega_e^2\, \vec{mM} = -\omega_e^2\, x\, \vec{i} \quad , \quad \vec{\varepsilon_e} = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma_c} = 2(0,0,\omega_e) \times (\omega_r z\, ,\, 0\, ,\, -\omega_r x) = \omega_e\, \omega_r\, z\, \vec{j}$$

فنجد
$$\vec{\Gamma_a} = -x(\omega_r^2 + \omega_e^2)\, \vec{i} + \omega_e\, \omega_r z\, \vec{j} - \omega_r^2\, z\, \vec{k}$$

ملاحظة(١) : كان بالإمكان إيجاد مركبات $\vec{\Gamma_a}$ بتطبيق دساتير بور.

ملاحظة (٢) : يمكن تعيين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق علىجملة المحاور الثابتة $ox_1y_1z_1$ بملاحظة أن:

$$\vec{i} = \cos\psi\ \vec{i_1} + \sin\psi\ \vec{j_1}$$
$$\vec{j} = -\sin\psi\ \vec{i_1} + \cos\psi\ \vec{j_1}$$
$$\vec{k} = \vec{k_1}$$

$\psi = (\widehat{ox, ox_1})$ و $\psi = \int \omega_e\, dt = \omega_e t$ باختيار مناسب لمبدأ الزمن.

تمرين(٢) : $o_1x_1y_1$ محوران متعامدان في مستو ثابت ، مستقيم Δ يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها o_1 نصف قطرها $1 = l$ بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة c نقطة تماس المستقيم Δ مع الدائرة $(o_1,1)$ ثابتة وتساوي ω. M نقطة مادية تتحرك على المستقيم Δ بحركة منتظمة سرعتها v = ثابتة ، كان المستقيم Δ في لحظة البدء ماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت M في النقطة A في لحظة البدء أيضاً والمطلوب :

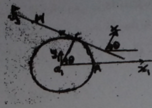
١- تعيين الاحداثيات المطلقة للنقطة M (بالنسبة لجملة المحاور ox_1y_1) أي معادلات الحركة المطلقة لـ M

٢- تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M

٣- تعيين العلاقة التي تربط v بـ ω كي يكون $\overrightarrow{\Gamma_e}$ محمولاً على Δ .

الحل: إن حركة M هي محصلة حركتين حركة نسبية وهي حركتها على المستقيم Δ وحركة جرية مع Δ وهي حركة مستوية . بما أن حركة Δ تتدحرج دون انزلاق فإن نقطة التماس c هي المركز الآني للدوران في الحركة المستوية : نختار النقطة o مبدأ الاحداثيات المتماسكة مع Δ النقطة من Δ التي كانت في A لحظة البدء . فمن شرط التدحرج دون انزلاق نلاحظ أن المسافة التي تقطعها نقطة التماس c (المركز الآني للدوران) على المستقيم Δ (وهو المتدحرج) تساوي المسافة التي تقطعها النقطة c على الدائرة $(o_1,1)$ (القاعدة) أي أن طول $\overline{oc}$ يساوي طول القوس $\widehat{Ac}$ فإذا سمينا الزاوية بين o_1c و o_1x_1 θ كان لدينا $\overline{oc} = \widehat{Ac} = \theta$ (لأن نصف قطر الدائرة $= 1$) نختار المحور oy منطبقاً على Δ والمحور ox العمود على Δ في النقطة o .

4



الشكل(٢٠)

لتعيين موضع النقطة M نكتب:

$$\left|\overrightarrow{oM}\right| = \int v\,dt = vt \qquad , \qquad \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM} \qquad (1)$$

نسقط هذه العبارة الشعاعية على المحورين o_1x_1 ، o_1y_1 فنجد :

$$y_1(M) = \sin\theta - \theta\cos\theta + ut\cos\theta \qquad , \qquad x_1(M) = \cos\theta + \theta\sin\theta - vt\sin\theta$$

ولما كانت السرعة الزاوية لـــ $\omega = c \;\Leftarrow\; \theta = \omega t$ (بملاحظة شروط البدء المعطاة)

ومنه

$$x_1(M) = \cos\omega t + (\omega - v)t\,\sin\omega t$$

$$y_1(M) = \sin\omega t - (\omega - v)t\,\cos\omega t$$

وهي معادلات الحركة المطلقة للنقطة M .

٢- لتعيين السرعة والتسارع المطلقين ، يكفي اشتقاق x_1 ، y_1 بالنسبة للزمن ونكتب

$$\overrightarrow{V_a} = x_1'\,\overrightarrow{i_1} + y_1'\,\overrightarrow{j_1} \qquad , \qquad \overrightarrow{\Gamma_a} = x_1''\,\overrightarrow{i_1} + y_1''\,\overrightarrow{j_1}$$

لنعين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق على المحاور oxy المتحركة .

إن السرعة النسبية لـــ M هي : $\overrightarrow{V_r} = v\,\vec{j}$

والسرعة الجرية لـــ M هي : $\overrightarrow{V_e} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{cM}$

إن $\omega = \theta'$ لأن θ الزاوية التي يصنعها المستقيم ox من المستوي المتحرك مع المستقيم o_1x_1 مـــن المستوي الثابت وتساوي وضوحاً الزاوية بين o_1c ، o_1x_1 ونعين مركبات $\overrightarrow{cM}$ كما يلي :

$$\overrightarrow{cM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{Oc} = (vt - \theta)\,\vec{j}$$

ومنه

$$\overrightarrow{V_e} = (0, 0, \omega) \times (0, (v - w)t, 0) = -\omega(v - \omega)\,t\,\vec{i}$$

والسرعة المطلقة بالتالي هي :

$$\overrightarrow{V_a} = -\omega\,(v - \omega)\,t\,\vec{i} + v\,\vec{j}$$

تعيين التسارع : لنعين التسارع المطلق بطريقة تركيب الحركات فنكتب

$\overrightarrow{\Gamma_r}$ هو التسارع في حركة M النسبية ، وهي حركة مستقيمة منتظمة أي $\overrightarrow{\Gamma_r}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\Gamma_e}$ هو التسارع في حركة M الجرية وهي حركة مستوية ويمكن أن يحسب كما يلي:

$$\overrightarrow{\Gamma_e} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{cM}\right) = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{cM} + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\overrightarrow{cM}}{dt}\right)$$

ولدينا $\vec{\varepsilon}=\vec{0}$ لأن $\vec{\omega}$ ثابت و

$$\frac{d\overrightarrow{cM}}{dt} = \vec{V_e}(M) - \vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ سرعة انتقال c على القاعدة أو على المتدحرج

ومنه

$$\frac{d\overrightarrow{cM}}{dt} = -\omega(v-\omega)t\,\vec{i} - r\theta'\,\vec{j} = -\omega(v-\omega)t\,\vec{i} - \omega\,\vec{j}$$

وبالتعويض نجد

$$\overrightarrow{\Gamma_e} = (0,0,\omega)\times(-\omega(v-\omega)t, -\omega, 0) = \omega^2\,\vec{i} - \omega^2(v-\omega)t\,\vec{j}$$

ولنحسب أخيراً التسارع المتمم من العلاقة

$$\overrightarrow{\Gamma_c} = 2\overrightarrow{\omega_e}\times\overrightarrow{V_r} = 2(0,0,\omega)\times(0,v,0) = -2\omega v\,\vec{i}$$

ويصبح التسارع المطلق :

$$\overrightarrow{\Gamma_a} = (\omega^2 - 2\omega v)\,\vec{i} - \omega^2(v-\omega)t\,\vec{j}$$

ملاحظة (١) : كان بالامكان الحصول على مركبات $\overrightarrow{\Gamma_a}$ على المحاور oxy من دساتير بور أي من اسقاط العلاقة :

$$\overrightarrow{\Gamma_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\right|_M + \overrightarrow{\omega_e}\times\overrightarrow{V_a}$$

فنجد :

$$= (-\omega(v-\omega),\ 0,\ 0) + (0,0,\omega)\times(-\omega(v-\omega)t,\ v,0)$$

$$= (-2v\omega+\omega^2)\,\vec{i} - \omega^2(v-\omega)t\,\vec{j}$$

وهي القيمة التي حصلنا عليها سابقاً

ملاحظة (٢) : يمكن الحصول على هذه المركبات أيضاً من اسقاط $\vec{i_1}, \vec{j_1}$ على المحاور ox, oy .

٤) كي يحمل $\overrightarrow{\Gamma_a}$ على Δ يجب أن تكون المركبة على x معدومة لذا نكتب

$-2\omega v + \omega^2 \Rightarrow \omega = 2v$

وهي العلاقة مطلوبة

تمارين

١- يتحرك مستو مائل زاوية ميله على الأفق تساوي a بحركة انسحابية على مستو أفقي ، ويرفع أثناء حركته قضيباً مستقيماً يستند عليه شاقولياً نحو الأعلى، والمطلوب تعيين تسارع القضيب علماً بأن تسارع المستوي المائل في حركته يساوي γ .

٢- يدور قضيب oA حول o في مستويه بسرعة زاوية ثابتة ω ، M نقطة تنزلق على oA بسرعة قيمتها ثابتة تساوي u ، عين سرعة وتسارع M المطلقين بدلالة بعد M عن النقطة o .

٣- يدور قرص دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور يمر من نقطة o تقع على محيط القرص ، تنزلق نقطة M بدءاً من النقطة A المقابلة قطرياً لـ o على محيط القرص بسرعة منتظمة قيمتها u . عين السرعة والتسارع المطلقين للنقطة M في الحالتين : ١- محور الدوران في مستوي القرص .

٢- محور الدوران يعامد مستوي القرص

٤- يدور مثلث قائم الزاوية ABC حول ضلعه القائم الثابت CB وفق القانون

$$\varphi = c_1 t + c_2 t^2$$

(c_1, c_2 ثابتتان)

وتتحرك نقطة M بحركة اهتزازية بسيطة على الوتر AB حسب القانون

$$oM = a\cos\frac{\pi}{3}t$$

(o منتصف AB)

عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M في لحظة ما t .

٥- xoy زاوية صلبة قياسها a تدور في مستويها حول رأسها الثابت o بسرعة زاوية ω ، M نقطة تتحرك في المستوي xoy ، احداثياها بالنسبة لـ yox هما x و y . احسب بدلالة x و y ومشتقاتها بالنسبة للزمن السرعة المطلقة للنقطة M .

٦- $oxyz$ ثلاثية قائمة ومباشرة ، Δ مستقيم يوازي oz ويدور حول oz بسرعة زاوية ثابتة ω . كان Δ في لحظة البدء في الموضع $x = a \;,\; y = o$ ، p نقطة تتحرك على Δ ، يتعين راقمها بالعلاقة : $z = b\cos(2\omega t + a)$

والمطلوب : ١- تعيين احداثيات p المطلقة .

٢- تعيين شعاعي السرعة والتسارع المطلقين للنقطة p .

٧- قضيب مستقيم يمر من حلقتين صغيرتين A و B تستطيعان الانزلاق على محيط دائرة نصف قطرها R ، يتحرك $A\,B$ بحيث يبقى أفقياً . معادلة حركة مركز القضيب هي : $y = R\cos 2\pi t$. عين السرعة المطلقة والنسبية والجرية للحلقة A بافتراض حركة A على المستقيم هي حركتها النسبية .

٨- تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω_e ، M نقطة تتحرك على سطح الاسطوانة حسب المعادلات :

$$x = 3\cos 2\pi t \quad , \quad y = 3\sin 2\pi t \quad , \quad z = 3t$$

بفرض $x\,,y\,,z$ هي جملة متماسكة مع الاسطوانة ينطبق منها $o\,z$ على محور الاسطوانة . عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M .

في الامتحان فقط مسائل
محلولة من التي اذكر رقم
صفحة في المحاضرة عشرون
أو ما في دورة ٢٠١٤ نتيجة الأهداف
سوف يأتي من المسائل
غير محلولة
مع تمنياتي
بالتوفيق