

2015/12/14

الموضوع: المحاضرة 19

ملاحظة لتعريف: ليكن M مودول كـر حلقة A ، نقول عن M ^{انه} منتري

التوليد إذا وجدت $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ مجموعة جزئية من M حيث $\langle S \rangle = M$ (أي إذا تولد بمجموعة عددية من M منتري)

أقولة:

(1) A مودول كـر منتري. ان A مودول منتري التوليد لأن $\langle 1 \rangle = A$

(2) $G = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ حيث $1 < n \in \mathbb{N}^*$ هي مودول منتري التوليد

لأن $\{1\}$ مجموعة مولدة لـ G كـر مولدة بـ 1

(3) A^n مودول كـر A ومنتري التوليد لأن:

$S = \{e_1, \dots, e_n\}$ تولد A^n حيث

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

ملاحظة:

من الآن فصاعداً فقط في هذا المبحث نقرهنا أن A حلقة بند بلية +

الشيبة

(1) منطقة تكاملية (2) كل مثالي a من A له العكس $(a) = a \cdot A$

حقل العكس: ليكن A حلقة لمقت طاسبق عندها

$$F_r(A) = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A, b \neq 0 \right\}$$

$$F_r(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$$

تعريف: ليكن M مودول كـر حلقة A منتري التوليد. نقول عن M

أنه مودول كـر إذا وجدت قاعدة $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ (عدد من M منتري)

لـ M

$$M \cong A^{[S]}$$

$$M \cong A^{\text{cards}} = A^n \quad \text{أي}$$

مبرهنة: أي فوردول M منتهي التوليد يماثل فوردول قسمه فوردول \mathcal{F} من معين.

البرهان: M منتهي التوليد \iff توجد $S = \{s_1, \dots, s_t\} \subseteq M$ حسب التعريف حيث $\langle S \rangle = M$ لناخذ الضيق:

$$\mathcal{F} : A^t \rightarrow M$$

$$\text{حيث } \mathcal{F}(e_i) = s_i$$

$$i=1, \dots, t$$

حيث $\{e_1, \dots, e_t\}$ عناصر القاعدة القانونية للفوردول A^t الخي.

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_t = (0, \dots, 0, 1)$$

إذ \mathcal{F} تماثل وهو \mathcal{F} كذلك \mathcal{F} عناصر $\langle S \rangle = M$

$$\forall m \in M \Rightarrow m = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_t s_t \quad \alpha_1, \dots, \alpha_t \in A$$

$$\iff \exists a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_t e_t \in A^t$$

الحيث

$$\mathcal{F}(a) = m$$

حسب مبرهنة التماثل نجد

$$\frac{A^t}{\ker \mathcal{F}} \cong M$$

$\ker \mathcal{F}$

مناقشة + تمارين: ليكن M فوردول منتهي التوليد \mathcal{F} من A

عندها $M \cong A^n$ حيث $\{x_1, \dots, x_n\}$

$$X : M \rightarrow A^n$$

لدينا $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة M عندها

الكسائي

$$A^n \text{ قاعدة } \left\{ \underbrace{\chi(x_1)}_{\theta_1}, \dots, \underbrace{\chi(x_n)}_{\theta_n} \right\}$$

لدينا $\{x_1, \dots, x_r\}$ مولدة M عند $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ ~~مولدة~~ مولدة A^n إذاً هي مولدة k^n $\Leftrightarrow n \leq r$ حيث $k = \text{Fr}(A)$

لدينا $\{x_1, \dots, x_r\}$ مولدة M عند $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ مولدة A^n إذاً هي مولدة k^n $\Leftrightarrow n \geq r$ حيث $k = \text{Fr}(A)$

* للتوضيح: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(3, 2)$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{Q}^2 \rightarrow \exists d \in \mathbb{Z}$$

* $\underline{u} \in k^n \Rightarrow \exists d \in A : \underline{u} = \frac{v}{d} ; \underline{v} \in A^n$

$$\underline{u} = \sum \frac{a_i}{d} s_i \Leftrightarrow \underline{v} = \sum a_i s_i$$

ليست كل مستقلة على \mathbb{Z} أو مستقلة صفرياً على قاعدة \mathbb{Z} . مثلاً لدينا $\{2, 3\}$ مستقلة لأن $2 \neq 3$ ، إذاً أمثلاً عن \mathbb{Z} وليكن m أي $\{2, 3\}$ تصعب مرتبطة إذاً هي مستقلة وذلك $0 = (-m)(2) + (2)(m)$ وبالتالي هي ليست مولدة قاعدة \mathbb{Z} لأنها تولد كل \mathbb{Z} إلا المجموعة للأولفة $2\mathbb{Z}$ تولد $2\mathbb{Z}$ نفسه البنية للمولدة الصفري $\{2, 3\}$ $2\mathbb{Z}$ ليست مولدة \mathbb{Z} لأنها تولد $2\mathbb{Z}$ إن 3 أيضاً تولد $3\mathbb{Z}$ ومنه $\{2, 3\}$ هي صفرياً يمكن وهي ليست قاعدة لأن ليست صفرياً $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$ (الذي يعني مولدة هو عدد \mathbb{Z})

إذا $n =$ عدد عناصر قاعدة M

$=$ عدد عناصر أي قاعدة M

$$= \text{رتبة } (M) \text{ (وهي عدد العناصر مرتبة)}$$

مثال: \mathbb{Z} مودول m منتزح التوليد قاعدته هي $\{1\}$

ولكن $\{2\}$ مودول (مستقلة) $(\alpha \cdot 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$

وهي مستقلة أيضًا لأن: $\{2, m\}$ حيث $m \neq 2$

تكون هذه المجموعة مرتبطة

$$(m) \cdot 2 + (-2) \cdot m = 0$$

ولكن $\{2\}$ ليست قاعدة \mathbb{Z} لأن $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$

$$\text{رتبة } (2\mathbb{Z}) = 1 = \text{رتبة } (\mathbb{Z})$$

(الترتيب السابق) رتبة

برهنة: ليكن M مودول A على حلقته A منتزح التوليد و m

ولناخذ $M' \subset M$ مودول جزئي من M

فندها:

$$\text{رتبة } (M') = r' \leq r = \text{رتبة } (M) \text{ و } M' \text{ مودول جزئي}$$

حيث

بالتقيد بالقاعدة القانونية $\{e_1, \dots, e_r\}$ قاعدة M

فيوجد عناصر a_1, \dots, a_r من A

حيث: $\{a_1 e_1, \dots, a_r e_r\}$

قاعدة M' و a_1, a_2, \dots, a_r

مراجعة: المحاضرة 20

من هتة: M مودول على حلقة A $M' \subset M$ مودول جزئي
 حيث A^n عناصر القاعدة
 M حر + منتزعي التوليد وليكن
 M' حرة ومنتزعي التوليد
 كذاها:

$$r' = \text{rg}(M') \leq \text{rg}(M) = r$$

ويوجد $\{e_1, \dots, e_r\}$ قاعدة M r عناصر

ويوجد a_1, a_2, \dots, a_r في A حيث

$$\{a_1 e_1, \dots, a_r e_r\}$$

قاعدة M' حيث: a_1, a_2, \dots, a_r

(تتمة حكمة)
 تحليل مودول منتزعي التوليد:

تعريف: M مودول على حلقة A . وليكن $m \in M$

$$m \text{ غير قتل} \iff \exists \alpha \in A^* : \alpha \cdot m = 0$$

لنفرز: $\text{Tor}(M) = \{m \in M \mid \exists \alpha \in A^* : \alpha \cdot m = 0\}$

هذه المجموعة (مجموعة عناصر القتل في M) تشكل مودول جزئي في M (والصيقة). البرهان

ملاحظة:

لا توجد عناصر قتل غير

[1] $\text{Tor}(M) = 0$ عندما ندعو M مودول (بلا قتل) العن

[2] $M = \text{Tor}(M)$ عندما ندعو M مودول قتل

[3] في حال كذا $M = \text{Tor}(M)$ عندما:

البنية الجبرية M

$$\text{ord}(M) = \{a \in A : a \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

(وضيعة)

مثال: $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n > 1$)
 هو حود وفصل لأن:
 $n \cdot g = 0 \quad \forall g \in G$

وان: مثلاً كل عناصره بالضرورة
 $\text{ord}(G) = n \cdot \mathbb{Z}$

مثلاً: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
 $5 \cdot g = 0$

$(5 \times \mathbb{Z}) \cdot g = 0$ $\text{ord}(G) = 5\mathbb{Z}$

مثلاً: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حود وفصل لأن:

المضروب إذا عررتنا 4 مرات
 $\langle a \rangle \times \langle b \rangle = \langle 1, a, b, ab \rangle$
 $2 \cdot a = e$
 $2 \cdot b = e$
 $2 \cdot (a \cdot b) = e$

$4 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 $\text{ord}(M) = 2\mathbb{Z}$
 أصغر واحد هو 2 لذلك كتبنا 2 مرة
 أي أصغر واحد هو 2

[3] G اذرة ببنية منتزحة عدد عناصرها n

$\text{Tor}(G) = G$

لأن $n \cdot g = 0$ مما يمكن $g \in G$

وان $\text{ord}(G) = \text{exp}(G) \cdot \mathbb{Z}$

حيث $\text{exp}(G) =$ أصغر عدد طبيعي موجب m

حيث $m \cdot g = 0 \quad \forall g \in G$

برهنة: ليكن M مودول على حلقة A مروضته التوليد عندها M مودول بلا قتل (عاصم عن قتل العناصر)

البرهان:

بما أن M مروضته التوليد عندنا \perp قاعدة وليكن $E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ حرة وكونية
ليكن m عنقود $\perp M$

$$\exists \alpha \in A^* \quad \alpha \cdot m = 0$$

$$m = \sum_{i=1}^t \alpha_i e_i \iff m \in M$$

$$\alpha \cdot m = \alpha (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_t e_t) = 0$$

$$= \alpha \alpha_1 e_1 + \alpha \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha \alpha_t e_t = 0$$

$$i \in \{1, \dots, t\}, \quad 0 = \alpha \alpha_i \iff \alpha_i = 0$$

A منطقة تكاملية (لا تحتوي قوتهم للصفر)

$$0 = m = \sum_{i=1}^t \alpha_i e_i \iff 0 = \alpha_i \iff 0 \neq \alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, t\}$$

برهنة: M مودول على حلقة A ، شبه التوليد عندها:

$$M \cong \underbrace{\frac{A}{(a_1)} \times \dots \times \frac{A}{(a_r)}}_{\text{قسم القتل}} \times \underbrace{A^t}_{\text{قسم القتل}}$$

حيث $(a_1), \dots, (a_r)$ مثاليات في A وحيث

الاقصيات a_1, a_2, \dots, a_r حيث:

حيث: $Tor(M) = \frac{A}{(a_1)} \times \dots \times \frac{A}{(a_r)}$

$ord(Tor(M)) = (a_r)$

تصنيف: زمرة تبديلية منتهية التوليد G

$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{a_1\mathbb{Z}} \times \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{a_r\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^t$

a_1, a_2, \dots, a_r

مثال: اكتب كل الزمر البديلية التي يحدد عناصرها $(2, 3, 5)$ الكل: لدي 4 عوامل فقط (أكبر من 4)

قوى الـ 5: $\frac{\mathbb{Z}}{5^4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5^3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ أي $\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right]$ (1)

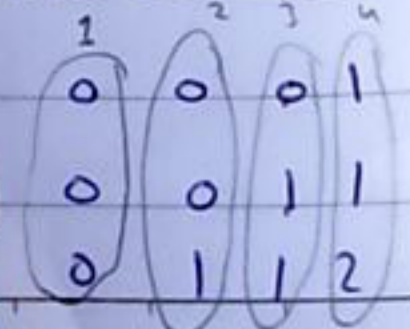
قوى الـ 3: $\frac{\mathbb{Z}}{3^4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ أي $\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right]$ (2) (3)

قوى الـ 2: $\frac{\mathbb{Z}}{2^4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ أي $\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right]$ (4) (5) (6) (7) (8)

مثلاً نأخذ (1) و (3) و (7)

$\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{2 \cdot 3 \cdot 5\mathbb{Z}}$ العوامل الثالث

العامل 1 كلواصفار



$\frac{\mathbb{Z}}{2^2 \cdot 3 \cdot 5\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{60\mathbb{Z}}$ العوامل الرابع

$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{2 \cdot 3 \cdot 5\mathbb{Z}}$ العامل الثاني لدينا

أولاً اصعد: $\frac{7}{2\mathbb{Z}} \times \frac{8}{6\mathbb{Z}} \times \frac{9}{60\mathbb{Z}}$

ونحتاج بنفس الشكل

الموردات الكسائية والموردات الكافية: (هذا البحث موجود في الكتاب)

تذكيرة:

$$f: M \rightarrow N$$

تساكل موردوي، P موردوي كحلقة A

$$f_*: \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N)$$

$$u \rightarrow f_*(u) = f \circ u$$

$$f^*: \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$$

$$u \rightarrow f^*(u) = u \circ f$$

المورد الكسائي: ليكن P موردوي كحلقة A ، نقول عن P أنه كسائي

زاحفت: مما كان المتتالية التالية: $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ عند ها:

$$f_*: \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$$

بالعرف
 \iff

مما ليكن $f: M \rightarrow N$ خاص فبان:

$$f_*: \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$$

المورد الكافي: ليكن P موردوي كحلقة A ، نقول عن P أنه كافي إذا حقت حايدي:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$$

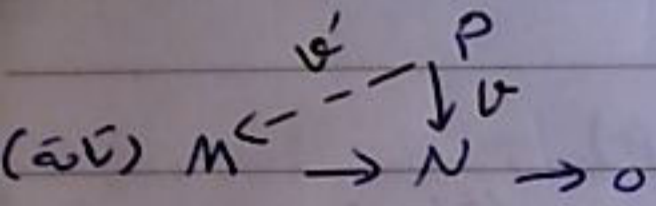
متتالية عامة فبان:

$$f^* : \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$$

تعريف \iff مماثلتها $f : M \rightarrow N$ تتأكد متساوية فإن f^* السامع غاصر.

مبرهنة: ليكن P مودول على حلقة A .

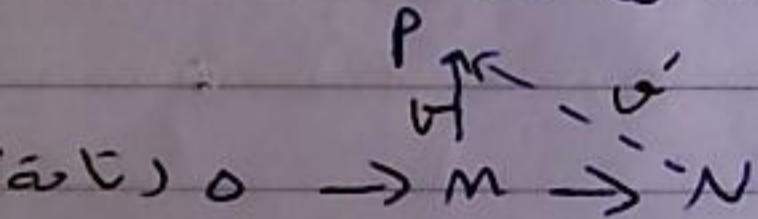
$$(1) \quad P \text{ تقاطعي} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{لا يوجد كل حفظ} \\ \text{من هذا الشكل} \end{array} \right.$$



يوجد $f : P \rightarrow M$ تتأكد

حيث $f \circ g' = g$ (يتميل الحفظ تبديلي)

$$(2) \quad P \text{ افقي} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{لا يوجد كل حفظ} \end{array} \right.$$



فإنه يوجد تتأكد موروي

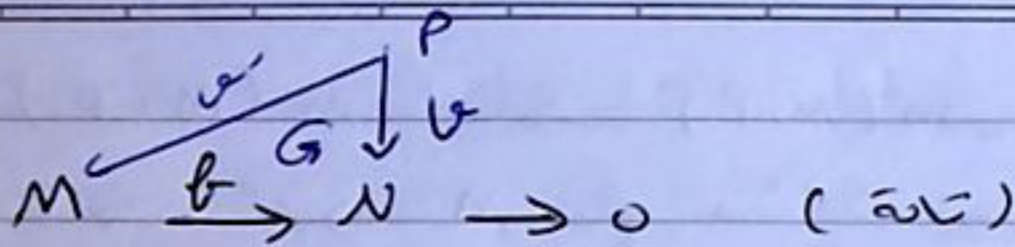
$f : N \rightarrow P$ حيث $f \circ h = g$

البرهان: [1] P تقاطعي $\iff M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ (تامة)

$$f_* : \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$$

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ غاصر فإن} \\ \exists g' \in \text{Hom}(P, M) \text{ حيث } f_* g' = g \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \forall g \in \text{Hom}(P, N) \\ \exists g' \in \text{Hom}(P, M) \text{ حيث } f_* g' = g \end{array} \right]$$

(هذا تعريف الغاصر)



$f \circ \phi = g$

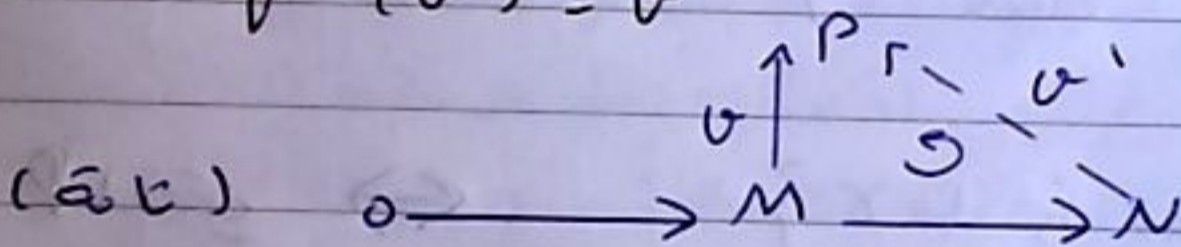
$[2] \quad P \text{ أفضى} \iff 0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \text{ (ثابتة)}$

$f^*: \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$

(خاصة إذا كان f متبايناً)

فإن: $\forall \psi \in \text{Hom}(M, P), \exists \phi \in \text{Hom}(N, P)$

$f^*(\phi) = \psi$

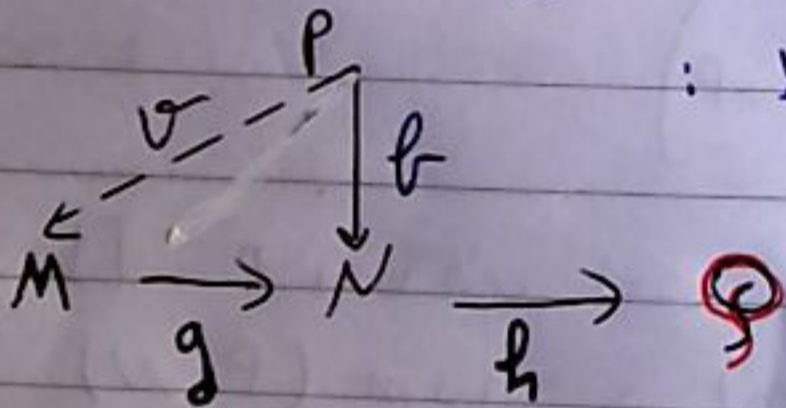


أي: $\psi \circ f = g$

مبرهنة: ليكن P موجوداً لتقاطع كل حلقة A

عندها: لأجل كل $f: M \rightarrow N$

(حلقة ما يتساوى)



حيث $h \circ f = 0$ و P أفضى تام

عندها يوجد ϕ ما يتساوى

$\phi \circ h = f$ حيث $\phi: P \rightarrow M$

(*)

إبرهتان: بما أن $h \circ f = 0$ فإن $\text{Im } f \subseteq \ker h$

ولكون المتتالية $(*)$ تامة فإن $\text{Im } g \subseteq \ker h$

$$\boxed{\text{Im } f \subseteq \text{Im } g}$$

لنأخذ $g_1: M \rightarrow \text{Im } g$

$$m \rightarrow g_1(m) = g(m)$$

g_1 تماثل تام

$$f_1: P \rightarrow \text{Im } g \quad : \quad P \rightarrow f_1(P) = f(P)$$

لنأخذ المتتالية:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \psi & \downarrow h_1 & \\ M & \xrightarrow{g_1} & \text{Im } g \rightarrow 0 \end{array}$$

كون P إسقاطي فإن ψ موجود ψ بحيث أن المتتالية

$$g_1 \circ \psi = f_1$$

$$(g_1 \circ \psi)(x) = g_1(\psi(x))$$

$$= g_1(\psi(x))$$

$$= (g_1 \circ \psi)(x)$$

$$= f_1(x) = f(x)$$

$$\forall x \in P$$

(المودولات الإسقاطية والانقبية)

مراجعة:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \text{ (تامة)}$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P, M') \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(P, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P, M'') \rightarrow 0 \text{ (تامة)}$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M'', P) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, P) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M', P) \rightarrow 0 \text{ (تامة)}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} P \\ \swarrow u' \quad \searrow u \\ M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \end{array} \\ \text{تامة} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \\ \text{تامة} \\ \text{فيان} \\ g_*: \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, M'') \\ \text{نفاخر} \end{array} \right\} \Leftrightarrow P \text{ تقاطري}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} P \\ \swarrow u \quad \searrow u' \\ M' \xrightarrow{f} M \\ \text{تامة} \end{array} \\ \text{تامة} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} M' \xrightarrow{f} M \rightarrow 0 \\ \text{تامة} \\ \text{فيان} \\ f^*: \text{Hom}(M, P) \rightarrow \text{Hom}(M', P) \\ \text{نفاخر} \end{array} \right\} \Leftrightarrow P \text{ أنقبية}$$

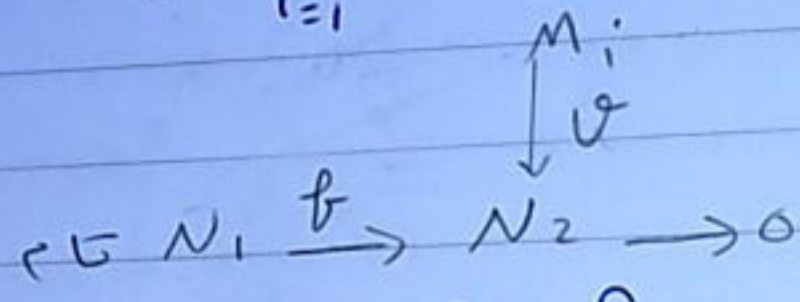
مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A وليكن $\{M_i\}^n$

مجموعة من المودولات الجزئية من M عندها:

$$[1] \quad \bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ تقاطري} \Leftrightarrow M_i \text{ تقاطري} \text{ حيث } i=1, \dots, n$$

$$[2] \quad \bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ أنقبية} \Leftrightarrow M_i \text{ أنقبية} \text{ حيث } i=1, \dots, n$$

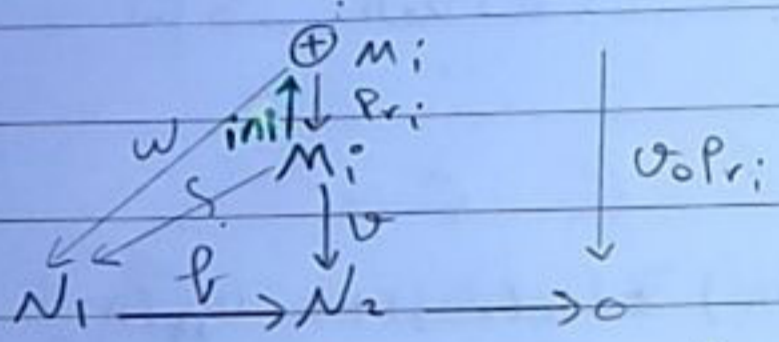
البرهان: لزوم الشرط: فكل ما نحتاجه لتأكيد المنطق:



نأخذ التماثل الاستقرائي P_{r_i} (وهو فامر):

$$P_{r_i} : \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow M_i$$

عندها يصبح المنطق:



من التوجه $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ استقرائي، فإنه يوجد تماثل ω كما في المنطق الذي يجعله تبديلي:

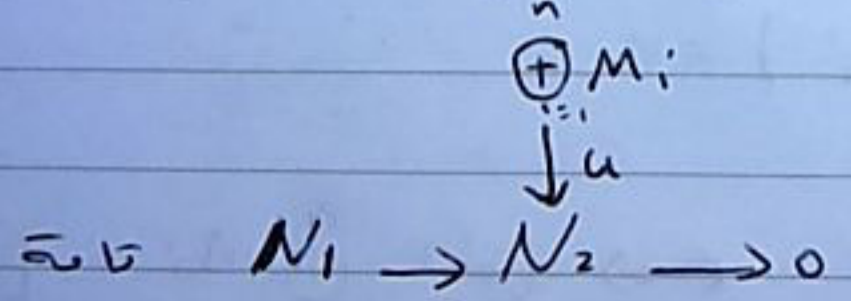
نأخذ تماثل كل الاضواء القانوني ini :

$$\text{ini} : M_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

نأخذ التماثل ini ω الذي منطقتة M_i ومستمرة N_1 لنتت أنه يجعل المنطق تبديلي:

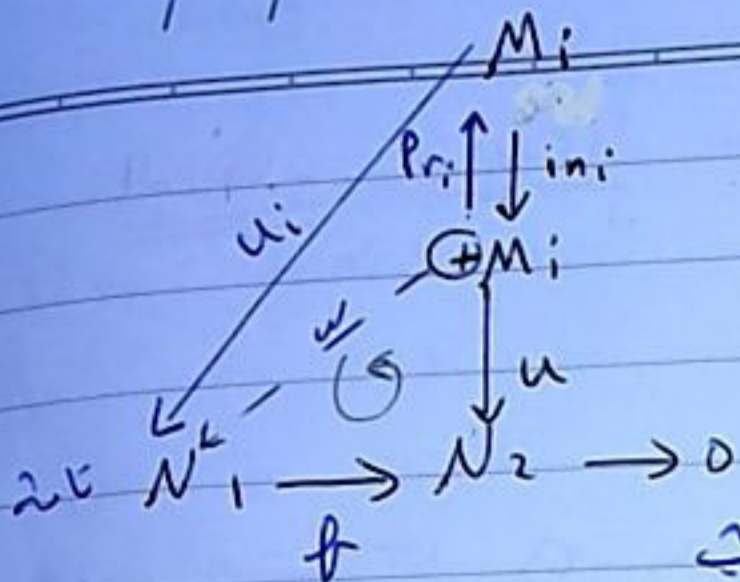
$$f \circ (\omega \circ \text{ini}) = (f \circ \omega) \circ \text{ini} = (\sigma \circ P_{r_i}) \circ \text{ini} = \sigma$$

كفاية الشرط: نرصد أن M_i استقرائي عندها ليكافئنا:



إن M_i استقرائي إذاً لنا المنطق:

إذاً المخطط قد يبي



إذاً يوجد $u_i: M_i \rightarrow N_1$ حيث

$f \circ u_i = u \circ i_{n_i}$

لأنه الملائمة:

$\psi: \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow N_1$ حيث

$\psi(m_1, m_2, \dots, m_n) = u_1(m_1) + \dots + u_n(m_n)$
 وظيفية $\psi = u \circ f \circ r_i$

لبيح المطلوب يجب ان يكون $f \circ \psi = u$ ؟

$f \circ \psi = f \circ (u_i \circ p_{r_i})$

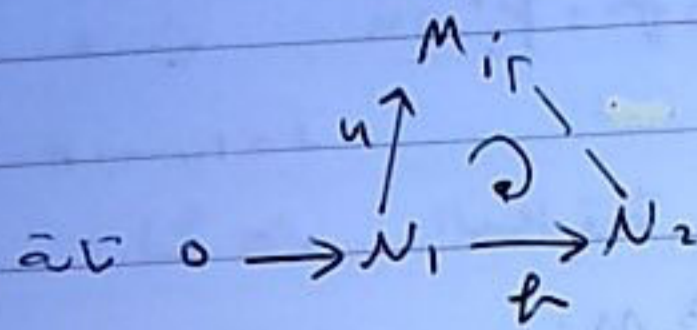
$f \circ u_i = u \circ i_{n_i}$ وذلك

$\rightarrow f \circ \psi = (f \circ u_i) \circ p_{r_i} = (u \circ i_{n_i}) \circ p_{r_i}$

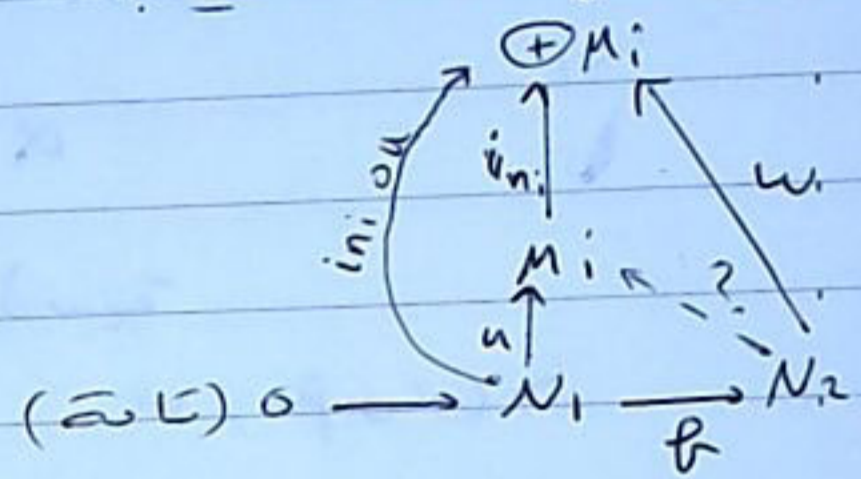
$= u \circ (i_{n_i} \circ p_{r_i}) = u$

[2] $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ اقمي \iff كل M_i اقمي بها يمكن

← [لناقد المخطط :



ولم نبدأ المخطط التالي :



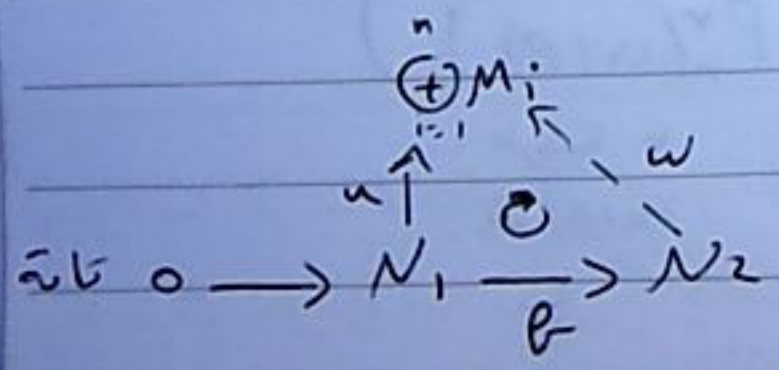
ولدينا $\oplus_{i=1}^n M_i$ أقصى إذاً يوجد w كما في المخطط حيث $w \circ f = in_{ou}$

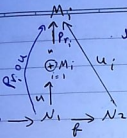
لنأخذ :

$$P_{r_i} \circ w : N_2 \xrightarrow{w} \oplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{P_{r_i}} M_i$$

$$(P_{r_i} \circ w) \circ f = P_{r_i} \circ (w \circ f) = P_{r_i} \circ (in_{ou}) = P_{r_i} \circ (in_i) \circ u = u$$

(\Rightarrow) لناقد المخطط





لدينا: M_i أو M_i اقصي إذا يوجد u_i $u_i \circ f = P_i^r \circ u$ حيث $i=1, \dots, n$

لنأخذ العلاقة

$$w: N_2 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

$$\alpha \rightarrow (u_1(\alpha), \dots, u_n(\alpha))$$

أو w تتألف من u_i

كذلك: $w \circ f = u$ لأنه مما يمكن $\exists \beta \in N_1$ فإن

$$w \circ f(\beta) = w(f(\beta)) = (u_1(f(\beta)), u_2(f(\beta)), \dots, u_n(f(\beta)))$$

$$\overset{\uparrow}{\pi} = \bigoplus_{i=1}^n$$

$$= u_1(f(\beta)) + u_2(f(\beta)) + \dots + u_n(f(\beta))$$

$$= P_1^r \circ u(\beta) + \dots + P_n^r \circ u(\beta)$$

$$u_i \circ f = P_i^r \circ u$$

$$= (P_1^r(u(\beta)), \dots, P_n^r(u(\beta)))$$

المرتبة u و $u(\beta)$

المرتبة u

$u(\beta) \rightarrow$

$$= u(\beta) \quad (\dots)$$