المحاضرة السادسة عشر - الإحصاء    2015 / 12 / 2

التقارب بالإطلاق:

نقول عن المتسلسلة العددية $\sum a_n$ أنها متقاربة بالإطلاق إذا كانت متسلسلة الطويلات أو "القيم المطلقة" لها متقاربة

أي $\sum |a_n|$ متقاربة ⟸ $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً

مبرهنة:

كل متقاربة بالإطلاق متقاربة

البرهان: متقاربة بالإطلاق ⟸ $\sum a_n$ متقاربة

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)>0 : m>n>N$:

$||a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\dots+|a_m|| < \varepsilon$ ⟸

① $\le |a_{n+1}|+\dots+|a_m|$

ومنه حسب كوشي $\sum a_n$ متقاربة

العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متسلسلة متقاربة حسب لايبنتز

لأنه محقق ① متناوبة

② : $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$

③ : $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ متناقصة

لكن هذه المتسلسلة غير متقاربة بالإطلاق

لأن: $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب ريمان

ومنه العكس على المبرهنة السابقة

غير صحيح بالحالة العامة

التقارب المشروط:

نقول عن المتسلسلة $\sum a_n$ أنها متقاربة "مشروطياً" إذا كانت متقاربة لكنها غير متقاربة بالإطلاق

أي $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة شرطياً

تمرين

ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية $\sum ba^n$ حيث $b, a$ ثابتان حقيقيان وأحسب المجموع في حالة التقارب

⟸

① : $|a|=1$ عندئذ

$|ba^n| = |b|.|a|^n = |b| \to |b| \neq 0$

ومنه حسب اختبار الحد العام $\sum ba^n$ متباعدة

② : $|a|>1$ عندئذ

$|ba^n| = |b||a^n| \to \infty$

اكبر من الواحد مرفوع سيؤول إلى اللانهاية

ومنه حسب اختبار الحد العام $\sum ba^n$ متباعدة

③ : $|a|<1$ عندئذ

$|ba^n| = |b|.|a|^n \to 0$

نوجد متتالية المجاميع الجزئية

$S_n = b + ba + ba^2 + \dots + ba^n$

$aS_n = ba + ba^2 + ba^3 + \dots + ba^{n+1}$

$$S_n - aS_n = b - ba^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n(1-a) = b(1-a^{n+1})$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{b(1-a^{n+1})}{(1-a)}$$

$$= b\cdot\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \longrightarrow \frac{b}{1-a}$$

ومنه $\sum_{n=0}^{\infty} ba^n$ متقاربة ومجموعها $\frac{b}{1-a}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ba^n = \frac{b}{1-a}$$

$b$ : الحد الأول

$a$ : أساس المتسلسلة

الخلاصة

تتقارب المتسلسلة الهندسية إذا كان أساسها أصغر تماما من الواحد

تمرين ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+i)^n}{2^n}\right)$$

متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1+i}{2}$

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

ومنه متقاربة ومجموعها

$$\sum \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{1}{1-\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{2}{1-i}$$

◆ إذا كانت $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ متقاربتين فإن المتسلسلة $\sum (z_n + w_n)$ تكون متقاربة و

$$\sum (z_n + w_n) = \sum z_n + \sum w_n$$

مثلا العكس غير صحيح

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ، $\sum (-1)^{n+1}$ متباعدتان

$$\sum \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \sum 0$$

متقاربة ومجموعها صفر

◆ إذا كانت $\sum z_n$ متقاربة وكان $\lambda \in \mathbb{C}$ فإن $\sum \lambda z_n$ متقاربة

// العمليات الخاصة بالجمع والضرب.

تمرين ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

الحل

أولا نختبر الحد العام

$$\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{i^n}{n} \longrightarrow 0$$

$$\sum \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$$ متباعدة

وعليه $\sum \frac{i^n}{n}$ غير متقاربة باطلاق

وهي متقاربة شرطياً

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{i^n}{n!}$

واحسب مجموعها في حال التقارب

الحل: ناخذ متسلسلة الطويلات

$$\sum \left|\frac{i^n}{n!}\right| = \sum \frac{1}{n!}$$

باستخدام اختبار دالامبير

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 < 1$$

وعليه المتسلسلة متقاربة

وعليه $\sum \frac{i^n}{n!}$ متقاربة باطلاق

فهي متقاربة ... لحساب المجموع

$$\sum \frac{i^n}{n!} = 1 + i - \frac{1}{2!} - \frac{i}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \dots\right.$$

$$= \cos(1) + i\sin(1)$$

$$= \text{Cis}\,1 = e$$

عملية التجميع غير مسموحة في الحل بشرطها

لكن بما أن المتسلسلة متقاربة باطلاق

فبالتالي التجميع مسموح

# اختبارات التقارب

— اختبار التقارب

اذا كانت $\sum \beta_n$ متسلسلة عقدية

ووجدت متسلسلة حقيقية ذات حدود

موجبة $\sum \alpha_n$ بحيث تكون

$$|\beta_n| \le \alpha_n$$

لاجل كل $n$ باستثناء عدد منته منها

فانه تقارب $\sum \alpha_n \Rightarrow$ تقارب $\sum \beta_n$

* نتيجة:

اذا كانت $\sum \beta_n$ متسلسلة عقدية

ووجد عدد حقيقي $K$ بحيث $(0<K<1)$

وتحقق المتراجحة $|\beta_n| \le BK^n$

حيث $(B \in \mathbb{R}$ ثابت) لاجل كل $n$ باستثناء

عدد منته منها فإن $\sum \beta_n$ متقاربة باطلاق

[ $\sum BK^n$ هندسية متقاربة ]

الموسعة $\overline{\mathbb{R}}$ في

النهاية العليا والنهاية السفلى:

نتكن $\{x_n\}$ متتالية في $\overline{\mathbb{R}}$ ولنعرف

المتتالية $\{a_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}\}$ هذه

المتتالية غير متزايدة.

ستكون متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$ ونسمي نهايتها

النهاية العليا لـ $x_n$ ونرمز لها: $\overline{\lim}\, x_n$

## المحاضرة السابعة عشر

ونعرف $b_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$
ستكون متزايدة ومتقاربة ونسمي
نهايتها بالنهاية الدنيا لـ $x_n$ ونرمز لها بـ

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim b_n = \lim\inf x_n$$

في حال كانت $\{x_n\}$ متتالية حقيقية متقاربة
فإن نهايتها العليا تساوي نهايتها الدنيا
وتساوي نهايتها أيضاً

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n$$

بداية المحاضرة السابعة عشر

وجدنا سابقاً أنه في حال تقارب $\{x_n\}$
فإنه:

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n$$

أما في حال كانت $\{x_n\}$ غير متقاربة
أو غير محدودة فإنه

$$\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n .$$

- النهاية العليا لمتتالية هي أكبر نقطة تجمع لها
- النهاية الدنيا لمتتالية هي أصغر نقطة تجمع لها

في حال التقارب ستكون نقطة التجمع
وحيدة أي $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

مثال

$\{(-1)^n\}$ ليست متقاربة لعدم وجود نهاية
ونقطتا التجمع الوحيدتان هما $(-1)$ و $(1)$
لأنه في جوار لـ $(-1)$ أو $(1)$ سيوجد عدد
غير منته من حدود المتتالية

أي
$$\underline{\lim}\,(-1)^n = -1$$
$$\overline{\lim}\,(-1)^n = 1$$

ما هي اختبارات التقارب والاختلاف:

* اختبار الجذر النوني (اختبار كوشي)

مهما يكن $\sum B_n$ متسلسلة
عددية و $\overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|} = l$

[illegible] R

حيث هذه المتسلسلة حدودها موجبة أي نهايتها
الدنيا لا يمكن أن تكون سالبة بين الحدود

① في حال $l < 1$ متقاربة بإطلاق
② في حال $l > 1$ متباعدة
③ في حال $l = 1$ يفشل الاختبار

* ملاحظة: إن هذا الاختبار هو اختبار كوشي
المعمم وهو أفضل من اختبار كوشي العادي لأنه
يستطيع أن يخبرنا بوجود النهاية العليا دائماً
لكننا نستطيع أن لا تكون نهاية الجذر النوني موجودة

الاثبات:

~~[illegible]~~

$\alpha_n = \sqrt[n]{|B_n|}$

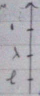
① $l<1$

ان المتتالية $\{\sqrt[n]{|B_n|}\}_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، لأنه
لو فرضنا جدلاً انها غير محدودة فانه
سنوجد متتالية جزئية من $\alpha_n$ تسعى
الى $(\infty)$ [لانها لو كانت غير محدودة [illegible]]

$\Leftarrow$ $\infty$ هي نقطة تجمع للمتتالية الجزئية و
بالتالي هي نقطة تجمع للمتتالية الاصلية $\{\alpha_n\}$
وهي النهاية العليا لـ $\{\alpha_n\}$ هي $(\infty)$
وهذا يناقض كون $\overline{\lim}\,\alpha_n$ محدودة
محدودة من الاعلى

* اذا النهاية العليا محدودة فان المتتالية محدودة
من الاعلى . [illegible]
اذا النهاية الدنيا محدودة فان المتتالية محدودة
من الادنى "

بما ان $l = \overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|} < 1$
فان المتتالية $\alpha_n = \sqrt[n]{|B_n|}$ محدودة من الاعلى
هذا يقتضي وجود عدد حقيقي $M$ بحيث
$\alpha_n \le M$
وبما ان $l<1$ $\Leftarrow$ وجود عدد حقيقي $\lambda$ بحيث
$l<\lambda<1$



سوف نبين ان حدود المتتالية $\alpha_n$
التي تكبر $\lambda$ منتهية
نفرض جدلاً ان عدد الحدود التي تكبر
$\lambda$ غير منتهية فان هذه الحدود سوف
تنتمي الى المجال $[\lambda, M]$ وهذه مجموعة
~~[illegible]~~ غير منتهية ومحدودة في $\mathbb{R}$ فهي
تملك نقطة تجمع واحدة لهذه الحدود [illegible]
[illegible] سوف تنتمي الى المجال $[\lambda, M]$ اي نقطة
التجمع سوف تكون اكبر من $\lambda$ وهذا يناقض
كون $l$ هي اكبر نقطة تجمع وهي النهاية
العليا [illegible] وبالتالي الحدود التي تكبر $\lambda$
منتهية اي يوجد عدد $N$ بحيث

$\forall n \ge N,\ \alpha_n \le \lambda$

$\forall n\ge N,\ \sqrt[n]{|B_n|}\le\lambda$

$\forall n\ge N\ \ |B_n|\le\lambda^n$

$\lambda^n$ متسلسلة هندسية اساسها
$\lambda<1$ $\Leftarrow$ متقاربة وحسب معيار
المقارنة تكون $\sum|B_n|$ متقاربة ومنه
$\sum B_n$ متقاربة باطلاق

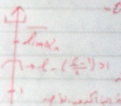
[illegible] نستطيع القول ان $\lambda<1$ [illegible]
[illegible] وبالتالي
المتسلسلة متقاربة

الحالة الثانية ② $l > 1$ ستكون المتسلسلة متباعدة لأن

$l > 1 \Leftrightarrow \overline{\lim}\, \alpha_n > 1$

بما إن النهاية العليا هي اكبر نقطة تجمع للمتتالية . أي تحوي أي جوار لا عدد نهائي منه من الاعداد التي تكبر الواحد عدها نهائي منه [illegible]

لنا الجوار $\left] \frac{l+1}{2}, \frac{3l-1}{2} \right[$ يحوي عدد لانهائي من حدود المتتالية التي اكبر من الواحد



$\Rightarrow 1 < \frac{l+1}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l} l > 1 \\ l+1 > 2 \\ \frac{l+1}{2} > 1 \end{array}}$

أي ان عدد الحدود التي تحقق $\alpha_n > 1$ لانهائي منه

لانهائي منه وعليه $\sqrt[n]{|\beta_n|} > 1$

$\Rightarrow |\beta_n| > 1^n = 1 .$

عدد حدود المتتالية التي تحقق المتباينة السابقة لانهائي منه أي لا يمكن $|\beta_n|$ أن يصغر كي تقترب

$|\beta_n| \not\to 0$

ومنه المتسلسلة متباعدة حسب معيار الحد العام.

الحالة الثالثة ③ $l = 1$

للأخذ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^p}$

$\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^p}\right|}$ $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1$

$= \overline{\lim} \frac{1}{n^{\frac{p}{n}}} = \lim \frac{1}{n^{\frac{p}{n}}} = 1$

نعلم أن المتسلسلة $p > 1$ متقاربة أو $p < 1$ متباعدة.

ضمنا الحالة هذه عندما تحدث الحالة الثالثة لا نستطيع الحكم من هذا P التي تغير من حالة المتسلسلة

تمرين ادرس تقارب

$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \beta^{n^2}$ [illegible] $(n^n)$

[illegible]

$l = \lim \sqrt[n]{|n^n \beta^{n^2}|}$

$= \lim \sqrt[n]{|n^n| . |\beta|^{n^2}}$

$= \lim n |\beta|^n$

$\sqrt[n]{|\beta|^{n^2}}$ نميز الحالات

$|\beta|^{\frac{n^2}{n}} = |\beta|^n$

$\cdot |\beta| < 1$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|\beta_n|} = \lim n . |\beta|^n$

فالأولى تسعى لكن من نعلم أن التابع الأسي هو تابع اسرع بكثير من كثير الحدود أي

$\frac{n}{|\beta|^n} \to 0$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|B_n|} = 0 < 1$

وهذه $\sum n^2 B^n$ متقاربة بإطلاق

② $|B|=1$

$\lim \sqrt[n]{|B|^n} = \lim n \cdot 1 = \infty$

وهذه متباعدة

③ $|B|>1$

$\lim \sqrt[n]{|B_n|} = \lim n\,|B|^n \longrightarrow \infty$

متباعدة

---

(مبرهنة):

ليكن $\sum v_n$ , $\sum u_n$ متسلسلتين

ذواتا حدود حقيقية موجبة ونفرض

وجود $N$ بحيث يكون

$\forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

عندئذ، تقارب $\sum v_n$ يعني تقارب $\sum u_n$

وتباعد $\sum u_n$ يعني تباعد $\sum v_n$

• معيار دالامبير:

ليكن $\sum B_n$ متسلسلة عقدية

فإذا كانت

$$L = \overline{\lim} \left| \frac{B_{n+1}}{B_n} \right|$$

و

$$l = \underline{\lim} \left| \frac{B_{n+1}}{B_n} \right|$$

عندئذٍ:

① $L<1$

$\sum B_n$ متقاربة بإطلاق

② $l>1$

$\sum B_n$ متباعدة

③ $l \leq 1 \leq L$

حالة مشكلة "يفشل المعيار"

---

ملاحظة من الياسمين:

في مثل الأمثلة المهمة $\sum n \cdot 3^{n}$ يمكننا أن نأتي بالامتحان بتبديل بسيط وهو وضع أي قيمة عوضاً عن $\lambda$ ، $3^n$ ، $e$ ، ... الأساسي نذكر المتسلسلة المهمة ونعلم منها الأمثلة المتشابهة متقاربة أم متباعدة.

هام: لكن يجب أن نفهم الأفكار جيداً وليس بالاعتماد على تجربة سابقة. والله ولي التوفيق