2015 / 11 / 23

المحاضرة الحادية عشرة - الإثنين

تبين من المحاضرة السابقة أن الفضاء المنظم يكون تام إذا كان تام بخصوص المتري المولد بهذا النظيم "النورم"

مثال:

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$$

هذا الفضاء المعرف عليه النظيم السابق غير تام

لأنه غير تام بخصوص المتري المولد بالنظيم السابق

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$$

وجدنا سابقاً أنه غير تام

$$\Rightarrow (X,\|\cdot\|) \text{ غير تام}$$

ناخذ فضاء كل الدوال الحقيقية المستمرة على الساحة $[a,b]$ أي:

$$x\in C[a,b]$$

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

هذا الفضاء المزود بالنظيم غير تام أيضاً

نستطيع تعميم النظيم السابق بالشكل

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

وسماه لكل فضاء غير تام يوجد متمم بأن المتمم للفضاء السابق سنرمز له بالرمز $L^2[a,b]$ ويعمم بالشكل: $L^p[a,b]$

- الكرة الواحدية

$$S(0,1) = \{x\in X;\ \|x\|=1\}$$

- المجموعة المحدبة

يمكن الوصل بين أي نقطتين منها بقطعة مستقيمة واقعة بالمجموعة

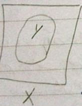
أي إذا تحقق الشرط فإن A يكون محدبة

$$M = \{z\in X : z = ax+(1-a)y,\ 0\le a\le 1\}\subset A$$

- المجموعة المحدودة:

$x\in M : \|x\|\le C$ ، ثابت

ملاحظة: $\|x\| = d(x,0)$



نقول أن Y جزئي من X إلا إذا كان Y بحد ذاته متري ... بنفس النظيم إذا كان X تام أو غير تام

لكن عندما نقول إن Y فضاء جزئي من X فهنا نقصد أن Y يحقق شروط الفضاء الجزئي.

مبرهنة الفضاء الجزئي من فضاء باناخ :-

* الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء باناخ X تاماً هو أن تكون المجموعة Y مغلقة في X .

البرهان للطالب مشابه لمبرهنة سابقة

ملاحظة:

فضاء Banach : فضاء منظم تام ..

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ في فضاء منظم X إنها متقاربة إذا وجد عنصر x في الفضاء بحيث :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

وشرط كوشي يكون

$$\forall \varepsilon>0, \exists N_0 \in N : n,m \geq N_0 : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

• بما أن الفضاءات المنظمة هي فضاءات عددية فيكون لها نفس الخواص العامة

• ندرس المتسلسلات بالفضاءات المنظمة ولا ندرس بالفضاءات المترية لأن بالمتسلسلة هناك مجموع S_n ولكي نتحقق وجوده يجب أن يكون الفضاء مجهزاً ...

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = S_n$$

فإذا كانت S_n متقاربة من S

$S_n \to S$ أي $\|S_n - S\| \to 0$

تكون المتسلسلة متقاربة ومجموعها S .

في حال استبدلنا كل عنصر من مجموع S_n بنظيمه أي :

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$= \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \dots + \|x_n\|$$

هنا أصبحت المتسلسلة في R ..

النوع «النظيم» هو القيمة المطلقة في R

نكتب : $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$

لأن الحدود أصبحت غير سالبة ..

ملاحظة : نقول عن $\sum a_n$ إنها متقاربة بإطلاق إذا كانت $\sum |a_n|$ متقاربة ..

ونقول إن الشرط اللازم والكافي كي يقتضي التقارب المطلق لمتسلسلة تقارب هذه المتسلسلة في فضاء منظم X هو أن يكون X تام ... «انتبه إلى

لأننا كنا نقول عن $\sum a_n$ متقاربة بإطلاق إذا $\sum |a_n|$ متقاربة لأن R منظم تام »

ليكن لدينا فضاء منظم $(X, \|\cdot\|)$ يحوي
متتالية (e_n) بحيث يوجد لكل عنصر x من X
متتالية وحيدة a_n تحقق الشرط

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)\| \to 0$$

عندما $n \to \infty$، عندئذٍ نسمي القاعدة
e_n بقاعدة شاودر "Schauder"
وندعو $\sum a_k e_k$ بمنشور x بالنسبة
لـ e_n

ملاحظة:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

القاعدة القانونية هي قاعدة شاودر لـ $\mathbb{R}^n$

* مبرهنة الاتمام ....

ليكن $X = (X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم.. عندئذٍ يوجد
$\hat{X}$ فضاء باناخ ويوجد تطبيق ايزومتري
من X على الفضاء الجزئي W من $\hat{X}$ حيث
W كثيف في $\hat{X}$، إن الفضاء $\hat{X}$ وحيد اذا
غضضنا النظر عن الفضاءات الايزومترية لبعضها

البرهان: غير مطلوب لكنه مطلوب للفهم!!

○ الفضاءات المنظمة منتهية البعد...

بعد الفضاء X ... $\dim X = n$

- مبرهنة التراكيب الخطية

ليكن لدينا الفضاء X ايا كان بعده ولتكن
لدينا جملة من الاشعة المستقلة خطياً
هذه الجملة ستشكل لنا فضاء جديد..

وليكن c عدد موجب سوف تحقق المتباينة

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c\,[|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots]$$

اعداد ، عناصر ، عدد موجب مستقل عن الجملة ، اعداد

البرهان:

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

$S := |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \dots$:

- في حال $S=0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$
وبالتالي فالمتباينة محققة.
- في حال $S \neq 0 \Rightarrow S>0$ لأن S
هو مجموع أعداد موجبة... لا يمكن ان يكون سالب
بتقسيم المتراجحة على S وبكتابة

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{S}$$

$$\Rightarrow \|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1 \; ;$$

لأننا
نستطيع اخراج S خارج المتسلسلة
وبالتالي سيصبح لدينا مجموع α_i على
S ومجموع α_i هو S

$$\Rightarrow \frac{S}{S} = 1$$

الآن وصلنا الى متباينة متكاملة أي
في حال تم برهانها سنحصل على المطلوب ..
نفرض جدلاً أن المتباينة خاطئة بالتالي
يوجد متتالية y_m من المتجهات

$$y_m = \beta_1^{(m)}x_1 + \beta_2^{(m)}x_2 + \dots + \beta_n^{(m)}x_n$$

حيث

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$$

و

$$\|y_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

لأن المجموع أكبر وسيساوي الصفر وبالفرض أن كل منها عدد موجب والنقص المفروض يجب أن يكون أصغر من عدد موجب ولا يمكن أن يكون المجموع سالباً لذا سيكون صفراً

لما كان $\sum |\beta_i^{(m)}| = 1$ فإن $|\beta_i^{(m)}| \le 1$
بالتالي نوجد متتالية

$$\beta_j^{(m)} = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \beta_j^{(3)}, \dots, \beta_j^{(n)})$$

هذه المتتالية محدودة .. لأن

$$y_1 = \beta_1^{(1)}x_1 + \beta_2^{(1)}x_2 + \dots + \beta_j^{(1)}x_j + \dots + \beta_n^{(1)}x_n$$
$$y_2 = \beta_1^{(2)}x_1 + \beta_2^{(2)}x_2 + \dots + \beta_j^{(2)}x_j + \dots + \beta_n^{(2)}x_n$$
$$\vdots$$
$$y_r = \beta_1^{(r)}x_1 + \beta_2^{(r)}x_2 + \dots + \beta_j^{(r)}x_j + \dots + \beta_n^{(r)}x_n$$
$$\vdots$$

لأن عندما نبحث الآن في أحد العمود، وبما أن كل $\beta^{(m)}$ أصغر أو يساوي الـ(1) فإن مجموعهم سيكون أصغر أو يساوي الواحد

وحسب مبرهنة بولزانو-فايرستراس فإن
المتتالية الغير منتهية والمحدودة $\beta_j^{(m)}$ تحوي
متتالية جزئية متقاربة وندعوها بالرمز
β_j لنهاية هذه المتتالية الجزئية

ملاحظة: مبرهنة بولزانو-فايرستراس
تقول: كل مجموعة محدودة وغير منتهية
يوجد لها نقطة تجمع واحدة على الأقل
وبنقلها الى لغة المتتاليات
كل متتالية محدودة وغير منتهية تحوي متتالية
جزئية متقاربة واحدة على الأقل ..

ونرمز $y_{1,m}$ لنهاية المتتالية الجزئية من العمود الأول
لنجد أنها تحوي متتالية جزئية
متقاربة ونرمز لها بـ $y_{2,m}$ بحيث تكون
متتالية الجزئية المقابلة لـ $\beta_2^{(m)}$ متقاربة وهكذا
n مرة لنحصل على متتالية جزئية $y_{n,m}$ من y_m

$$y_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \quad ; \quad \sum |\beta_i| = 1$$

حيث $\gamma_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \beta_i \Rightarrow y_{n,m} \xrightarrow[m\to\infty]{} y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

حيث $\sum |\beta_i| = 1$ وهذا يعني أنه لا يمكن
أن تكون كل β_i أصفاراً وبما أن $x_1 \dots x_n$ مستقلة
فإن $y \neq 0$ وبما أن $y_{n,m} \to y \Rightarrow \|y_{n,m}\|$
سوف تسعى لـ $\|y\|$ وبما أن $\|y_m\| \to 0$
فإن $\|y_{n,m}\| \to 0$ وهذا يعني $\|y\| = 0$

وهذا تناقض ..

انتهى البرهان