

حدا حبة آخري لدينا

$$\forall i \in I$$

رتب المداور $h_{0k} = 1$

تكون

2019 11/18

المحاضرة 12

المبدأ المرافقة

تعريف: ليكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A

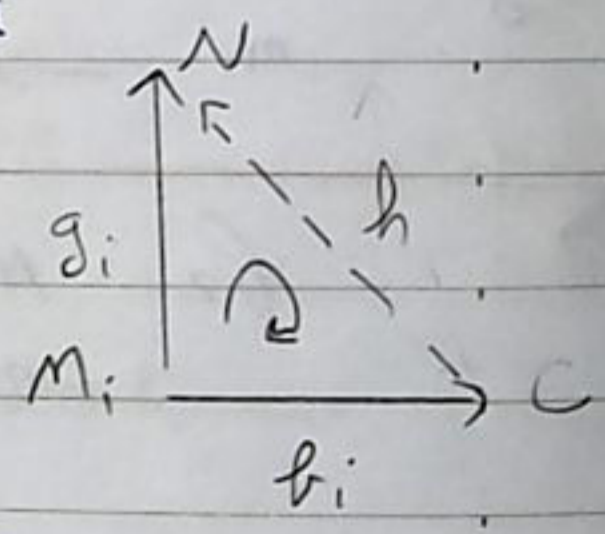
تكون $(C, \{f_i\}_{i \in I})$ حيث C هو A مودول

$$f_i: M_i \rightarrow C \text{ تتأكد مودولي } (\forall i \in I)$$

لانه مبدأ مراقت للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$
إذا تحقت ما يلي:

لاجد كد $(N, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث N هو A مودول

$$g_i: M_i \rightarrow N \text{ تتأكد } (i \in I)$$



فانه يوجد تتأكد ووحيد

$$h: C \rightarrow N \text{ حيث}$$

$$h \circ f_i = g_i, \forall i \in I$$

فانه

المجموع المباشر

ليكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من A - مودول

تعرف المجموع: $\bigoplus_{i \in I} M_i$ كما يلي

$$x \in \bigoplus M_i \iff \begin{cases} x \in \prod M_i \\ m_i \in M_i \text{ حيث } x = (m_i)_{i \in I} \end{cases}$$

(.)
أي $x = (m_i)_{i \in I}$ حيث $m_i \in M_i$
(..) كل m_i أصفاراً
عدد منتهي

بأنه $A(\bigoplus M_i, +, \cdot)$ مودول وخطية

جزئي $\prod M_i$

نذكر $\bigoplus_{i \in I} M_i$ مجموع مباشر لـ $\{M_i\}_{i \in I}$

الاصطفا
القانوني

$$f_1 : M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2$$

$$m_1 \rightarrow m_1 + 0$$

$$(m_1, 0)$$

في حال $J=1$

$$f_J : M_J \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

$$m_i \rightarrow (m_i) = (0, \dots, 0, m_J, 0, \dots)$$

↓
الركبة J

$$f_2 : M_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$$

$$m_2 \rightarrow 0 + m_2 + 0$$

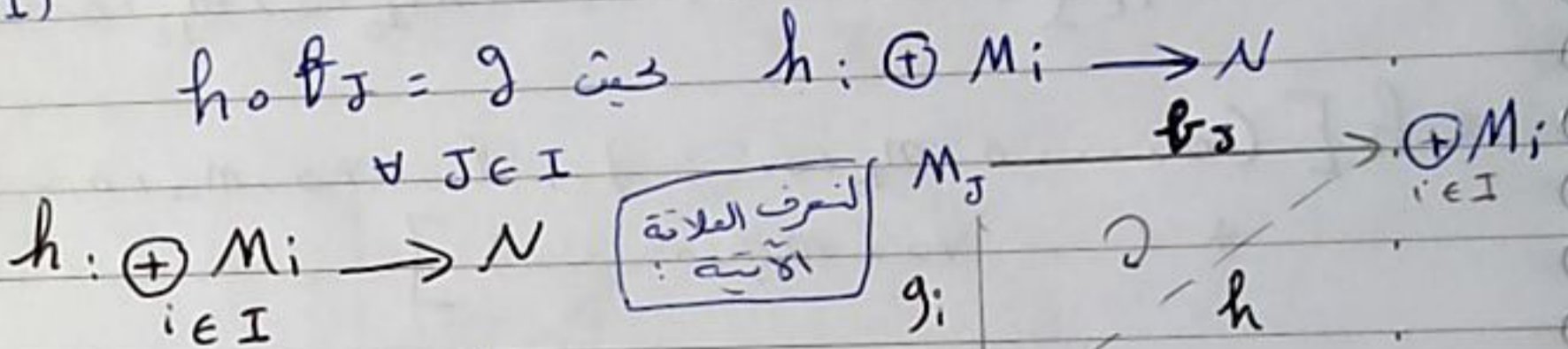
$$(0, m_2, 0)$$

في حال $J=2$

إن f_J مباشرة مودولي متباين (خطية)
يرمز لـ f_J بـ in_J ويدعى التباين القانوني على الركبة J
الاصطفا، القانوني

بشكل جدار مرافق $(\oplus M_i, \{in_i\}_{i \in I})$ بملاحظة:
 لـ $\{M_i\}_{i \in I}$

البرهان: لا بد كل $(N, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث N هو A مودول
 و $g_i: M_i \rightarrow N$ (لـ $i \in I$)
 و المطلوب: اتحاد

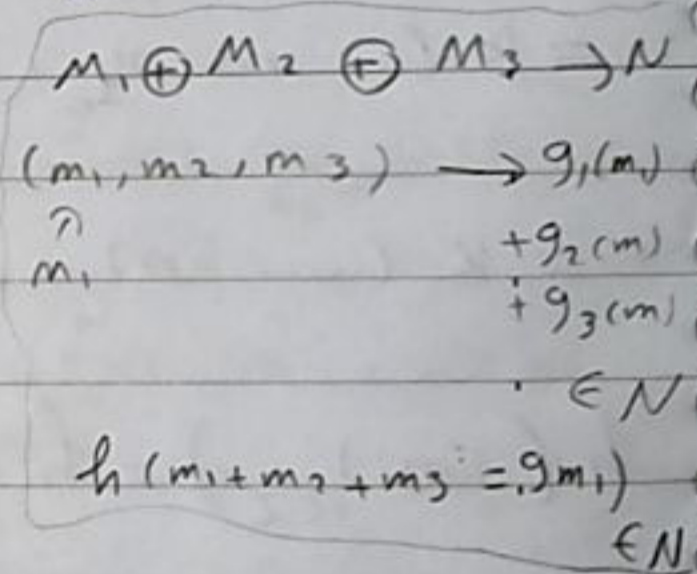


$$(m_i) \rightarrow \{g_i(m_i)\}$$

مجموع متجهي لأن $(m_i) \in \oplus M_i$ $i \in I$

إذاً كل المركبات أصغر، إلا أنه قد يشترط صفر
 (إن h تتأكد (وظيفية)

$$\begin{aligned} h \circ in_i(m_i) &= h(in_i(m_i)) \quad (\dots) \\ &= h(\dots, 0, m_i, 0, \dots) \\ &= g_i(m_i) \end{aligned}$$



وبنه مما يمكن $m_i \in M_i$ فإن

$$h \circ in_i(m_i) = g_i(m_i)$$

إذ h وحيداً لأن:

$$k: \oplus M_i \rightarrow N$$

لتفرد وجود

حقيقت:

$$k \circ in_i = g_i \quad \forall i \in I$$

$$\forall m_i \in M_i :$$

ونه

$$k \circ i_{i_i}(m_i) = g_i(m_i) = h \circ i_{i_i}(m_i)$$

$$k(\dots, m_i, \dots) = h(\dots, m_i, \dots)$$

$$h((m_i)_{i \in I}) = (\dots, 0, \dots, m_{i_0}, \dots, m_{i_2}, \dots, m_{i_5}, \dots)$$

$$= h[\dots, 0, \dots, m_{i_0}, \dots] + [\dots, 0, \dots, m_{i_2}, \dots] + [\dots, 0, \dots, m_{i_5}, \dots]$$

$$= h(\dots, m_{i_0}, \dots) + h(\dots, m_{i_2}, \dots) + h(\dots, m_{i_5}, \dots)$$

$$= k(\dots, m_{i_0}, \dots) + k(\dots, m_{i_2}, \dots) + k(\dots, m_{i_5}, \dots)$$

$$= k(\dots, m_{i_0}, m_{i_2}, m_{i_5}, \dots)$$

$$h((m_i)_{i \in I}) = h \sum_{\text{مجموعتي}} (\dots, m_i, \dots)$$

$$= \sum h(\dots, m_i, \dots)$$

$$= \sum k(\dots, m_i, \dots)$$

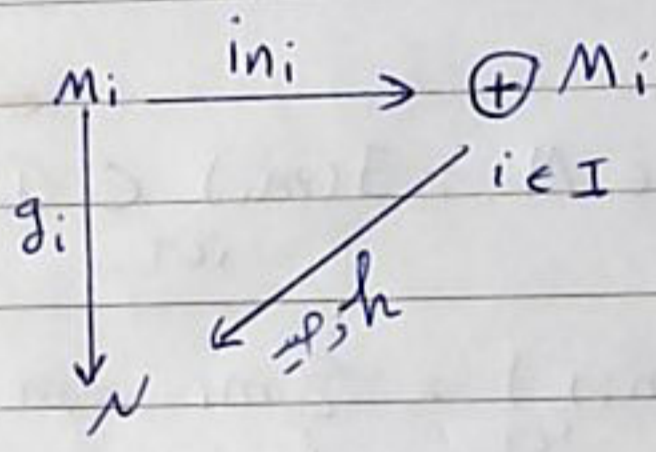
$$= k(\sum_{\text{مجموعتي}} (\dots, m_i, \dots))$$

$$= k((m_i)_{i \in I})$$

مبرهنة: إن أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ يساثل $(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{in_i\}_{i \in I})$. البرهان وظيفية.

المحاضرة 13
22 / 11 / 2015

مراجعة: أسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ من A مودول



المجموع المباشر الداخلي:

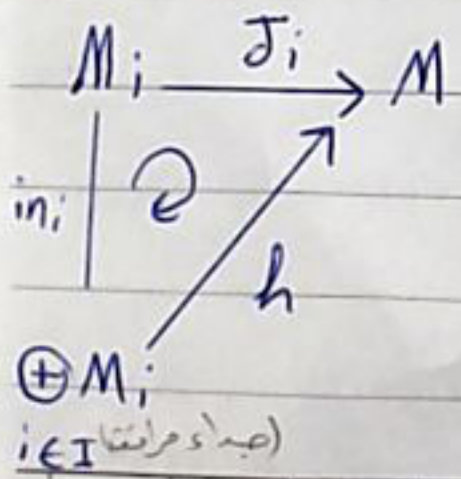
تعريف: ليكن M مودول على حلقة A وليكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من M

$$\begin{array}{l}
 \text{نوف:} \\
 J_i: M_i \rightarrow M \\
 m_i \rightarrow m_i
 \end{array}$$

J_i من A مودول متباين مما يمكن $i \in I$

نقول عن M أنه مجموع مباشر داخلي

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$$



لذلك يمكن كتابة M لدينا
 $(M, \{J_i\}_{i \in I})$ تتاخر من M هو A مودول

$$J_i: M_i \rightarrow M$$

تأخرات مودولية $\forall i \in I$

صا كوز $\bigoplus_{i \in I} M_i$ هيا مرافق لاسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ ادا يوجد

$h: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ هيا كد و صيد $h \circ \text{in}_i = \text{pr}_i$

$\forall i \in I, (m_i) \rightarrow \sum_{i \in I} \text{pr}_i(m_i) = \sum_{i \in I} m_i \in M$

انا M مجموع مباشر داملين $\{M_i\}_{i \in I}$ اذا h تقابل دليقر ذلك

متباين
 $\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} m_i$
 $\rightarrow \sum_{i \in I} (m_i - m_i) = 0$
 $\rightarrow (m_i - m_i) = 0$

h هيا مرنا ←

$\forall m \in M : \exists (m_i) \in \bigoplus_{i \in I} M_i$

$h((m_i)) = \sum_{i \in I} m_i = m$

h متباين : اذا h هيا كد و صيد هيا كد و صيد
 اذا كد و صيد M هيا كد و صيد هيا كد و صيد
 التالي $\sum_{i \in I} m_i$

$\forall m \in M : \exists m_i \in M_i$

حيث $m = \sum_{i \in I} m_i$ كتابة و صيد

$h: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$

برهنة: (بدون برهان): ليكن M مودول على A وليكن $\{M_i\}$

سلسلة من المودولات الجزئية من M عند تقاطعها المتتالية فكانت:

$$\sum_{i \in I} M_i \quad (1)$$

مجموع مسترد اظن لـ $\{M_i\}_{i \in I}$

$$\sum_{i \in I} M_i = 0 \quad (2)$$

\leftarrow $\forall i \in I, M_i = 0$

$$0 = M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j \quad (3)$$

برهنة: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ سلسلة من المودولات كحلقة A

وليكن N مودول على A - مودول جزئيا:

$$\text{Hom}(N, \pi M_i) \cong \pi \text{Hom}(N, M_i) \quad (1)$$

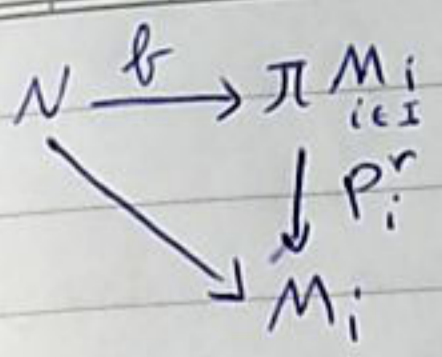
\nearrow زبري

$$\text{Hom}(\oplus M_i, N) \cong \pi \text{Hom}(M_i, N) \quad (2)$$

$$\delta: \text{Hom}(N, \pi M_i) \rightarrow \pi \text{Hom}(N, M_i) \quad (1)$$

$$f \rightarrow \delta(f) = (p_i \circ f)_{i \in I}$$

دلتا تخت



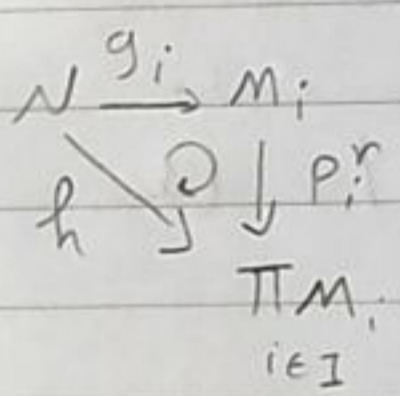
$f_1 = f_2 \rightarrow P_i^r \circ f_1 = P_i^r \circ f_2 \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow (P_i^r \circ f_1) = (P_i^r \circ f_2) \quad i \in I$

$\delta(f_1) = \delta(f_2)$

دلتا تراكب زمرى

$\delta(f_1 + f_2) = (P_i^r \circ (f_1 + f_2)) = (P_i^r \circ f_1) + (P_i^r \circ f_2) \quad i \in I$
 $= \delta(f_1) + \delta(f_2)$



دلتا تقابل: ليكن $\prod_{i \in I} \text{Hom}(N, M_i) \ni (g_i)_{i \in I}$ و منه

حيث كون $\prod_{i \in I} M_i$ هو الجداء للاسرة $\{M_i\}_{i \in I}$

اذا يوجد تراكب وحيد

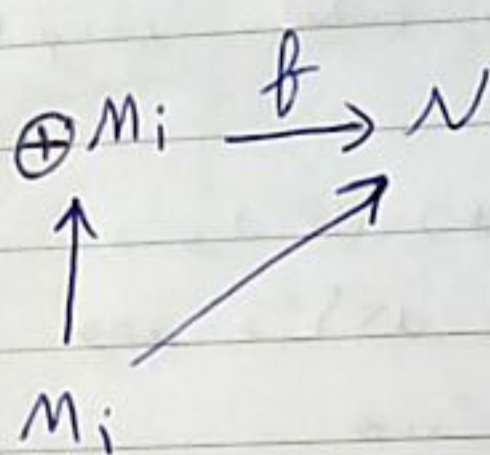
$h \in \text{Hom}(N, \prod_{i \in I} M_i) : P_i^r \circ h = g_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow (P_i^r \circ h) = (g_i)_{i \in I}$

$\delta(h) = (g_i)_{i \in I}$

$\text{Hom}(\bigoplus M_i, N) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}(M_i, N) \quad (2)$

$$f \rightarrow \delta(f) = (f \circ \text{in}_i)$$



المطلوب اثبات δ - تابع + تناهيد
 زمني + تقابل

الجدول: δ تصنيف

$$f_1 = f_2 \implies f_1 \circ \text{in}_i = f_2 \circ \text{in}_i \quad \forall i \in I$$

$$\implies (f_1 \circ \text{in}_i)_{i \in I} = (f_2 \circ \text{in}_i)_{i \in I} \implies \delta(f_1) = \delta(f_2)$$

$$\forall f_1, f_2 \in \text{Hom}(\oplus_{i \in I} M_i, N)$$

$$\delta(f_1 + f_2) = ((f_1 + f_2) \circ \text{in}_i)_{i \in I} = (f_1 \circ \text{in}_i)_{i \in I} + (f_2 \circ \text{in}_i)_{i \in I}$$

$$= \delta(f_1) + \delta(f_2)$$

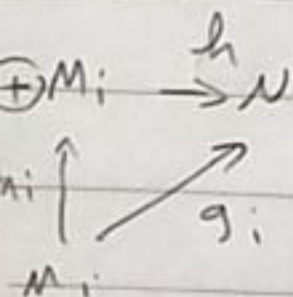
$\oplus M_i$ هيا مرافق لـ $\{M_i\}_{i \in I}$

$$\forall (g_i) \in \prod \text{Hom}_A(M_i, N) \implies \exists h \in \text{Hom}_A(\oplus M_i, N)$$

$$h \circ \text{in}_i = g_i \quad \forall i \in I$$

$$(h \circ \text{in}_i)_{i \in I} = (g_i)_{i \in I} \implies \gamma(h) = (g_i)_{i \in I}$$

ديالتي لا تفر وساب



(التاليات الشرطية)

تعريف: ليكن $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ متتالية قصيرة

تقول عن (*) التامة إذا:

وجود $S: P \rightarrow N$: شاكيد

حيث $g \circ S = 1$

مبرهنة: ليكن $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ متتالية قصيرة (*)
تامة عندها

(*) متطابقة $\Leftrightarrow N = N_1 \oplus \ker g$

من أجل N_1 مودول جزئي من N محدد

المرهان: لدينا (*) متطابقة أي: $0 \rightarrow M \rightarrow N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$

حيث $g \circ S = 1$ ، ليكن $n \in N$ عندها

$n - S(g(n)) \in N$

لنرهن أنه: $n - S(g(n)) \in \ker g$

$g(n - S(g(n))) = gn - g(S(g(n)))$

$= g(n) - g(n) = 0$

إذاً: $n - S(g(n)) \in \ker g$

وبنه

$n - S(g(n)) = a$
 $n = a + S(g(n))$
 $a \in \ker g$ $S(g(n)) \in \text{Im } S$

$N \subseteq \ker g + \text{Im } S$

$N = \text{Im } S + \ker g$

لنرهن الآن أن: $+ \text{Im } S + \ker g$ أي

$X \in \text{Im } S \cap \ker g$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in P : S(p) = x \\ g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = g(x) = g(S(p)) = p$$

إزاً $x=0$. هذا يعني أن

$$0 = \ker g \cap \text{Im } S$$

نجد مما سبق أن $N = \text{Im } S \oplus \ker g$

(\Rightarrow) اثبات العكس: $N = N_1 \oplus \ker g$

والمطلوب: إيجاد تماثل $S: P \rightarrow N$

$$g \circ S = 1 \text{ حيث}$$

$$g|_{N_1}: N_1 \rightarrow P \text{ لنا عند}$$

تأكد من ظهور N_1 ولذا هن أن $g|_{N_1}$ هو تماثل.
 (تصور N_1 عند g)
 تكون $N_1 \neq \emptyset$

$\forall p \in P$ $\rightarrow \exists n \in N : g(n) = p$ $g|_{N_1}$ غامر:
 ولكن $n = n_1 + a$ حيث $n_1 \in N_1$ و $a \in \ker g$

$$g(a) = 0$$

$$p = g(n) = g(n_1 + a) = g(n_1) + 0$$

$$= g|_{N_1}(n_1) + 0 = g|_{N_1}(n_1)$$

إزاً $g|_{N_1}$ غامر

N_1 بيان لأن :

$$n_1 \in \ker g|_{N_1} \rightarrow n_1 \in N_1 : g|_{N_1}(n_1) = 0$$

$$\rightarrow n_1 \in N_1 : n_1 \in \ker g$$

$$\rightarrow n_1 \in N_1 \wedge \ker g = 0$$

$$\rightarrow n_1 = 0$$

وبالتالي $g|_{N_1}$ تماثل

$$\text{لنعرّف } S = (g|_{N_1})^{-1}$$

$$S : P \rightarrow N$$

كيفية مايلي :

$$g \circ S(P) = g(S(P))$$

$$= g|_{N_1}(S(P)) = g|_{N_1} \circ S(P)$$

$$= g|_{N_1} \circ (g|_{N_1})^{-1} \cdot (P) = P$$

نتيجة، لكن المتتالية التالية :

$$(*) \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

تامة ومفطرة .

$$N = \text{Im } S \oplus \ker g \quad (\text{لبيان})$$

$$\ker g = \text{Im } f \quad (\text{لبيان})$$

$$f \text{ بيان و } g \text{ تمام}$$

لدينا : $g \circ S = 1$

(•) إن S متباين :

$$S(P_1) = S(P_2) \implies g(S(P_1)) = g(S(P_2))$$

$$\implies P_1 = P_2$$

$$P \xrightarrow{S} \text{Im } S \subseteq N$$

تساكد متباين $S(P)$ بصور $P \in P$

بطاقت متباين P و $\text{Im } S$ أي $P \equiv S(P)$ أي

$$\text{Im } S \cong P$$

$$N \cong \text{Im } f \leftarrow f \text{ متباين}$$

$$M \cong \text{Ker } g \text{ إذ آ}$$

$$N \cong M \oplus P \text{ إذ آ}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a \rightarrow (a, 0)$$

$$a \equiv (a, 0)$$

$$i = (0, 1) \text{ و } i^2 = -1$$

$$(a, b) \equiv (a, 0) + (0, b)$$

$$\equiv a + b(0, 1) = a + bi$$

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus P \xrightarrow{m+p \rightarrow P} P \rightarrow 0$$

$$m \rightarrow m$$

$$m \in M \xrightarrow{f} \underbrace{f(m) \in M}_{\equiv m}$$

$$n \in N \rightarrow n = S(P) + a \text{ , } a \in \text{Ker } g$$

$P \in P$

$$g(n) = g(S(P)) + g(a) = P + 0$$

$$g: S(P) + a \rightarrow P \equiv S(P) \in P$$

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus P \xrightarrow{J} P \rightarrow 0$$

$m \rightarrow m$

$$m+p \rightarrow p$$

المودولات الوثرية والآرتينية

تعريف: المودول الوثري والآرتيني: ليكن M مودول على حلقة A

M نوثري \Leftrightarrow لكل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

فإنه يوجد $r \in \mathbb{N}$ حيث:

$$M_r = M_i \quad \forall i \geq r$$

M آرتيني \Leftrightarrow لكل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية

$$M_0 \supset M_1 \supset \dots$$

يوجد عدد طبيعي $r \in \mathbb{N}$ حيث

$$M_r = M_i \quad \forall i \geq r$$

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها:

M نوثري $\Leftrightarrow M$ تحقق الشرط الأولي (أي كل أسرة

من المودولات الجزئية من M تملك عندها أعلى بالسنة لاصوات)

M آرتيني $\Leftrightarrow M$ تحقق الشرط الاضغري (والتسيفة)

البرهان: (\Leftarrow) لتكن Γ أسرة من المودولات الجزئية من M

وليكن $M_0 \in \mathcal{P} \iff$ إذا كان M_0 أقصى ثم المطلوب
 وإلا يوجد $M_1 \in \mathcal{P}$ حيث $M_0 \subset M_1$ إذا كان M_1
 أقصى ثم المطلوب وإلا فإنه يوجد $M_2 \supset M_1$
 $M_0 \subset M_1 \subset M_2$ وبإعادة العملية يصلنا سلسلة
 $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ سلسلة من المودولات الجزئية من M
 لكن M نوثرى إذاً يوجد $\sqrt \in \mathcal{N}$ حيث $M_r = M_i$
 مما يمكن $r \geq i$ إذاً M_r مفراً أقصى.

\Rightarrow لتكن $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ سلسلة من المودولات
 الجزئية من M عندنا المودولات M_0, M_1, \dots تتكامل
 أسرة من المودولات الجزئية من M ، لتقول M_r
 هو مفراً أقصى لهذه الأسرة إذاً السلسلة (*)
 تثبت ما الحد M_r (كونه مفراً أقصى)

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها:

- (1) M نوثرى \iff كل مودول جزئي من M نوثرى
- (2) M آرتيني \iff كل مودول جزئي من M آرتيني
- (3) M مودول نوثرى (وآرتيني) وليكن N مودول جزئي من M
 عندها M/N نوثرى (وآرتيني)
- (4) M آرتيني و N مودول جزئي من M عندها M/N آرتيني

(5) ليكن N مورد جزئي من M حيث تحققت ما يلي:
 N نوثرى و M/N نوثرى، عندها M نوثرى.

(6) N آرسبي و M/N آرسبي $\Leftrightarrow M$ آرسبي

البرهان: (1): ليكن N مورد جزئي من M

ليكن $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية.

إذاً هي سلسلة من المودولات الجزئية من M وليكن:

M نوثرى \Leftrightarrow السلسلة كتبت عند $r \in N$

(3) ليكن $P_0 \subset P_1 \subset \dots$ سلسلة من المودولات

الجزئية من M/N

حسب التقابل بين المودولات الجزئية من M/N والمودولات
 الجزئية من M التي تحوي N نحصل:

* $M_0 \subset M_1 \subset \dots$

سلسلة من المودولات الجزئية من M

ولكن M نوثرى إذا (*) تثبت عند $r \in N$

أي $r \geq i \forall i \geq r$ $M_r = M_i$

دسته بالمقابل

$r \geq i \forall i \geq r$: $P_r = P_i$ $\exists r \in N$ أي M/N نوثرى

(5) ليكن $*$ سلسلة من المورومات $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ الجزئية من M عند ها:

$$M_0 \cap N \subset M_1 \cap N \subset \dots$$

سلسلة من المورومات الجزئية من N و لكن N نوثرى
 إذا يوجد $t \in N$ حيث:

$$M_i \cap N = M_t \cap N \quad \forall i \geq t$$

كذلك : $\pi: M \rightarrow M/N$ تماثل الغر القانوئي

لصور مورود $(*)$ بالتساك π نحصل على:

$$\pi(M_0) \subset \pi(M_1) \subset \pi(M_2) \subset \dots$$

M/N لكن M/N نوثرى

$$\exists k \in \mathbb{N} : \pi(M_k) = \pi(M_i) \quad \forall i \geq k$$

لنر $r = \max(t, k)$ ولبرهن أن $M_r = M_i$

صحايق $r \geq i$ ، لسا $M_r \subset M_i$ و $i \geq r$

ولبرهن الاضواء الآخر :

$$x \in M_i \Rightarrow \pi(x) \in \pi(M_i) = \pi(M_r)$$

$$\Rightarrow \exists y \in M_r : \pi(x) = \pi(y)$$

$$x + N = y + N$$

$$\boxed{x - y \in N} \quad (1)$$

بأخرى ومنه

$$\left. \begin{array}{l} x \in M_i \\ y \in M_r \subset M_i \end{array} \right\} \Rightarrow x - y \in M_i$$

صاحة ثانية :

جددنا (1) و (2) أن

$$x - y \in M_i \cap N = M_r \cap N$$

$$(x - y) + y \in M_r \leftarrow \begin{cases} x - y \in M_r \\ y \in M_r \end{cases} \text{ إذا دلينا } M_r$$

$$x \in M_r \text{ أي}$$

ابراج جوردان هولدر :

تعريف: ليكن M مودول كحلقة A

M مودول بسيط (\Leftrightarrow) أي مودول جزئي من M إما

يأوي M أو يأوي 0

تعريف: ليكن : $M_0 = M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$

((سلسلة متناهية من المودولات

الجزئية من M))

ندعو K برج من المودولات الجزئية

أو سلسلة نظامية من المودولات الجزئية.

ملاحظات: [1] ندعو γ بطول البرج (S) أو طول السلسلة (S)

[2] $M_0, M_1, M_2, \dots, M_r$ حدود السلسلة (S)

[3] ندعو M_i/M_{i+1} ندعو عوامل السلسلة S

وخصيعة $M = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ ارسم الابرار للملكة

المحاضرة 16

(4) لكن $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$

سلسلة من المودولات الجزئية من M
نقول عن السلسلة النظامية (T) أنها تقطعية لـ S
إذا كانت كل حدود S تظهر في السلسلة (T)
(السلسلة تجرمت S)

$S : M = M_0 \supset M_1 \supset 0$

مثلاً
نظامية أي تبدأ بأبار M
وتنتهي بالفرغ

(T) $M_0 = M \supset N_1 \supset M_1 \supset N_2 \supset 0$

لـ (S)

(5) لكن $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$

(طول r)

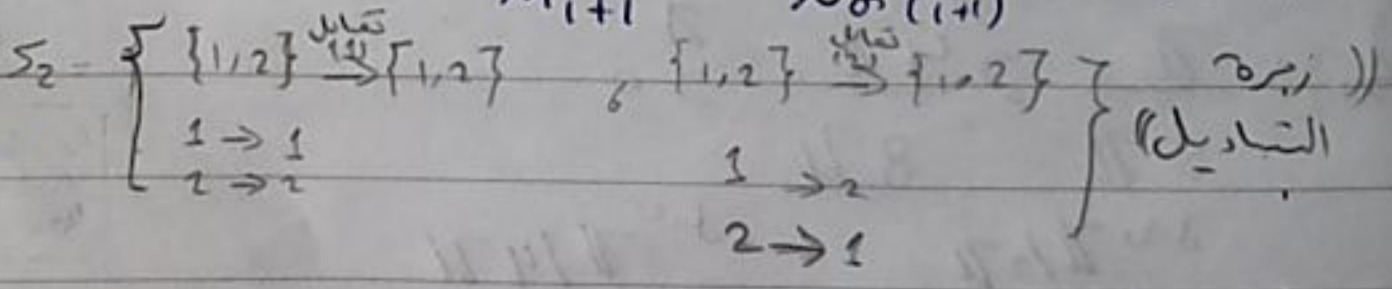
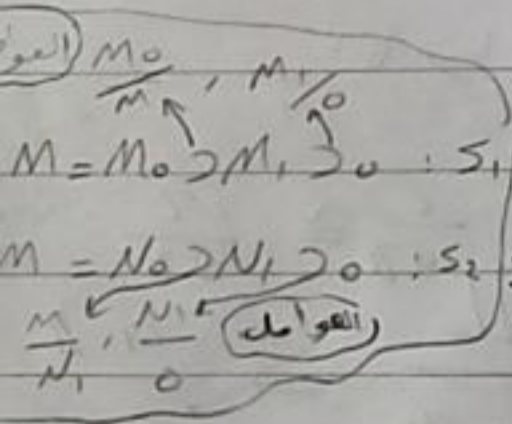
(6) $M = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_t = 0$ (طول t)

سلسلة نظاميتين لـ M نقول عن (S_1) و (S_2)

إرتباطك فنية إذا تحقق ما يلي:

(1) $\sqrt{= t}$ (طول $S_1 =$ طول S_2)

(2) $\exists \sigma \in S_r : \frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \frac{N_{\sigma(i)}}{N_{\sigma(i+1)}}$



بعض الشرط الثاني: عوامل السلسلة $S_1 =$ عوامل السلسلة S_2 ، بفهم انظر من انظر

وأضربين الاعتبار التكرار

كل زمرة لا استكد $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ هي دوارة

تقسيم الحد الاكبر عند الحد الثاني
تقسيم ج العوامل عن الحد

الموضوع:

توليف برع جوردان - هولدر : ليكن M مودول على حلقة A وليكن :

(طوله r) : $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = 0$ (S)

سلسلة تقاسية لـ M . نقول عند (S) انها برع جوردان

هولدر اذا كانت كل عوامل السلسلة هي مودولات بسيطة

أي : $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ مودول بسيط ($i=0, 1, \dots, r-1$)

تبدأ عند 4 عند انتهاء س 4
تجمع بين 0 وهكذا التعداد
تكتب دوارة

مثال : $M = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ زمرة تبديلية دوارة و M مودول هي $(\mathbb{Z} - مودول)$

ان أي زمرة جزئية لها سيكون عدد عناصرها يقسم r وليس له غير r و
بإمكانه تقوي في عناصره فهو الحاصل
أي المودول المكون

$M_0 = M = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \supset M_1 = 0$

برع طوله واحد

العوامل له هي عوامل بسيطة

$\frac{M_0}{M_1} = \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}{0} = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

(وهو يكون هو برع جوردان) $5\mathbb{Z}$

مثال : $M = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ مودول تبديلية

انصد اننا لدينا 8 عن مودول دوارة

الاربع الممكنة لثينة الزمرة هي :

$\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل

نكتب الزمر الجزئية التي لانفس المقام لـ $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

(S1) $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$

$\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل $\frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل

$\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \cong \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ حيث

(S2) $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$

$\frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل $\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل

$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

(S3) $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$

$\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل $\frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ قابل

$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ (الزمرة البرنية)

هي ليست الزمرة الجزئية
لكن هي تماثل الزمرة البرنية

لذلك نضع بدل $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ $\frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

المواد سوية عند ما يكون المقام أكبر من البسط
 الموضوع:
 1 | 1

$$(S_4) : \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$$

العائد $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

نلاحظ أن (S_4) و (S_3) متكافئة (لعمق الطول ونفس العوامل) (S_4) ليس $J.H$ لأنه الوحيد الذي توحد له عوامل بسيطة

M للولاء كما مر بتبديلية ولكن ليس دارة
 $M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ (أو $(7, 52)$)
 أداة استخراج الزمر الجزئية لـ M

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \{0\} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, \quad H_2 = \{0\} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$$

$(S_1) : M \supset 0$ (بمخرج الزمر الجزئية) استخراج

$$(S_2) : M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \supset H_1 \supset 0$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$(S_3) : M \supset H_2 \supset 0$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

إزاكيا $M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$
 $H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \{0\} \times \{0\}$
 $H_2 = \{0\} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \{0\}$

حيث S_2 و S_3 ابراج جوردان لعولدا

أداة دارة $M = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ (p أعداد أولية)
 حيث $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$

نظرية البواقي الصينية تعود:

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{\alpha_2}\mathbb{Z}} \times \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{\alpha_t}\mathbb{Z}}$$

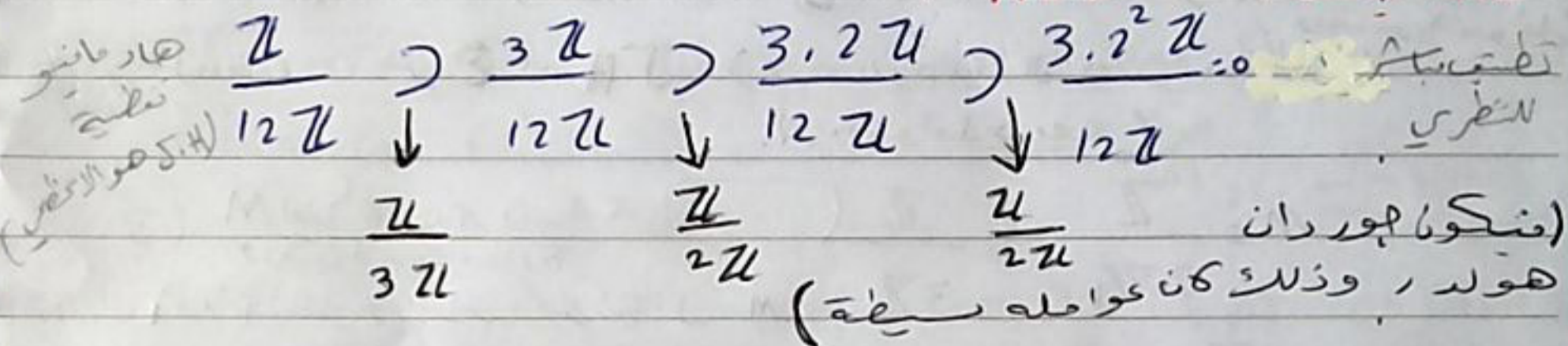
$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1^2\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \dots \supset \frac{p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1^{\alpha_1} p_2\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

تكون $M_i = \frac{\mathbb{Z}}{p_i^{\alpha_i}}$ $M = \frac{\mathbb{Z}}{n}$ $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$

$$P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \mathbb{Z} \supset \dots \supset \frac{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \dots \supset \frac{P_1^{\alpha_1} \dots P_t^{\alpha_t} \mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{P_1^{\alpha_1} \dots P_t^{\alpha_t} \mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = 0$$

$$\boxed{\text{طول} = \alpha_1 + \dots + \alpha_t}$$

مثال: ليكن $n = 3^1 \cdot 2^2$



مبرهنة: ليكن M مودل كد حلقة A وليكن:

$$(S_1) : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = 0$$

$$(S_2) : M = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_t = 0$$

وكذلك لستين نظاميين (T_1) و (T_2) هما تقطين (S_1) و (S_2) على الترتيب حسب (T_1) و (T_2)

البرهان: لنفرض:

$$\boxed{M_{iJ} = M_{i+1} + (M_i \cap N_J)}$$

$$i = 0, \dots, r-1$$

$$J = 0, \dots, t$$

$$\boxed{N_{iJ} = N_{J+1} + (N_J \cap M_i)}$$

$$i = 0, \dots, r \text{ و } J = 0, \dots, t-1$$

$$M_{i0} = M_{i+1} + (M_i \cap M)$$

$$M_{i0} = M_{i+1} + M_i = M_i$$

1 1

$$M_{i-1,t} = M_i + (M_{i-1} \wedge N_t) = M_i + (M_{i-1} \wedge 0) = M_i$$

$$M_{i0} = M_i = M_{i-1,t}$$

$$M = M_{00} = M_0 > M_{01} \rightarrow \dots \rightarrow M_{0,t} = M_1 > M_{10}$$

$M_{0,t} \dots M_{02} \dots M_{01}$ فيكون
 $(M_{0,t}, \dots, M_{12}, M_{11})$ ثم أصبح بعد ال (i) أصبح ال (j) رأيت

$$M_{i,j} = M_{i+1} + (M_i \wedge N_j) \quad N_{j+1} + (N_j \wedge M_{i+1}) = N_{i,j}$$

$$M_{i,j+1} = M_{i+1} + (M_i \wedge N_{j+1}) \quad N_{j+1} + (N_j \wedge M_{i+1}) = N_{i+1}$$

$$M_{i0} = M_i = M_{i-1,t}$$

$$N_{0j} = N_j = N_{r,j-1}$$

$$M = M_{00} = M_0 > M_{01} > M_{02} \dots > M_{0,t} = M = M_1 >$$

$$> M_{11} > M_{12} > \dots > M_{1,t} = M_2 > \dots > M_{r,t} = 0$$

$$(T_2): N_{00} = M = N_{01} \supset N_{10} \supset \dots \supset N_{r,0} = N_{r,1-1} = N_{r,1}$$

$$\supset \dots \supset N_{r,t} = 0$$

ولكن حسب راجع برهنته من مبرهنات التماثل في المعادلة (2)

$$M_{i,j} = M_{i+1} + \underbrace{(M_i \cap N_j)}_{(5)} \quad N_{j+1} + \underbrace{(N_j \cap M_{i+1})}_{(2)} = N_{i,j}$$

$$(3) M_{i,j+1} = M_{i+1} + \underbrace{(M_i \cap N_{j+1})}_{(6)} \quad N_{j+1} + \underbrace{(N_j \cap M_{i+1})}_{(4)} = N_{i+1,j}$$

$$\frac{(2)}{(4)} \approx \frac{(5)}{(6)} \approx \frac{(1)}{(2)}$$

$$\frac{M_{i,j}}{M_{i,j+1}} \approx \frac{N_{i,j}}{N_{i+1,j}}$$

نجد

إذاً T_1 و T_2 متكافئتان

مبرهنة: ليكن M موردول على حلقة A عند ما كل أبراج هورديان - هورديان M متجانسة.

أريد أن أثبت أن $T_1 = T_2$ ^{كانت} $S_1 \sim S_2$

البرهان: ليكن S_1 و S_2 برجي $M \perp JH$:

البنية T_1 $\rightarrow M_r = 0 \dots \dots \dots M_1 \supset M_0 = M = (S_1)$

البنية T_2 $\rightarrow N_h = 0 \dots \dots \dots N_1 \supset N_0 = M = (S_2)$ حيث $T_1 \sim T_2$

إثبات أن $T_1 = T_2$ فإن هذا البرهان $S_1 = T_1$ ^{أي يكون} $S_2 = T_2$ ^(البرهان الأخير)

(*) إن كل برجي هورديان هورديان هو سلسلة نظامية أخرى (لا تمتلك بنية T_1) لأن:

← ليكن $M_r = 0 \dots \dots \dots M_1 \supset M_0 = M = (S_1)$ ^{هو JH} حيث كل M_i/M_{i+1} بسيطة

نت أن لا تمتلك بنية T_1

ولتوهن: $M_{i+1} \supset N \supset M_i$ حيث N موردول جزئي من M ^{أضغ عدد واحد بين عددين}

$M_i/M_{i+1} \subset N/M_{i+1}$ موردول جزئي

ولكن M_i/M_{i+1} بسيط. (إما ياري ه أو ياري ه الموردول كامل)

إثباتاً: $0 = \frac{M_{i+1}}{M_{i+1}}$ ^{إما} $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ ^{أو} N/M_{i+1}

عند ما N إما تادي M_i أو تادي M_{i+1}

برهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولناخذ N مودول جزئي من M

مودول جزئي مودول القسمة

M على J جوردان هولدر $\Leftrightarrow N$ و M/N على J بر. $J.H$

عندها: $l(M) = l(N) + l(M/N)$

حيث $l(M)$ هو طول بر. $J.H$ M

البرهان: \Leftarrow $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_h = 0$ (5)

بر. $J.H$ جوردان هولدر M (بدي أخذ مودول بر. $J.H$ N ما أخذ تقاطع M مع N)
لناخذ:

$M_0 \cap N \supset M_1 \cap N \supset \dots \supset M_h \cap N = 0$

سلسلة نظامية N (لناخذ $J.H$):
" $N = M_0 \cap N$

$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} = \frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \cong \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N)}{M_{i+1} + (M_i \cap N)} \subseteq \frac{M_i}{M_{i+1}}$

$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \cong \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N)}{M_{i+1} + (M_i \cap N)} \cong \frac{M_{i+1}}{M_{i+1} + (M_i \cap N)}$
حيث $M_i \supset M_{i+1}$
 $\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$

((أن كتبت هكذا لأن مودول جزئي M_i و $M_i \cap N$ مودول جزئي من M_i مجموع مودولين جزئيين من M_i)

إذا P مودول جزئي $\cong P$ $\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \cong P$ (حيث M_i جزئيين من M_i)
 $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ (حيث $M_i \supset M_{i+1}$)

عندها $\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \cong P \subseteq \frac{M_i}{M_{i+1}}$

ولكن $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ يجب أن ≈ 0

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \approx 0$$

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \approx \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

وبنه $\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N}$ يجب

(2) لنأخذ السلسلة:

$$\frac{M}{N} = \frac{M_0 \cap N}{N} > \frac{M_1 \cap N}{N} > \dots > \frac{M_h \cap N}{N} = 0$$

التي من $\frac{M}{N}$ يرجع $\frac{M}{N}$ وأيضاً أنه هو ان هولد

سلسلة تقاسم $\frac{M}{N}$

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{M_{i+1} \cap N}{N}}{\frac{M_{i+1} \cap N}{N}} \approx \frac{M_{i+1} \cap N}{M_{i+1} \cap N}$$

$$\frac{M}{N} \approx \frac{M_{i+1} \cap N}{M_{i+1} \cap N}$$

$\frac{M/N_1}{M_2/N_1} \approx \frac{M}{N_2}$ **

$$\frac{M_{i+1} \cap N}{M_{i+1} \cap N} = \frac{M_i \cap (M_{i+1} \cap N)}{M_{i+1} \cap N} \approx \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

$$\frac{M_i \cap (M_{i+1} \cap N)}{M_{i+1} \cap N} \approx \frac{M_i \cap (M_{i+1} \cap N)}{M_{i+1} \cap N}$$

$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \approx \frac{N_2}{M_1 \cap N_2}$

$$\approx \frac{M_i / M_{i+1}}{M_{i+1} / M_{i+1}}$$

$$\frac{M_i \cap (M_{i+1} \cap N)}{M_{i+1} \cap N}$$

معدل جزئي من $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

$$\frac{\mu}{\mu_{i+1}} \approx p = \frac{M_i / M_{i+1}}{M_i \wedge (M_{i+1} + N) / M_{i+1}} < \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

أي الأضداد الممكنة للتمام I م
لما 0 أو $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

$$\frac{\mu}{\mu_{i+1}} < \frac{M_i}{M_{i+1}} = \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

$\frac{M_i}{M_{i+1}} = 0$

$$\frac{\mu}{\mu_{i+1}} = \frac{M_i + N / N}{M_{i+1} + N / N} \quad \text{ونه} \quad \left(\frac{M_i}{M_{i+1}} \text{ أو } 0 \right)$$

ونه كلا من N و $\frac{M}{N}$ عليهما بر 2 جوطا
هولدر وهو المطوب

ثبت الاتجاه التالي في المعادلة المقابلة
القائمة .

Zeina Brown

الآن نأتي إلى البرهان السابق؛ لدينا: (أريد أن أصل إلى M)

$$(S_N) : N = N_0 > N_1 > \dots > N_r = 0$$

$$(S_{M/N}) : \frac{M}{N} = u_0 > u_1 > \dots > u_h = 0_{M/N} = \frac{N}{N}$$

برهي جولدن هولدر لـ N و M/N عند الترتيب

عندها حسب المقابل بين الودقات الجزئية ما M/N و الودقات الجزئية

ما M التي تكون N نجد أنه يوجد سلسلة

$$\frac{v_i}{N} = u_i \quad \text{حيث} \quad M = v_0 > v_1 > \dots > v_h = N \quad (*)$$

$$v_i \approx \frac{v_i}{N} = \frac{u_i}{u_{i+1}}$$

ولكن $\frac{u_i}{u_{i+1}}$ ليس مهماً يمكننا $i = 0, \dots, h$ إذاً $\frac{v_i}{v_{i+1}}$ ليس مهماً
 يمكننا $i = 0, \dots, h$

يوجد السلسلة (S_N) مع السلسلة $(*)$ فصل كل:

$$M = v_0 > v_1 > \dots > v_h = N = N_0 > N_1 > \dots > N_r = 0$$

نظامية لـ M

كذلك عوامل هذه السلسلة بسيطة وبنه تم انشاء

برج جولدران هولدر لـ M $l(M/N) + l(N) = h + r = l(M)$ طول

(الموردقات المرة)

تعريف ومصطلحات:

(*) لنكن A حلقة عندنا نرض $\prod_{i \in I} A \rightarrow A^I$

* ليكن M مودول على حلقة A ولناخذ $S \subset M$ مجموعة جزئية من M عندها ظرف المودول الجزئي من M الولد S كحمايلي:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i \mid n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in A, s_i \in S, i=1, \dots, n \right\}$$

* ليكن M مودول على حلقة A و S مجموعة جزئية من M عندها:

[1] S مبنية مولدة لـ $M \iff M = \langle S \rangle$

[2] S مبنية مولدة \iff (مجموعة مولدة)

($\forall \alpha_i \in A, \forall s_i \in S: \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n = 0 \implies \alpha_i = 0$)

[3] S مبنية مولدة لـ $M \iff S$ مبنية مولدة و صفرية

* ليكن $m \in M$ نقول عن m انه غير قتل \iff

($\exists \alpha \in A : \alpha \neq 0 : \alpha m = 0$)

$\bigoplus_{i \in I} A = A^{[I]}$

* ليكن A حلقة عندها:

مثال: ليكن V فضاء شعاعي على حقل F عندها غير القتل الولد

في V هو 0 لان ليكن $m \in V$ غير قتل عندها

$\exists d \in F^* : \dots \alpha m = 0$

ومنه $\alpha^{-1} \in F$ اذا ضرب الطرفين بـ α^{-1} نجد

$\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot m = 0$

$m = 0$

مثال 2: ليكن G زمرة تبديلية متناهية عندها

كل عنصر m عندها G هو قتل لان:

$$\left. \begin{array}{l} n = 5 \\ g \in G \end{array} \right\} 5 \cdot g = 0$$

$$|G| \cdot g = 0 \quad \forall g \in G$$

$$\text{Card } G = |G| \quad \text{حيث}$$

(إذا كان وجود وحدة في G)

ملاحظة: I ضمنية

$$A^I = A^{[I]}$$

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A وليكن S مجموعة جزئية من M .

$$M \cong A^{[S]} \iff M \downarrow S$$

البرهان:

[\Leftarrow] لتأخذ العلاقة: $\varphi: A^{[S]} \rightarrow M$

$$\begin{pmatrix} \alpha_s \end{pmatrix}_{s \in S} \rightarrow \sum_{s \in S} \alpha_s \cdot s$$

إن φ تناك وظيفية. و φ غامر لأن S مولدة و φ متباين لأن S حر.

[\Rightarrow] لتأخذ العلاقة $\{e_s\}_{s \in S}$ حيث:

$$e_s = (e_{si})_{i \in S} = \begin{cases} e_{ss} = 1 & s = i \\ 0 & i \neq s \end{cases}$$

إن $\{e_s\}_{s \in S}$ تشكل قاعدة لـ $A^{[S]}$ (تدعى القاعدة القانونية)

مثلاً: $(0, 5, 3, 0, \dots)$ $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$

$= 5(0, 1, 0, \dots) + 3(0, 0, 1, \dots)$ $\alpha_1(1, 0, 0, \dots) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots)$

من مَرَضِ المبرهنة لدينا التماثل التالي

$$\phi : A^{[S]} \rightarrow M$$

ولدينا قاعدة قانونية $\{e_s\}_{s \in S}$ لـ $A^{[S]}$

ان $\{\phi(e_s)\}_{s \in S}$ تشكل قاعدة لـ M

$$* \quad m \in M \Rightarrow \phi^{-1}(m) \in A^{[S]} \Rightarrow \phi^{-1}(m) = \sum_{s \in S} \alpha_s \cdot e_s$$

$$\Rightarrow m = \sum \alpha_s \cdot \phi(e_s)$$

$$* \quad \sum \alpha_s \cdot \phi(e_s) = 0 \Rightarrow \phi(\sum \alpha_s \cdot e_s) = 0$$

$$\sum \alpha_s (e_s) = 0 \Rightarrow \alpha_s = 0 \quad \forall s$$

بيان في مهارت هرة