/ /

ملاحظة أخرى لدينا ... $\forall i \in I$

يكون $h \circ k = 1$ وهو المطلوب

2015 11/18 المحاضرة 12

الجداء المرافق:

تعريف: ليكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A

نقول عن $(C, \{f_i\}_{i\in I})$ حيث C هو A مودول

و $f_i : M_i \to C$ تشاكل مودولي ($\forall i\in I$)

إنه جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

إذا تحقق ما يلي:

لأجل كل $(N, \{g_i\}_{i\in I})$ حيث N هو A مودول

$g_i : M_i \to N$ تشاكل ($i\in I$)

$$\begin{tikzcd} N & \\ M_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "f_i"'] & C \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

فإنه يوجد تشاكل وحيد $h: C \to N$ بحيث

$$h\circ f_i = g_i \ , \forall i\in I$$

المجموع المباشر:

ليكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من A - مودول

لنعرف المجموعة: $\bigoplus_{i\in I} M_i$ كما يلي

الموضوع: ....

/ /

$$x \in \bigoplus M_i \iff \begin{cases} x \in \prod_{i\in I} M_i \quad (1. \\ \text{أي } x=(m_i)_{i\in I} \text{ حيث } m_i \in M_i \\ \text{2. كل } m_i \text{ أصفار عدا عدد منتهي} \end{cases}$$

إن $(\bigoplus M_i, +, \cdot)$ A موديول وحدوية جزئي من $\prod M_i$

نذكر $\bigoplus_{i\in I} M_i$ مجموع مباشر للاسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

في حال $J=1$

$$f_1 : M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$$

$$m_1 \longrightarrow m_1 + 0$$

$$(m_1, 0)$$

الاحتواء القانوني

$$\boxed{\begin{aligned} f_J &: M_J \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \\ m_i &\longrightarrow (m_i) = (0, \dots, 0, \underbrace{m_J}_{\text{مركبة } J}, 0, \dots) \end{aligned}}$$

في حال $J=2$

$$f_2 : M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$$

$$m_2 \longrightarrow 0 + m_2 + 0$$

$$(0, m_2, 0)$$

إن f_J تشاكل موديولي متباين (وحدية)

يرمز له f_J بـ in_J ويدعى التباين القانوني على المركبة J الاحتواء القانوني

الموضوع: ....

/ /

مبرهنة: $\left(\bigoplus M_i \,,\, \{in_i\}_{i\in I}\right)$ يشكل جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

البرهان: لأجل كل $\left(N \,,\, \{g_i\}_{i\in I}\right)$ حيث N هو A موديول
$g_i : M_i \to N$ تشاكل $(i\in I)$

والمطلوب: إيجاد

$$h\circ f_J = g \quad \text{حيث} \quad h : \bigoplus M_i \to N \qquad \forall J\in I$$

$$\begin{tikzcd}
M_J \arrow[r, "f_J"] \arrow[d, "g_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dashed, "h"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

نعرف العلاقة الآتية:

$$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$$

$$(m_i) \longrightarrow \underbrace{\sum g_i(m_i)}$$

معرف منتهي لأن $(m_i)\in \bigoplus_{i\in I} M_i$

إذاً كل المركبات أصفار إلا عدد منتهي منها

$M_1\oplus M_2\oplus M_3 \to N$

$(m_1, m_2, m_3) \longrightarrow g_1(m) + g_2(m) + g_3(m) \in N$

$\hat{m}_1$

$h(m_1+m_2+m_3 = g m_1) \in N$

إن h) تشاكل (واضح)

$$h\circ in_i(m_i) = h(in_i(m_i)) \quad (\ldots$$
$$= h(\ldots,0,m_i,0,\ldots)$$
$$= g_i(m_i) \quad \text{مركبة } i$$

ومنه مهما تكن $m_i\in M_i$ فإن

$$h\circ in_i(m_i) = g_i(m_i)$$

- إن h وحيد لأن:

لنفرض وجود

$$K : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$$

تحقق:

$$K\circ in_i = g_i \qquad \forall i\in I$$

ومنه

$\forall m_i \in M_i$:

$k \circ in_i(m_i) = g_i(m_i) = h \circ in_i(m_i)$

$k(\_ 0, m_i, 0 \_) = h(\_ 0, m_i, 0 \_)$

$h((m_i)_{i\in I}) = (0, \dots 0, m_{10}, 0, m_{12}, 0, 0, m_{15}, 0, \dots)$

$= h[(0, \dots, 0, m_{10}, 0, \dots) + (\dots, 0, m_{12}, 0, \dots)$
$+ (\dots, 0, m_{15}, 0, \dots)]$

$= h(\dots 0, m_{10}, 0 \dots) + h(\dots, 0, m_{12}, 0, \dots) + h(\dots, 0, m_{15}, 0, \dots)$

$= k(\dots, 0, m_{10}, 0, \dots) + k(\dots, 0, m_{12}, 0, \dots) + k(\dots, 0, m_{15}, 0, \dots)$

$= k(\dots, m_{10}, 0, m_{12}, 0, m_{15}, 0 \dots)$

$h((m_i)_{i\in I}) = h \underbrace{\sum}_{\text{مجموع منتهي}} (\dots, 0, m_i, 0, \dots)$

$= \sum h(\dots, 0, m_i, 0, \dots)$

h تشاكل

$= \sum k(\dots, 0, m_i, 0, \dots)$

$= k(\underbrace{\sum}_{\text{مجموع منتهي}} (\dots, 0, m_i, 0, \dots))$

$= k((m_i)_{i\in I})$

/ /

مبرهنة: إن أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ يماثل $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I})$. البرهان وظيفة.

المحاضرة 13 2015/11/22

مراجعة: $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من A مودول

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, "h \text{ وحيد}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

المجموع المباشر الداخلي:

تعريف: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من M

نعرف: $J_i: M_i \longrightarrow M$

$m_i \longrightarrow m_i$

J_i تشاكل مودولي متباين مهما يكن $i\in I$

نقول عن M أنه مجموع مباشر داخلي إذا كان $\boxed{M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i}$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "J_i"] \arrow[d, "in_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

(جداء مرافق)

لندرس شكل عناصر M: لدينا

$(M, \{J_i\}_{i\in I})$ ثنائية من M هو A مودول

$J_i: M_i \longrightarrow M$

تشاكلات مودولية $\forall i\in I$

من كون $\bigoplus_{i\in I} M_i$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ إذاً يوجد

$h : \bigoplus M_i \longrightarrow M$ تشاكل وحيد ، $h\circ in_i = J_i$ $\forall i\in I$

$$(m_i)_{i\in I} \longrightarrow \sum_{\text{منتهي}} J_i(m_i) = \sum_{\text{منتهي}} m_i \in \sum_{i\in I} M_i$$

لأن M مجموع مباشر داخلي لـ $\{M_i\}_{i\in I}$ إذاً h تقابل

ولنبرهن ذلك

h غامر :

متباين
$\sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I} m_i'$
$\to \sum (m_i - m_i') = 0$
$\to (m_i - m_i') = 0$

$$\forall m\in M : \exists (m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i :$$

$$h((m_i)_{i\in I}) = \sum_{\text{منتهي}} m_i = m$$

- h متباين : إذاً $\underset{\text{صفر}}{0}$ يكتب كتركيب خطي بأسلوب وحيد

إذاً كل عنصر من M يكتب وبأسلوب وحيد من الشكل التالي $\sum_{i\in I,\ \text{منتهي}} m_i$

أي $\forall m\in M : \exists m_i \in M_i$

حيث $m = \sum_{\text{منتهي}} m_i$ كتابة وحيدة.

$$h : \bigoplus M_i \longrightarrow \sum_{i\in I} M_i$$

مبرهنة: (بدون برهان): ليكن M مودول على A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من M عندها القضايا التالية متكافئة:

1) $\sum_{i\in I} M_i$ مجموع مباشر داخلي لـ $\{M_i\}_{i\in I}$

2) $\sum_{i\in I} m_i = 0 \Longrightarrow \forall i\in I \; ; \; m_i = 0$

3) $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = 0$

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A وليكن N A-مودول عندها:

1) $\mathrm{Hom}_A\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(N, M_i)$

زري

2) $\mathrm{Hom}\left(\bigoplus M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$

1) $\delta : \mathrm{Hom}\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}_A(N, M_i)$

$$f \longrightarrow \delta(f) = (p_i^r \circ f)_{i\in I}$$

:8

- $\boxed{\delta \text{ تطبيق}}$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i^r"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

$$f_1 = f_2 \Longrightarrow p_i^r \circ f_1 = p_i^r \circ f_2 \quad \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow (p_i^r \circ f_1)_{i\in I} = (p_i^r \circ f_2)_{i\in I}$$

$$\delta(f_1) = \delta(f_2)$$

- $\boxed{\delta \text{ تشاكل زمري}}$

$$\delta(f_1+f_2) = \left(p_i^r \circ (f_1+f_2)\right)_{i\in I} = (p_i^r \circ f_1)_{i\in I} + (p_i^r \circ f_2)_{i\in I}$$

$$= \delta(f_1) + \delta(f_2)$$

$\boxed{\delta \text{ تقابل}}$: ليكن $(g_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(N, M_i)$ ومنه

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g_i"] \arrow[dr, "h"'] & M_i \\ & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[u, "p_i^r"'] \end{tikzcd}$$

من كون $\prod\limits_{i\in I} M_i$ هو الجداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

إذاً يوجد تشاكل وحيد

$$h \in \mathrm{Hom}\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) : p_i^r \circ h = g_i \quad \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow (p_i^r \circ h)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$$

$$\delta(h) = (g_i)_{i\in I}$$

$$2)\quad \mathrm{Hom}\left(\bigoplus M_i, N\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$$

الموضوع: ....

/ /

$$f \longrightarrow \delta(f) = (f \circ in_i)$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus M_i \arrow[r, "f"] & N \\ M_i \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

المطلوب اثبات δ - تابع + تشاكل زمري + تقابل

<u>الحل</u> : δ تطبيق لأن :

$$f_1 = f_2 \Longrightarrow f_1 \circ in_i = f_2 \circ in_i \quad \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow (f_1 \circ m_i)_{i\in I} = (f_1 \circ m_i)_{i\in I} \Longrightarrow \delta(f_1) = \delta(f_2)$$

$$\forall f_1, f_2 \in Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i , N)$$

$$\delta(f_1 + f_2) = ((f_1 + f_2)\circ in_i)_{i\in I} = (f_1 \circ in_i)_{i\in I} + (f_2 \circ in_i)_{i\in I}$$

$$= \delta(f_1) + \delta f_2)$$

$\bigoplus M_i$ جداء مرافق للاسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

$$\forall (g_i) \in \prod Hom_A(M_i, N) \Rightarrow \exists h \in Hom_A(\bigoplus M_i, N)$$

h وحيد

$$h \circ im_i = g_i \quad \forall i \in I$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus M_i \arrow[r, "h"] & N \\ M_i \arrow[u] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

$$(h \circ in_i) = (g_i)_{i\in I} \Rightarrow \gamma(h) = (g_i)_{i\in I}$$

وبالتالي γ غامر ومتباين

(المتتاليات المشطورة)

تعريف: لتكن $0 \to M \xrightarrow{f} N \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \to 0$ (*)

متتالية قصيرة.

نقول عن (*) أنها مشطورة إذا:

وجد تشاكل: $s : P \to N$

حيث $g \circ s = 1$

مبرهنة: لتكن $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ (*) متتالية قصيرة

تامة عندها

(*) مشطورة $\iff N = N_1 \oplus \ker g$

من أجل N_1 مودول جزئي من N محدد

البرهان: لدينا (*) مشطورة أي: $0 \to M \to N \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \to 0$

حيث $g \circ s = 1$، لتكن $n \in N$ عندها

$$n - s(g(n)) \in N$$

لنبرهن أن: $n - s(g(n)) \in \ker g$

$$g(n - s(g(n))) = g(n) - g(s(g(n)))$$
$$= g(n) - g(n) = 0$$

إذاً: $n - s(g(n)) \in \ker g$

$n - s(g(n)) = a$

$n = \underbrace{a}_{\in \ker g} + \underbrace{s(g(n))}_{\in \operatorname{Im} s}$

$N \subseteq \ker g + \operatorname{Im} s$

ومنه

$$N = \operatorname{Im} s + \ker g$$

لنبرهن الآن أن: + هي $\oplus$ أي

$x \in \operatorname{Im} s \cap \ker g$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists p \in P & : s(p) = x \\ g(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 = g(x) = g(s(p)) = p$$

إذاً $x = 0$

هذا يعني أن $0 = \ker g \cap \operatorname{Im} s$

نجد مما سبق أن $N = \operatorname{Im} s \oplus \ker g$

$(\Longrightarrow)$ اثبات العكس: $N = N_1 \oplus \ker g$

والمطلوب: إيجاد تشاكل $s : P \to N$

حيث $g \circ s = 1$

لنأخذ $g|_{N_1} : N_1 \to P$

تشاكل مقصور على N_1 ولنبرهن أن $g|_{N_1}$ هو تقابل. (مقصور g على N_1)

نكون عكسه

- $g|_{N_1}$ غامر: $\forall p \in P \xRightarrow{g \text{ غامر}} \exists n \in N : g(n) = p$

ولكن $n = n_1 + a$ حيث $n_1 \in N_1$ و $a \in \ker g$

ومنه $g(a)$ معدومة

$$p = g(n) = g(n_1 + a) = g(n_1) + 0$$

$$= g|_{N_1}(n_1) + 0 = g|_{N_1}(n_1)$$

إذاً $g|_{N_1}$ غامر

الموضوع: ....

/ /

- $g|_{N_1}$ متباين لأن:

$n_1 \in \ker g|_{N_1} \to n_1 \in N_1 : g|_{N_1}(n_1) = 0$

$\to n_1 \in N_1 \; ; n_1 \in \ker g$

$\to n_1 \in N_1 \wedge \ker g = 0$

$\to n_1 = 0$

وبالتالي $g|_{N_1}$ تماثل.

لنفرض: $s = (g|_{N_1})^{-1}$

$s : P \to N$ تشاكل

نحقق ما يلي:

$g \circ s(p) = g(s(p))$

$= g|_{N_1}(s(p)) = g|_{N_1} \circ s(p)$

$= g|_{N_1} \circ (g|_{N_1})^{-1} \cdot (p) = p$

نتيجة، لنكن المتتالية التالية:

$(*) \quad 0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$

تامة ومنشطرة.

لدينا: $N = \operatorname{Im} s \oplus \ker g$

$\ker g = \operatorname{Im} f$ (..

... (f متباين و g غامر

لدينا : $g \circ s = 1$

١) إن s متباين :

$$s(p_1) = s(p_2) \Rightarrow g(s(p_1)) = g(s(p_2))$$
$$\Rightarrow p_1 = p_2$$

$$P \xrightarrow{s} \operatorname{Im} s \subseteq N$$

ثانياً كل متباين يصور كل $p \in P$ بـ $s(p)$

يطابق بين P و $\operatorname{Im} s$ أي $p \equiv s(p)$ أي

$$\operatorname{Im} s \cong P$$

١) f متباين $\Leftarrow$ $N \cong \operatorname{Im} f$

إذاً $M \cong \ker g$

إذاً $N \cong M \oplus P$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$a \to (a,0)$

$a \equiv (a,0)$

$i = (0,1)\ ,\ i^2 = -1$

$(a,b) \equiv (a,0) + (0,b)$

$\equiv a + b(0,1) = a + bi$

$$0 \to M \xrightarrow{i} M \oplus P \to P \to 0$$

$m+p \to p$

$m \to m$

$$m \in M \xrightarrow{f} \underbrace{f(m)}_{= m} \in M$$

$n \in N \to n = s(p) + a \quad , a \in \ker g$

$p \in P$

$\downarrow g$

$$g(n) = g(s(p)) + g(a) = p + 0$$

$$g : s(p) + a \to p \equiv s(p) \in P$$

$$0 \to M \xrightarrow{i} M \oplus P \xrightarrow{J} P \to 0$$

$m \to m$

$m + p \to p$

المودولات النوثرية والآرتينية

تعريف: المودول النوثري والآرتيني: ليكن M مودول على حلقة A

M نوثري $\Leftrightarrow$ لكل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M
$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$
فإنه يوجد $r \in N$ بحيث:
$M_r = M_i \quad , \forall i \geq r$

M آرتيني $\Leftrightarrow$ لكل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M
$M_0 \supset M_1 \supset \dots$
يوجد عدد طبيعي $r \in N$ بحيث
$M_r = M_i \quad , \forall i \geq r$

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها:
M نوثري $\Leftrightarrow$ M يحقق الشرط الأعظمي. (أي كل أسرة من المودولات الجزئية من M تملك عنصر أعظمي بالنسبة للاحتواء)

M آرتيني $\Leftrightarrow$ M يحقق الشرط الأصغري (وظيفة)

البرهان: $(\Leftarrow)$ لتكن Γ أسرة من المودولات الجزئية من M

. وليكن $M_0 \in \Gamma$ $\Leftarrow$ إذا كان M_0 اعظمي تم المطلوب
. وإلا يوجد $M_1 \in \Gamma$ بحيث $M_0 \subset M_1$ إذا كان M_1
اعظمي تم المطلوب وإلا فإنه يوجد $M_2 \in \Gamma$ بحيث
$M_0 \subset M_1 \subset M_2$ وبإعادة العملية نحصل على سلسلة
$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ سلسلة من المودولات الجزئية من M_i
. لكن M نوثري إذاً يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث $M_r = M_i$
مهما يكن $i \geq r$ إذاً M_r عنصر أعظمي.

$\Longleftarrow$ [لتكن $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ $(*)$ سلسلة من المودولات
. الجزئية من M عندها المودولات $M_0, M_1, \ldots$ تشكل
. أسرة من المودولات الجزئية من M ، لنفرض M_r
هو عنصر أعظمي من هذه الأسرة إذاً السلسلة $(*)$
. تثبت من الحد M_r (كونه عنصر اعظمي)

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها:
. 1) M نوثري $\Leftarrow$ كل مودول جزئي من M نوثري
. 2) M آرتيني $\Leftarrow$ كل مود جزئي من M آرتيني

3) M مودول نوثري ~~...~~ ليكن N مودول جزئي من M
. عندها M/N نوثري ~~...~~

4) M آرتيني وَ N مودول جزئي من M عندها M/N آرتيني

(5) ليكن N مودول جزئي من M بحيث تحقق ما يلي:
N نوثري و M/N نوثري، عندها M نوثري

(6) N آرتيني و M/N آرتيني $\Longleftarrow$ M آرتيني

البرهان: 1): ليكن N مودول جزئي من M
لتكن $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$
سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية.
إذاً هي سلسلة من المودولات الجزئية من M ولكن:
M نوثري $\Longleftarrow$ السلسلة تثبت عند حد معين $r \in N$

— . — . — . — . —

3) لتكن $P_0 \subset P_1 \subset \dots$ سلسلة من المودولات الجزئية من M/N
حسب التقابل بين المودولات الجزئية من M/N والمودولات الجزئية من M التي تحوي N نحصل:
$* \; M_0 \subset M_1 \subset \dots$
سلسلة من المودولات الجزئية من M
ولكن M نوثري إذاً $(*)$ تثبت عند حد معين $r \in N$
أي $M_r = M_i \quad \forall i \geq r$
ومنه بالتقابل نجد
M/N نوثري أي $\exists r \in N : P_r = P_i \; ; \; \forall i \geq r$

— . — . — . — . — . —

(5) * ليكن $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ سلسلة من المودولات الجزئية من M عندها:

$$M_0 \cap N \subset M_1 \cap N \subset \dots$$

سلسلة من المودولات الجزئية من N ولكن N نوثري إذاً يوجد $t \in \mathbb{N}$ بحيث:

$M_i \cap N = M_t \cap N$ مهما يكن $i \geq t$

كذلك: تشاكل الغمر القانوني $\pi : M \to M/N$

الصورة بواسطة π بالتشاكل $(*)$ نحصل على:

$\pi(M_0) \subset \pi(M_1) \subset \pi(M_2) \subset \dots$ سلسلة متزايدة من M/N لكن M/N نوثري

$$\exists k \in \mathbb{N} : \pi(M_k) = \pi(M_i) \quad \forall i \geq k$$

لنرمز $r = \max(t, k)$ ولنبرهن أن $M_r = M_i$

مهما يكن $i \geq r$، لدينا $M_r \subset M_i$; $\forall i \geq r$

ولنبرهن الاحتواء الآخر:

$$x \in M_i \Rightarrow \pi(x) \in \pi(M_i) = \pi(M_r)$$

$$\Rightarrow \exists y \in M_r : \pi(x) = \pi(y)$$

$$x + N = y + N$$

$\boxed{x - y \in N}$ (1 بالضرورة ومنه

من جهة ثانية:

$$\left.\begin{array}{l} x \in M_i \\ y \in M_r \subset M_i \end{array}\right\} \Rightarrow x - y \in M_i$$

بجـ. س 1) ت 2) أن

$$x-y \in M_1 \cap N = M_r \cap N$$

إذاً $x-y \in M_r$ ولدينا $y \in M_r$ $\Leftarrow$ $(x-y)+y \in M_r$

أي $x \in M_r$

أبراج جوردان هولدر:

تعريف: ليكن M مودول على حلقة A

M مودول بسيط $\Leftrightarrow$ أي مودول جزئي من M إما يساوي M أو يساوي 0

تعريف: لتكن: $M_0 = M \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_r = 0$
((سلسلة منتهية من المودولات الجزئية من M))

ندعو S برج من المودولات الجزئية
أو سلسلة نظامية من المودولات الجزئية.

ملاحظات: 1] ندعو r بطول البرج (S) أو طول السلسلة (S)

2] $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_r$ حدود السلسلة (S)

3] ندعو: M_i/M_{i+1} تدعو عوامل السلسلة S

$\forall i = 0, 1, 2, \ldots$

وظيفة. $M = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ ارسم الأبراج الممكنة

المحاضرة 16

(4). لتكن $(S): M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$

سلسلة من الموديولات الجزئية من M

نقول عن السلسلة النظامية (T) أنها تنقطية لـ S

إذا كانت كل حدود S تظهر في السلسلة (T)

(السلسلة T أكبر من S)

مثلاً: $S: M = M_0 \supset M_1 \supset 0$

(نظامية أي تبدأ بالـ M وتنتهي بالصفر)

$M_0 = M \supset N_1 \supset M_1 \supset N_2 \supset 0$: (T) تنقطية لـ (S)

(ب). لتكن $(S_1): M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$

(طولها r)

$(S_2): M = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_t = 0$ (طولها t)

سلسلتين نظاميتين لـ M نقول عن (S_1) و (S_2)

إنهما تكافئيتين إذا تحقق ما يلي:

(1) $r = t$ (طول S_1 = طول S_2)

(2) $\exists\, \sigma \in S_r : \frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \frac{N_{\sigma(i)}}{N_{\sigma(i+1)}}$

$S_1: M = M_0 \supset M_1 \supset 0$; $\frac{M_0}{M}, \frac{M_1}{0}$ (العوامل)

$S_2: M = N_0 \supset N_1 \supset 0$; $\frac{M}{N_1}, \frac{N_1}{0}$ (العوامل)

$S_2 = \left\{ \{1,2\} \xrightarrow{\text{تقابل}} \{1,2\},\ 1 \to 1,\ 2 \to 2 \right.$ ، $\{1,2\} \xrightarrow{\text{تقابل}} \{1,2\},\ 1 \to 2,\ 2 \to 1 \}$ (زمرة التباديل)

يعني الشرط الثاني: عوامل السلسلة S_1 = عوامل السلسلة S_2، بغض النظر عن الترتيب

وأضربين الاعتبار التكرار

نستخرج العوامل عن طريق تقسيم الحد الأول على الحد الثاني

كل زمرة لها الشكل $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ هي دوارة

الموضوع: ....

تعريف برج جوردان - هولدر: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن:

$(S): M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = 0$ (طوله r)

سلسلة نظامية لـ M. نقول عن (S) انها برج جوردان هولدر إذا كانت كل عوامل السلسلة هي مودولات بسيطة.

أي: $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ مودول بسيط مهما يكن $(i = 0, 1, \dots, r-1)$

مثال: $M = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ زمرة تبديلية دوارة ومنه M هو ($\mathbb{Z}$-مودول)

كل زمرة تبديلية هي $\mathbb{Z}$-مودول

$M_0 = M = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \supset 0 = M_1$

برج طوله واحد.

العوامل له هي عوامل بسيطة.

$\frac{M_0}{M_1} = \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}{0} = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ ((ومنه يكون هو برج جوردان))

مثال: $M = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ تبديلية المقصد أنه لدينا 8 عناصر دوارة.

هي ($\mathbb{Z}$-مودول)

الأبراج الممكنة لبنية الزمرة هي:

نكتب الزمر الجزئية التي لها نفس المقام لـ $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

(S_1) $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$ — عامل $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

(S_2) $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$ — عامل $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$، عامل $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(S_3) $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$ — عامل $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$، عامل $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

حيث: $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \cong \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ (الزمرة الجزئية)

لا هي ليست الزمرة الجزئية

لكن هي تماثل الزمرة الجزئية $\frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

لذلك نستطيع بدل $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ نضع $\frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

العوامل بسيطة عندما يكون المتتام أولي مثلاً $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ، $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$

الموضوع: ....

$$(S_4):\ \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \supset 0$$

العامل $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

نلاحظ أن (S_2) و (S_3) متكافئة (لها نفس الطول ونفس العوامل)

(S_4) هي J.H (لأنه الوحيد الذي توجد له عوامل بسيطة)

3) M زمرة 6 عناصر تبديلية ولكن ليست دوارة

$$M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$$

أوجد استخراج الزمر الجزئية لـ M:

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \{0\} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \quad , \quad H_2 = \{0\} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$$

$(S_1):\ M \supset 0$ المتعدد الأبراج

(نستخرج الزمر الجزئية لكي أرسم الأبراج)

$$(S_2):\ M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \supset H_1 \supset 0$$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$(S_3):\ M \supset H_2 \supset 0$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

حيث S_2 و S_3 ابراج جوردان هولدر

إذا كان $M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

$H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \{0\} \times \{0\}$ ، $H_3 = \{0\} \times \{0\} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

$H_2 = \{0\} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \{0\}$

$M = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ زمرة دوارة

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$ حيث (p أعداد أولية)

نظرية البواقي الصينية تقول:

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p_2^{\alpha_2}\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{\alpha_t}\mathbb{Z}}$$

(نبحث عن برج لكي نجد فيه العوامل بسيطة)

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1^2\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \cdots \supset \frac{p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1^{\alpha_1}p_2\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

$\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$ دوارة وبسيطة ، $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}$ نأخذ كل p_2

نحصل على عوامل بسيطة تكون $\frac{M_i}{M_{i+1}} = \frac{\mathbb{Z}}{p_i\mathbb{Z}}$ حيث p_i أولي

الموضوع: .... / /

$$\frac{\mathbb{Z}}{p_2\mathbb{Z}}$$

$$\supset \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \dots \supset \frac{p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_{t-1}}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \supset \frac{p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = 0$$ تكملة $\supset \dots$

$$\boxed{\text{طول} = \alpha_1 + \dots + \alpha_t}$$

مثال: ليكن: $n = 3^1 \cdot 2^2$:

تقسيمات ... للطرق: $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supset \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supset \frac{3\cdot 2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supset \frac{3\cdot 2^2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = 0$

هاد ما نبو نظمية (لأنه كل هو الأكبر)

$\downarrow \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ $\quad\downarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ $\quad\downarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

(فيكون جوردان هولدر، وذلك كان عوامله بسيطة)

مبرهنة: ليكن M مودل على حلقة A ولتكن:

$$(S_1) : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = 0$$

$$(S_2) : M = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_t = 0$$

سلسلتين نظاميتين عندها يوجد تقطيعين (T_1) و (T_2) هما تقطيعين لـ (S_1) و (S_2) على الترتيب بحيث (T_1) تكافئ (T_2)

البرهان: لنفرض:

مودول $\boxed{M_{iJ} = M_{i+1} + (M_i \cap N_J)}$

$i = 0, \dots, r-1$

$J = 0, \dots, t$

حيث

و $\boxed{N_{iJ} = N_{J+1} + (N_J \cap M_i)}$

حيث $i = 0, \dots, r$ و $J = 0, \dots, t-1$

$$M_{i0} = M_{i+1} + (M_i \cap M)$$

$$= M_{i+1} + M_i = M_i$$

الموضوع: $N_0 \supset N_1$

/ /

$$M_{i-1,t} = M_i + (M_{i-1} \cap N_t) = M_i + (M_{i-1} \cap 0) = M_i$$

$$M_{i0} = M_i = M_{i-1,t}$$

$$M = M_{00} = M_0 \supset M_{01} \supset \dots \supset M_{0,t} = M_1 \supset M_{10}$$

(i, J) $(1-1, t)$

$((\dots M_{1t} \dots, M_{12}, M_{11}$ $\quad M_{0t} \dots M_{02}, M_{01}$

$$M_{iJ} = M_{i+1} + (M_i \cap N_J) \qquad N_{J+1} + (N_J \cap M_i) = N_{iJ}$$

$$(M_i \cap N_J)$$

$$M_{i, J+1} = M_{i+1} + (M_i \cap N_{J+1}) \qquad N_{J+1} + (N_J \cap M_{i+1}) = N_{i+1}$$

$$(M_i \cap N_{J+1}) + (N_J \cap M_{i+1})$$

استنتجنا

$$\boxed{M_{i0} = M_i = M_{i-1,t}}$$ لكل $i = 0, \dots, r$

كذلك: $$\boxed{N_{0J} = N_J = N_{r, J-1}}$$

نحصل على:

$T_1)$

$$M = M_{00} = M_0 \supset M_{01} \supset M_{02} \supset \dots \supset M_{0t} = M_{1-1,t} = M_1 \supset$$

$$\supset M_{11} \supset M_{12} \supset \dots \supset M_{1t} = M_2 \supset \dots \supset M_{r,t} = 0$$

$(T_2):\quad N_{00} = M = N_0 \supset N_{10} \supset \dots \supset N_{r,0} = N_{r,1-1} = N_{1}$

$\supset \dots \supset N_{rt} = 0$

ولكن حسب رابع برهنة من برهنات التماثل في المحاضرة 7

(1) $M_{ij} = M_{i+1} + \underbrace{(M_i \cap N_j)}$ $\quad$ (5) $\quad N_{j+1} + \underbrace{(N_j \cap M_i)} = N_{ij}$ (2)

$(M_i \cap N_j)$

(3) $M_{i,j+1} = M_{i+1} + \underline{(M_i \cap N_{j+1})}$ $\quad$ (6) $\quad N_{j+1} + \underline{(N_j \cap M_{i+1})} = N_{i+1,j}$ (4)

$(M_i \cap N_{j+1}) + (N_j \cap M_{i+1})$

$$\frac{(2)}{(4)} \simeq \frac{(5)}{(6)} \simeq \frac{(1)}{(2)}$$

نجد

$$\boxed{\frac{M_{ij}}{M_{i,j+1}} \simeq \frac{N_{ij}}{N_{i+1,j}}}$$

إذاً T_1 و T_2 متكافئتين

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A عندها كل أ براج 2
جوردان - هولدر، لـ M متكافئة.

أريد أن أثبت أن $S_1 = T_1$ و $S_2 = T_2$ ← $S_1 \sim S_2$ كافئ

البرهان: ليكن S_1 و S_2 برجي JH لـ M:

$$(S_1) : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = 0 \to T_1 \text{ المقابلة}$$

$$(S_2) : M = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_h = 0 \to T_2 \text{ المقابلة}$$

بحيث $T_1 \sim T_2$

إنما أثبت أن $S_1 = T_1$ فإن هذا البرج لا يملك تنقية فعلية (البرج أعظمي) أي تكون لا تستطيع أن أضع عدد بينه

1) إن كل برج جوردان هولدر هو سلسلة نظامية أعظمية (لا يملك تنقية فعلية لها) لأن:

⟸ [ليكن $(S_1) : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = 0$ هو JH

بحيث كل M_i / M_{i+1} بسيطة

نثبت أنه لا يملك تنقية فعلية لها

ولنفرض: $M_i \supset \underline{N} \supset M_{i+1}$ حيث N مودول جزئي من M.

أضع عدد واحد بين عددين

$M_i / M_{i+1} \supset N / M_{i+1}$ مودول جزئي

ولكن M_i / M_{i+1} بسيط. (إما يساوي 0 أو يساوي المودول كامل)

إذاً: إما $N / M_{i+1} = \dfrac{M_{i+1}}{M_{i+1}} = 0$ أو $\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$

عندها N إما تساوي $\underline{M_i}$ أو تساوي $\underline{M_{i+1}}$

هذه المبرهنة موجودة في الكتاب لكن غير مطلوب مع الكتاب
مطلوب مع المحاضرة فقط

الموضوع: Zeina Brown

وبالتالي لا توجد تقطيعة فعلية لـ (S_1).

$\Longrightarrow$ [لنوضح أن $S: M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_t = 0$

سلسلة تلاصية $\boxed{\text{أعظمية}}$.

لنثبت أن M_i / M_{i+1} بسيط لأجل كل i

لنفرض جدلاً أن: M_i / M_{i+1} ليس بسيطاً

عندها: نفرض أنه يوجد مودول P_i بين الصفر و الـ $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

$$\frac{M_{i+1}}{M_{i+1}} = 0 \subsetneqq \underset{\downarrow}{P_i} \subsetneqq \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

نزواني جزئي (حد فعلي)

عندها حسب التقابل بين المودولات الجزئية من M_i / M_{i+1}

مع المودولات الجزئية من M_i التي تحوي M_{i+1}

نجد أنه يوجد مودول جزئي من M هو N بحيث:

((P_i يقابل N ، $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ يقابل M_i و $\frac{M_{i+1}}{M_{i+1}}$ يقابل M_{i+1}))

$$M_{i+1} \subsetneqq N \subsetneqq M_i$$

وهذا يناقض كون (S) أعظمية إذاً الفرض الجدلي خاطئ.

إذاً: كل برج جوردان هولدر هو سلسلة تلاصية أعظمية.

لدينا (S_1) و (S_2) برجي جوردان هولدر حسب المبرهنة

السابقة توجد (T_1) و (T_2) تقطيعة لـ (S_1) و (S_2)

مع الترتيب بحيث: T_1 و T_2 متكافئتين ولكن:

(S_1) و (S_2) برجي J.H إذاً: $(T_1) = (S_1)$ و $(S_2) = (T_2)$

(لأن ليس لدينا تقطيعة فعلية فيكون $S_1 = t_1$ و $S_2 = t_2$)

ويتم المطلوب بملاحظة أن T_1 و T_2 متكافئتين.

ومنه S_1 و S_2 متكافئتين.

الموضوع: ....

/ /

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ N مودول جزئي من M

عندها:

مودول الجزئي ↑ مودول القسمة ↑

M عليه برج جوردان هولدر $\Longleftrightarrow$ N و M/N عليهما برج J.H

وعندها $l(M) = l(N) + l(M/N)$

حيث $l(M)$ هو طول برج JH لـ M

البرهان: $\Leftarrow$ $\left[\ (S) : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_h = 0\right.$

برج جوردان هولدر لـ M (بدي أوجد منه برج لـ N فآخذ تقاطع N مع حدود (S)

لنأخذ:

$$M_0 \cap N \supset M_1 \cap N \supset \dots \supset M_h \cap N = 0$$

$N = M \cap N$ سلسلة نظامية لـ N (لنثبت أنها JH):

نلاحظ أن:

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} = \frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap (M_i \cap N)} \cong \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N)}{M_{i+1}} \overset{*}{\subseteq} \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

$M_i \supset M_{i+1}$ لأن $\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$

((أن * كتبت هكذا لأن M_{i+1} مودول جزئي من M_i و $M_i \cap N$ مودول جزئي من M_i مجموع مودولين جزئيين من M_i هو M_i))

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \cong P$$

إذاً (حيث P مودول جزئي من $\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right.$

$P \to 0$ ، $P \to \frac{M_i}{M_{i+1}}$

عندها $\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \cong P < \frac{M_i}{M_{i+1}}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

ولكن $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ بسيط إذًا ،

$$\frac{M_i\cap N}{M_{i+1}\cap N} \begin{cases} \cong 0 \\ \cong \frac{M_i}{M_{i+1}} \text{ بسيط} \end{cases}$$

ومنه $\frac{M_i\cap N}{M_{i+1}\cap N}$ بسيط.

2) لنأخذ السلسلة :

$$\frac{M}{N} = \frac{M_0+N}{N} \supset \frac{M_1+N}{N} \supset \cdots \supset \frac{M_h+N}{N} = 0$$

(التي من ك برج د $\frac{M}{N}$ وإثبات أنه [illegible])

سلسلة تركيبية لـ $\frac{M}{N}$

$$\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}_{i+1}} = \frac{\frac{M_i+N}{N}}{\frac{M_{i+1}+N}{N}} \cong \frac{M_i+N}{M_{i+1}+N}$$

$$\boxed{\frac{M/N_1}{M_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}} \quad **$$

ومنه

$$\frac{M_i+N}{M_{i+1}+N} = \frac{M_i+(M_{i+1}+N)}{(M_{i+1}+N)} \cong \frac{M_i}{M_i\cap(M_{i+1}+N)}$$

$M_{i+1}\subset M_i$

$$\frac{N_1+N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1\cap N_2}$$

** حسب

$$\cong \frac{M_i/M_{i+1}}{\underbrace{M_i\cap(M_{i+1}+N)/M_{i+1}}}$$

مودول جزئي من $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

الموضوع: ....

/ /

$$\frac{\Psi}{\Psi_{i+1}} \cong P = \frac{M_i / M_{i+1}}{I\ M_i \cap (M_{i+1}+N) / M_{i+1}} < \begin{matrix} 0 \\ \frac{M_i}{M_{i+1}} \end{matrix}$$

إي الاحتمالات الممكنة للمقام I هي إما 0 أو $\frac{M_i}{M_{i+1}}$

$$\frac{\Psi}{\Psi_{i+1}} < \begin{matrix} \dfrac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{0} = \dfrac{M_i}{M_{i+1}} \\ \\ \dfrac{M_i/M_{i+1}}{M_i/M_{i+1}} = 0 \end{matrix}$$

بسط

$$\frac{\Psi}{\Psi_{i+1}} = \frac{M_i+N/N}{M_{i+1}+N/N}$$ ومنه (أي هي 0 أو $\frac{M_i}{M_{i+1}}$)

بسط

ومنه كلاً من N و $\frac{M}{N}$ يملكان بـ 2 جوردان هولدر وهو المطلوب

نثبت الاتجاه الثاني في المحاضرة ~~السابقة~~ القادمة.

Zeina Brown

الاتجاه الثاني للبرهنة السابقة ؛ لدينا : (اريد أن احصل على برج لـ M)

(S_N) : $N = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_r = 0$

$(S_{M/N})$: $\frac{M}{N} = u_0 \supset u_1 \supset \dots \supset u_h = 0_{M/N} = \frac{N}{N}$

برجي جوردن هولدر لـ N و M/N على الترتيب

عندها حسب التقابل بين المودولات الجزئية من M/N والمودولات الجزئية من M التي تحوي N نجد أنه يوجد سلسلة

$M = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_h = N$ (*) حيث $\frac{V_i}{N} = u_i$ $i = 0, \dots, h$

وكذلك : $\frac{V_i}{V_{i+1}} \cong \frac{\frac{V_i}{N}}{\frac{V_{i+1}}{N}} = \frac{u_i}{u_{i+1}}$

ولكن $\frac{u_i}{u_{i+1}}$ بسيط مهما تكن $i = 0, \dots, h-1$ إذاً $\frac{V_i}{V_{i+1}}$ بسيط مهما تكن $i = 0, \dots, h-1$

بوصل السلسلة (S_N) مع السلسلة (*) نحصل على :

$M = V_0 \supset \dots \supset V_h = N = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_r = 0$ هي سلسلة نظامية لـ M

كذلك عوامل هذه السلسلة بسيطة ومنه تم انشاء برج جوردان هولدر لـ M طوله $\boxed{l(M/N) + l(N) = h + r = l(M)}$

(المودولات الحرة)

تعاريف ومصطلحات :

(*) لتكن A حلقة عندها نرمز $\prod_{i \in I} A \to A^I$

*) ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ $S \subset M$ مجموعة جزئية من M عندها نعرف المودول الجزئي من M المولد بـ S كما يلي :

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in N^*, \ \alpha \in A \\ s_i \in S \ ; i=1,\dots,n \end{array} \right\}$$

*) ليكن M مودول على حلقة A و S مجموعة جزئية من M عندها:

1] S جملة مولدة لـ $M \iff M = \langle S \rangle$

2] S جملة حرة $\iff$

$(\forall \alpha_i \in A, \forall s_i \in S : \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \ i=1,\dots,n)$

3] S قاعدة لـ $M \iff S$ مولدة وحرة

*) ليكن $m \in M$ نقول عن m أنه عنصر فتل $\iff$

$(\exists \alpha \in A : \alpha \neq 0 : \alpha m = 0)$

*) لتكن A حلقة عندها : $\bigoplus_{i \in I} A = A^{[I]}$

مثال : ليكن V فضاء شعاعي على حقل F ، عندها عنصر الفتل الوحيد في V هو 0 لأن ليكن $m \in V$ عنصر فتل عندها

$\exists \alpha \in F^* : \alpha m = 0$

ومنه $\alpha^{-1} \in F$ إذاً نضرب الطرفين بـ α^{-1} فنجد

$\alpha^{-1} . \alpha . m = 0$

$m = 0$

مثال 2 : لتكن G زمرة بديلة منتهية عندها كل عنصر من عناصر G هو عنصر فتل لأن:

الموضوع: .... $5.g=0$

$\left.\begin{matrix} n=5 \\ g\in G \end{matrix}\right\}$ إرشاد

$|G|.g = 0$; $\forall g \in G$

حيث $\operatorname{card} G = |G|$

(إذاً لا وجود لحلقة حرة في G)

$$\boxed{\text{ملاحظة: } I \text{ منتهية} \qquad A^{I} = A^{[I]}}$$

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن S مجموعة جزئية من M.

$$M \cong A^{[S]} \iff S \text{ قاعدة لـ } M$$

البرهان:

[$\Leftarrow$] لنأخذ العلاقة:

$$\varepsilon : A^{[S]} \to M$$

$$(\alpha_s)_{s\in S} \to \sum_{s\in S} \alpha_s . s$$

إن ε تشاكل وطبيعة. و ε غامر لأن S مولدة و ε متباين لأن S حرة

[$\Rightarrow$] لنأخذ الأسرة $\{e_s\}_{s\in S}$ حيث:

$$e_s = (e_{si})_{i\in S} = \begin{cases} e_{ss} = 1 & s = i \\ 0 & i \neq s \end{cases}$$

إن $\{e_s\}_{s\in S}$ تشكل قاعدة لـ $A^{[S]}$ (تدعى القاعدة القانونية)

مثلاً $(0,5,3,0,\ldots)$

$= 5(0,1,0,\ldots) + 3(0,0,1,\ldots)$

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$

$\alpha_1(1,0,\ldots) + \alpha_2(0,1,\ldots)$

$= (0,\ldots)$

الموضوع: ....

/ /

من فرض المبرهنة لدينا التماثل التالي

$$\emptyset : A^{[S]} \longrightarrow M$$

ولدينا $\{e_s\}_{s\in S}$ قاعدة قانونية لـ $A^{[S]}$

ان $\{\emptyset(e_s)\}_{s\in S}$ تشكل قاعدة لـ M

* $m \in M \Longrightarrow \emptyset^{-1}(m) \in A^{[S]} \Longrightarrow \emptyset^{-1}(m) = \sum_{s\in S} \alpha_s . e_s$

منتهي

$\Longrightarrow m = \sum a.s \, . \emptyset(es)$

* $\sum \alpha_s . \emptyset(e_s) = 0 \Longrightarrow \emptyset(\sum \alpha_s . e_s) = 0$

$\sum a_s (e_s) = 0 \Longrightarrow \alpha_s = 0 \quad \forall s$

من

وبالتالي صارت حرة