2015 / 12 / 3

مضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي $O_1X_1Y_1$ بحيث تنزلق النقطة A من القضيب على O_1X_1 بسرعة ثابتة قيمتها $v(A) = v$ وتتحرك النهاية B منه في $O_1X_1Y_1$ بحيث تبقى قيمة سرعتها ثابتة $v(B) = v$ كان القضيب في البدء منطبق على O_1Y_1.

المطلوب: 1) عين معادلات حركة القضيب.

2) أوجد مسار النقطة B.

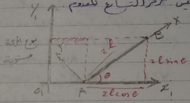
3) عين القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران تحليلياً.

4) عين القاعدة والمتدحرج هندسياً.

5) أوجد تسارع النقطة B.

6) عين النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة.

7) عين مركز التسارع المعدوم.



نختار جملة محاور مقارنة بحيث AB هو أحد محاور الجملة و محور Y ...

ونأخذ A قطب للحركة حيث ...

وتتحرك على (O_1X_1) و ...

نختار A قطب للحركة و جملة Axy محاور متماسكة مع القضيب معادلات الحركة

$x(A), y(A), \theta$:

لأن A يتحرك على O_1X_1 و $y(A) = 0$ (1)

(2) $x(A) = \int v\,dt$

$= vt + v_0$

لكن في لحظة بدء $t = 0 \Leftarrow x = 0$

وبالتالي $v_0 = 0$

ومنه $x(A) = vt$ — (2)

معادلة (3) تستنتج من قانون سرعة B أي:

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$= v\vec{i_1} + \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ 2l\cos\theta & 2l\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(B) = (v - 2l\omega\sin\theta)\vec{i_1} + 2l\omega\cos\theta\, j_1$$

$$v^2 = v^2 + 4l^2\omega^2\sin^2\theta - 4l\omega v\sin\theta + 4l^2\omega^2\cos^2\theta$$

نتخلص من الأمثلة والحصول على قيم عددية.

$$0 = 4l^2\omega^2 - 4l\omega v\sin\theta$$

$$l\omega = v\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{l}\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{v}{l}dt$$

إثبات:

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = u$

$\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = du$

$d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$

$\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$ مع استخدام

نكامل الطرفين

$$\frac{du}{u} = \frac{v}{l}\,dt$$

$$\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{v}{l}t + c$$

في لحظة البدء $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 0 + c$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{v}{l}t}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\frac{v}{l}t}$$

$$\Rightarrow \theta = 2\arctan e^{\frac{v}{l}t} \quad \text{--- (3)}$$

م ١٧.٣

/ /

$Y_1(I) = 0 = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\omega} = \frac{\ell}{\sin\theta}$

وهي معادلة وسيطية للقاعدة.

بفرض أصداثيات I في جملة متحركة هي

$I(x(I), y(I))$

ولتكن A مبدأ جملة متحركة وبالتالي أصداثياتها $(\overset{x(A)}{0}, \overset{y(A)}{0})$

ولدينا

$\vec{AI} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A))$

$(x(I), y(I)) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ v\cos\theta & -v\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

علماً أن $\vec{v}(A) = v\vec{i}_1 = v(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})$

$x(I) = \frac{v \cdot \sin\theta}{\omega} = \ell$

كون معادلة تنتج أنها تساوي ثابت تنتج معادلة متدحرج وهي المستقيم الموازي لمحور Ay

$y(I) = \frac{v\cos\theta}{\omega}$

لتعيين هندسياً: نحن نعلم منحى حركة A

يكفي أن نعرف منحى حركة B لدلالة نظرية المساقط

$\text{proj}_{\vec{AB}}\,\vec{v}(B) = \text{proj}_{\vec{AB}}\,\vec{v}(A)$

$\vec{AB} \cdot \vec{v}(B) = \vec{AB} \cdot \vec{v}(A)$

$|\vec{AB}| \cdot |\vec{v}(B)| \cdot \cos\alpha = |\vec{AB}| \cdot |\vec{v}(A)| \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\theta$

$\Rightarrow \alpha = \begin{cases} \theta & \text{مقبول} \\ -\theta & \text{مرفوض} \end{cases}$

لحل حركة السابقة

المسار (الأولي جملة ثابتة)

$\vec{O_1B} = \vec{O_1A} + \vec{AB}$

$x(A)$ حيث مجهولة على O_1, x_1

$= vt\,\vec{i}_1 + 2\ell\cos\theta\,\vec{i}_1 + 2\ell\sin\theta\,\vec{j}_1$

معادلات وسيطية

$\begin{cases} x(B) = vt + 2\ell\cos\theta \\ y(B) = 2\ell\sin\theta \end{cases}$

من علاقة في الأعلى

$vt = \ell \ln tg\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow ① \; x(B) = \ell \ln tg\frac{\theta}{2} + 2\ell\cos\theta$

$② \; y(B) = 2\ell\sin\theta$

المعادلات الوسيطية لمسار النقطة B.

المركز الآني للدوران

دينا:

$\vec{AI} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A))$

بفرض أصداثيات I في جملة ثابتة:

$I(x_1(I), y_1(I))$

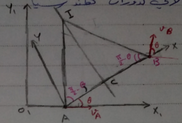
$(x_1(I) - \overset{vt}{x(A)},\; y_1(I) - \overset{0}{y(A)}) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$x_1(I) - vt = 0 \Rightarrow x_1(I) = vt$

① $= \ell \ln tg\frac{\theta}{2}$

و

وبالتالي نرسم عامود من كرة A وعامود من كرة B تلاقي عامودين هو مركز الآني لدوران هندسياً



لكون زاوية قاعدة متساوية $\frac{\pi}{2}-\theta = \frac{\pi}{2}-\theta$

فالمثلث A I B مثلث متساوي ساقين

في الجملة المتحركة:

$$X(I) = AC = l$$

$$Y(I) = CI = l\, tg(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

أو:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{l}{AI}$$

في الثابتة:

$$X_1(I) = OA = vt$$

$$Y_1(I) = AI = \frac{l}{\sin\theta}$$