الموضوع: المحاضرة 19 2015/12/14

ملاحظة لتعريف: ليكن M مودول على حلقة A، نقول عن M انه منتهي التوليد إذا وجدت $S=\{s_1,\dots,s_n\}$ مجموعة جزئية من M بحيث $\langle S\rangle = M$
(أي إذا تولد بمجموعة عدد عناصرها منتهي)

أمثلة:

1) A مودول على نفسه . إن A مودول منتهي التوليد لأن $A=\langle 1\rangle$

2) $G=\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ حيث $1<n\in\mathbb{N}^*$ هي مودول منتهي التوليد لأن $\{\bar{1}\}$ مجموعة مولدة لـ G
لأنها مولدة بـ $\bar{1}$

3) A^n مودول على A منتهي التوليد لأن:
$S=\{e_1,\dots,e_n\}$ تولد A^n حيث
$e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,0,1)$

ملاحظة:
من الآن وصاعداً فقط في هذا البحث نفرض أن A حلقة تبديلية + (واحدية)
1) منطقة تكاملية ← 2) كل مثالي من A له الشكل $(a)=a.A$

حقل الكسور: لتكن A حلقة تحقق ما سبق عندها

$$Fr(A)=\left\{\frac{a}{b} : a,b\in A,\ b\neq 0\right\}$$

$$Fr(\mathbb{Z})=\mathbb{Q}$$

تعريف: ليكن M مودول على حلقة A منتهي التوليد. نقول عن M أنه مودول حر إذا وجدت قاعدة $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ (عدد عناصرها منتهي) لـ M

$M \simeq A^{(S)}$

أي $M \cong A^{\text{card}\,S} = A^n$

مبرهنة: أي مودول M منتهي التوليد يماثل مودول قسمة لمودول حر معين (محدد).

البرهان: M منتهي التوليد $\Leftarrow$ توجد (حسب التعريف) $S = \{s_1, \dots, s_t\} \subseteq M$ حيث $\langle S \rangle = M$ لنأخذ التطبيق:

$$\varepsilon : A^t \longrightarrow M$$

حيث $\varepsilon(e_i) = s_i$

$i = 1, \dots, t$

حيث $\{e_1, \dots, e_t\}$ عناصر القاعدة القانونية للمودول الحر A^t

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_t = (0, \dots, 0, 1)$$

إن ε تشاكل وهو . كذلك ε غامر لأن $\langle S \rangle = M$

$$\forall m \in M \Rightarrow m = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_t s_t \quad \text{و} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_t \in A$$

$$\Rightarrow \exists\, a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_t e_t \in A^t$$

الصورة

$$\varepsilon(a) = m$$

حسب مبرهنة التماثل نجد

$$\frac{A^t}{\ker G} \cong M$$

مناقشة + تماريف: ليكن M مودول منتهي التوليد و حر.

عندها $M \cong A^n$ حيث $\{x_1, \dots, x_n\}$

$$X : M \to A^n$$

لدينا $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ M عندها

/ /　　　　الموضوع: ....

بالحالي

$\{\underbrace{X(x_1)}_{\theta_1}, \dots, \underbrace{X(x_n)}_{\theta_n}\}$ قاعدة لـ A^n

لدينا $\{x_1, \dots, x_r\}$ مولدة لـ M عندها $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$
مولدة لـ A^n إذاً هي مولدة لـ k^n $\Leftarrow$ $\boxed{n \le r}$ حيث
$k = Fr(A)$
حقل مشترك

لدينا $\{x_1, \dots, x_r\}$ حرة لـ M عندها $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$
حرة لـ A^n إذاً هي حرة لـ k^n $\Leftarrow$ $\boxed{n \ge r}$ حيث $k = Fr(A)$

التوضيح:　$* \ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(3, 2)$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{Q}^2 \rightarrow \exists\, d \in \mathbb{Z}$

$* \ \underline{u} \in k^n \Longrightarrow \exists\, d \in A : \underline{u} = \frac{v}{d} \ ; \ \underline{v} \in A^n$

$\underline{u} = \sum \frac{a_i}{d} s_i \Longleftarrow \underline{v} = \sum \alpha_i s_i$

ليست كل مستقلة خطياً أو مستقلة صغرى هي قاعدة. فمثلاً لدينا $\{2\}$ هي مستقلة لأن $\alpha.2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
إذاً أضفنا عنصراً وليكن m أي $\{2, m\}$ تصبح مرتبطة إذاً هي خطياً وهي مرتبطة
وذلك لأن $0 \ne m$، $(-m)(2) + (2)(m) = 0$ وبالتالي هي ليست حرة وليست قاعدة لأنها لا تولد كل $\mathbb{Z}$
إلا المجموعة المؤلفة من 2 تولد فقط $2\mathbb{Z}$

- نفس الشيء بالنسبة للمولدة الصغرى $\{2, 3\}$ حيث إن 2 ليست مولدة لـ $\mathbb{Z}$ بل تولد $2\mathbb{Z}$
إن 3 أيضاً تولد $3\mathbb{Z}$ ومنه $\{2, 3\}$ هي أصغرية ولكن وهي ليست قاعدة لأنها ليست حرة لأن
$2 \times 3 + (-3) \times 2 = 0$ ((الذي يعني فقط هو عدد العناصر))

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

الموضوع: ....

إذا n = عدد عناصر قاعدة M

= عدد عناصر أي قاعدة لـ M

$= rg(M)$

الرتبة (هي تدل على عدد العناصر فقط)

مثال: $\mathbb{Z}$ مودول حر ومنتهي التوليد قاعدته هي $\{1\}$

ولكن $\{2\}$ حرة (مستقلة) $(\alpha . 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$

وهي مستقلة عظمى لأن: $\{2, m\}$ حيث $m \neq 2$

تكون هذه المجموعة مرتبطة

$$(m).2 + (-2)m = 0$$

ولكن $\{2\}$ ليست قاعدة لـ $\mathbb{Z}$ لأن $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$

$$2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z} = \{1\}$$

الرتبة أو قاعدة   الرتبة

$$rg(2\mathbb{Z}) = 1 = rg(\mathbb{Z})$$

(الشروط السابقة)

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A منتهي التوليد وَ حر

ولنأخذ $M' \subset M$ مودول جزئي من M

عندها:

M' مودول حر وَ $rg(M') = r' \leq r$ $(= rg(M))$

حيث

لا تقصد بالقاعدة القانونية

$\{e_1, \dots, e_r\}$ قاعدة M

يوجد عناصر $a_1, \dots, a_{r'}$ من A

بحيث: $\{a_1e_1, \dots, a_{r'}e_{r'}\}$

قاعدة M' وَ $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_{r'}$

يقسم يقسم

مراجعة : المحاضرة 20

من هنا ، M مودول على حلقة A

يماثل A^{n} حيث n العدد عناصر القاعدة

M حر + منتهي التوليد ولكن $M' \subset M$ مودول جزئي

عندها : M' حرة ومنتهي التوليد

$$r' = rg(M') \le rg(M) = r$$

ويوجد $\{e_1, \dots, e_r\}$ قاعدة لـ M بعدد عناصر r

ويوجد $a_1, a_2, \dots, a_{r'}$ من A بحيث

$$\{a_1 e_1, \dots, a_{r'} e_{r'}\}$$

قاعدة لـ M' بحيث : $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_{r'}$

(كتابة شكلية)

تحليل مودول منتهي التوليد :

تعاريف : M مودول على حلقة A . ولكن $m \in M$

$A \setminus \{0\}$

m عنصر فتل $\Leftrightarrow \exists \alpha \in A^* : \alpha . m = 0$

لنرمز : $Tor(M) = \{ m \in M \mid \exists \alpha \in A^* : \alpha . m = 0 \}$

هذه المجموعة (مجموعة عناصر الفتل في M) تشكل مودول جزئي من M (البرهان واضحة) .

ملاحظة :

لا توجد عناصر فتل غير الصفر

[1 . $Tor(M) = 0$ عندها ندعو M مودول (بلا فتل)

كل عناصر M هو عنصر فتل

[2 $M = Tor(M)$ عندها ندعو M مودول فتل ،

[3 في حال كان $M = tor(M$ عندها :

الموضوع:

$ord(M) = \{\alpha \in A : \alpha . m = 0 \ , \forall m \in M\}$ تشكل مثالي من A

(وظيفة)

$\{0\} \subsetneq tor(M) \subsetneq M$

مثال: $G = \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \quad (n > 1)$

(زمرة دائرية تبديلية هي موديول)

هو موديول فتل لأن:

$n . g = 0 \quad \forall g \in G$

وان: $ord(G) = n . \mathbb{Z}$

مثلاً $\dfrac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$ كل عناصر الزمرة نضربها بـ 10 تعطي صفر وإذا ضربنا مضاعفات الـ 10 تعطي 0 ، هو كونه مثالي فلازم الكتبة $n\mathbb{Z}$

مثلاً: $\dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

$5 . g = 0$

$(5 \times k) . g = 0 \qquad ord(G) = 5\mathbb{Z}$

k عدد من $\mathbb{Z}$

(زمرة تبديلية) $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ موديول فتل لأن:

العنصر ذا ضربناه بـ 4 مرات يعطينا صفر (عدد عناصر الزمرة 2×2)

$4 . a = 0 \ ; \ \forall a \in \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

$ord(M) = 2\mathbb{Z}$

أصغر واحد هو 2 لو بكتب 2 مو 4

أي أصغر واحد يحقق $2.a = 0$

$\langle a \rangle \times \langle b \rangle$

$\{1, a\} \times \{1, b\} = \{1, a, b, ab\}$ (مرتبة 2، مرتبة 2)

$2 . a = e$ محايد

$2 . b = e$ محايد

$2(a.b) = e$

[3] G زمرة تبديلية منتهية عدد عناصرها n

$Tor(G) = G$

لأن $n . g = 0$ مهما يكن $g \in G$

وان $ord(G) = exp(G) . \mathbb{Z}$

حيث $exp(G) =$ أصغر عدد طبيعي موجب m

حيث $m . g = 0 \ ; \ \forall g \in G$

مبرهنة: ليكن M مودول على حلقة A حر ومنتهي التوليد

عندها M مودول بلا فتل (يا أي عنصر فتل غير الصفر)

الرهان:

بما أن M حر ومنته التوليد عندئذ لـ M قاعدة ولتكن

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ حرة ومولدة

ليكن m عنصر فتل لـ M

$$\exists \alpha \in A^* \quad , \alpha . m = 0$$

$$m = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i e_i \Longleftarrow m \in M$$

$$\alpha . m = \alpha (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_t e_t) = 0$$

$$= \alpha \alpha_1 e_1 + \alpha \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha \alpha_t e_t = 0$$

E مستقلة $\Longleftarrow$ $0 = \alpha \alpha_i \quad , \quad i \in \{1, \dots, t\}$

A منطقة تكاملية (لا تحوي قواسم للصفر)

و $0 \neq \alpha \Longleftarrow 0 = \alpha_i \Longleftarrow 0 = m = \sum_{1}^{t} \alpha_i e_i$

$$\forall i \in \{1, \dots, t\}$$

مبرهنة: M مودول على حلقة A، منتهي التوليد عندها:

$$M \cong \underbrace{\frac{A}{(a_1)} \times \dots \times \frac{A}{(a_r)}}_{\text{قسم الفتل}} \times \underbrace{A^t}_{\text{قسم الحر}}$$

حيث $(a_1), \dots, (a_r)$ مثاليات في A وحيدة

الاختيار بحيث: $a_1 | a_2 | \dots | a_r$

حيث :

$$Tor(M) = \frac{A}{(a_1)} \times \dots \times \frac{A}{(a_r)}$$

$$ord(tor(M)) = (a_r)$$

تطبيق : G زمرة تبديلية منتهية التوليد .

$$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{a_1\mathbb{Z}} \times \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{a_r\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^t$$

$$a_1 | a_2 | \dots | a_r$$

مثال : اكتب كل الزمر التبديلية التي عدد عناصرها $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)$

الحل : لديّ 4 عوامل فقط (أكبر أس هو 4) .

قوى الـ 5 : $\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}$ (1) أي : $\frac{\mathbb{Z}}{5^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

قوى الـ 3 :

(2) $\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2}$ أي : $\frac{\mathbb{Z}}{3^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}}$

(3) $\boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 1}$ أي : $\frac{\mathbb{Z}}{3^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^1\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^1\mathbb{Z}}$

قوى الـ 2 :

(4) $\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 4}$ $\longleftarrow \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^4\mathbb{Z}}$

(5) $\boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 3}$ $\longleftarrow \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^3\mathbb{Z}}$

(6) $\boxed{0 \quad 0 \quad 2 \quad 2}$ $\longleftarrow \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}}$

(7) $\boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad 2}$ $\longleftarrow \frac{\mathbb{Z}}{2^0\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}}$

(8) $\boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}$ $\longleftarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

مثلاً نأخذ (1) و (3) و (7)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

العامود 1 كله اصفار

العامود الثاني لدينا : $\frac{\mathbb{Z}}{2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\,\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

العامود الثالث : $\frac{\mathbb{Z}}{2\cdot 3\cdot 5^0\,\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$

العمود الرابع $\frac{\mathbb{Z}}{60\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{2^2\cdot 3\cdot 5\,\mathbb{Z}}$

أول اصحاح : $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{60\mathbb{Z}}$

ونتابع بنفس الشكل ...

(هذا البحث موجود في الكتاب)

المودولات الاسقاطية والمودولات الافقية :

تذكرة:

$f: M \to N$

تشاكل مودولي، P مودول على حلقة A

$f_*: \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$

$v \to f_*(v) = f \circ v$

$f^*: \mathrm{Hom}(N, P) \to \mathrm{Hom}(M, P)$

$u \to f^*(u) = u \circ f$

المودول الاسقاطي: ليكن P مودول على حلقة A، نقول عن P أنه اسقاطي إذا تحقق: مهما تكن المتتالية التامة: $M \xrightarrow{f} N \to 0$

عندها:

$f_*: \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ غامر

بالتعريف $\Longleftrightarrow$

مهما تكن $f: M \to N$ غامر فإن:

$f_*: \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ غامر.

المودول الافقي: ليكن P مودول على الحلقة A، نقول عن P انه مودول افقي إذا تحقق مايلي:

$0 \to M \xrightarrow{f} N$

متتالية تامة فإن:

$$f^*: Hom(N,P) \to Hom(M,P)$$

تعريف $\Longleftrightarrow$ مهما يكن: $f: M \to N$ تشاكل متباين فإن f^* الساقط غامر.

مبرهنة: ليكن P مودول على حلقة A.

1) P اسقاطي $\Longleftrightarrow$ لأجل كل مخطط من هذا النمط

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "v'"'] & \\ M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
(تامة)

يوجد تشاكل $v': P \to M$ حيث $f \circ v' = v$ (يجعل المخطط تبديلي)

2) P افقي $\Longleftrightarrow$ لأجل كل مخطط

$$\begin{tikzcd} & P & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "v"] \arrow[r] & N \arrow[ul, dashed, "v'"'] \end{tikzcd}$$
(تامة)

فإنه يوجد تشاكل مودولي $v': N \to P$ حيث : $v' \circ f = v$

البرهان: 1] P اسقاطي $\Longleftrightarrow$ $M \xrightarrow{f} N \to 0$ (تامة)

$$f_*: Hom(P,M) \to Hom(P,N)$$

$\Longleftrightarrow$ f غامر فإن: $\forall v \in Hom(P,N), \exists v' \in Hom(P,M)$; $f_*(v') = v$ (حسب تعريف الغامر)

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dll, "v'"'] \arrow[d, "v"] & \\ M \arrow[rr, "f"] & & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ (تامة) $\Longleftrightarrow$

$f \circ v' = v$

2] P أحقن $\Longleftrightarrow$ $0 \to M \xrightarrow{f} N$ (تامة)

$f^*: Hom(N,P) \longrightarrow Hom(M,P)$

(f^* غامر إذا كان f متباين)

فإن: $\forall v \in Hom(M,P), \exists v' \in Hom(N,P)$

$f^*(v') = v$

$$\begin{tikzcd} & P & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "v"] \arrow[r] & N \arrow[ul, dashed, "v'"'] \end{tikzcd}$$ (تامة)

أي: $v' \circ f = v$

ملاحظة: لكن P مودول إسقاطي كل حلقة A

عندها: لأجل كل مخطط:

(مخطط من الأشكال)

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

حيث السطر الأفقي تام و $h \circ f = 0$

عندها يوجد تشاكل مودولي

$v: P \to M$ حيث $g \circ v = f$ (يجعل المخطط تبديلي)

(*)

البرهان: بما أن $h \circ f = 0$ فإن $\operatorname{Im} f \subseteq \ker h$

ولكون المتتالية (*) تامة فإن $\operatorname{Im} g \subseteq \ker h$

ومنه $\boxed{\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g}$

لنأخذ :

$$g_1 : M \longrightarrow \operatorname{Im} g$$
$$m \longrightarrow g_1(m) = g(m)$$

g_1 شامل تام

$f_1 : P \longrightarrow \operatorname{Im} g \quad : P \longrightarrow f_1(P) = f(P)$

لنأخذ المخطط :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "f_1"] & \\ M \arrow[r, "g_1"'] & \operatorname{Im} g \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

كون P اسقاطي فإن v موجود ويحقق أن المخطط

تبديلي أي : $g_1 \circ v = f_1$

$$\begin{aligned} (g \circ v)(x) &= g(v(x)) \\ &= g_1(v(x)) \\ &= (g_1 \circ v)(x) \\ &= f_1(x) = f(x) \\ &\forall x \in P \end{aligned}$$

(المودولات الاسقاطية والافقية)

مراجعة :

(تامة) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$

(تامة) $0 \longrightarrow Hom(P, M') \xrightarrow{f_*} Hom(P, M) \xrightarrow{g_*} Hom(P, M'') \longrightarrow 0$

(تامة) $0 \longrightarrow Hom(M'', P) \xrightarrow{g^*} Hom(M, P) \xrightarrow{f^*} Hom(M', P) \longrightarrow 0$

$$\left\{\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "u'"'] \arrow[d, "u"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \text{ تامة}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{(تامة) } M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \\ \text{فإن} \\ g_*: Hom(P,M) \to Hom(P,M'') \\ \text{غامر} \end{array}\right] \Longleftrightarrow P \text{ اسقاطي}$$

$$\left\{\begin{tikzcd} & & P & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "f"'] & M \arrow[u, "u'"'] \end{tikzcd} \text{ تامة}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \to M' \xrightarrow{f} M \text{ تامة} \\ \text{فإن} \\ f^*: Hom(M,P) \to Hom(M',P) \\ \text{غامر} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow P \text{ أفقي}$$

مبرهنة : ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $\{M_i\}^n$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من M عندها :

1] $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ اسقاطي $\Longleftrightarrow$ M_i اسقاطي مهما يكن $i = 1, \dots, n$

2] $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي $\Longleftrightarrow$ M_i افقي مهما يكن $i = 1, \dots, n$

البرهان: لزوم الشرط: نفرض أن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي عندها

لنأخذ المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[d, "v"] & \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ تام

لنأخذ التشاكل الإسقاطي Pr_i (وهو غامر):

$$Pr_i : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to M_i$$

عندها يصبح المخطط:

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus M_i \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, shift left, "Pr_i"] \arrow[ddr, "v \circ Pr_i"] & \\ & M_i \arrow[u, shift left, "in_i"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl] & \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

من الفرض $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي، فإنه يوجد تشاكل w مما في المخطط الذي يجعله تبديلي:

نأخذ تشاكل الاحتواء القانوني in_i:

$$in_i : M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

نأخذ التشاكل $w \circ in_i$ الذي منطلقه M_i ومستقره N_1

لنثبت أنه يجعل المخطط تبديلي:

$$f \circ (w \circ in_i) = (f \circ w) \circ in_i = (v \circ Pr_i) \circ in_i = v$$

كفاية الشرط: نفرض أن M_i إسقاطي عندها ليكن لدينا:

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[d, "u"] & \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ تامة

بما أن M_i إسقاطي إذاً لنأخذ المخطط:

/ /

إذاً المخطط تبديلي

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[d, shift left, "in_i"] \\ & \bigoplus M_i \arrow[u, shift left, "pr_i"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \arrow[d, "u"] \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تامة

إذاً يوجد $u_i : M_i \to N_1$ بحيث $f \circ u_i = u \circ in_i$ من أجل $i = 1, \dots, n$

لنأخذ العلاقة:

$$w : \bigoplus_{i=1} M_i \to N_1$$

حيث

$w(m_1, m_2, \dots, m_n) = u_1(m_1) + \dots + u_n(m_n)$ تشاكل ومعرفة.

$$w = u_i \circ pr_i$$

لنبين المطلوب يجب أن يكون: $f \circ w \overset{?}{=} u$

$f \circ w = f \circ (u_i \circ pr_i)$

ولدينا $f \circ u_i = u \circ in_i$

$\to f \circ w = (f \circ u_i) \circ pr_i = (u \circ in_i) \circ pr_i$

$= u \circ (in_i \circ pr_i) = u$

2] $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي $\iff$ كل M_i إسقاطي مهما يكن i

⟸] لنأخذ المخطط :

$$\begin{tikzcd} & & M_i & \\ \text{تامة} \quad 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "u"] & N_2 \arrow[u, dashed] & \end{tikzcd}$$

ومنه لدينا المخطط التالي :

$$\begin{tikzcd} & & \bigoplus M_i & \\ & & M_i \arrow[u, "in_i"] & \\ (\text{تامة}) \quad 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "u"] \arrow[uur, bend left, "in_i \circ u"] & N_2 \arrow[u, dashed, "?"] \arrow[uu, bend right, "w"'] & \end{tikzcd}$$

ولدينا $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ امقي إذاً يوجد w كما في المخطط حيث $w \circ f = in_i \circ u$

لنأخذ :

$pr_i \circ w : N_2 \xrightarrow{w} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{pr_i} M_i$ وهو تشاكل

كما وأن :

$$(pr_i \circ w) \circ f = pr_i \circ (w \circ f) = pr_i \circ (in_i \circ u)$$
$$= pr_i \circ (in_i) \circ u = u$$

⟸) لنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i & \\ \text{تامة} \quad 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "u"] & N_2 \arrow[ul, dashed, "w"'] \end{tikzcd}$$

/ / الموضوع: ....

$$\begin{tikzcd} & M_i \\ & \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i \arrow[u, "Pr_i"] & \\ N_1 \arrow[ur, "u"] \arrow[uur, bend left, "Pr_i \circ u"] \arrow[rr, "f"'] & & N_2 \arrow[uul, "u_i"'] \end{tikzcd}$$

لدينا : إن M_i اغمري إذا يوجد u_i تشاكل
حيث $u_i \circ f = Pr_i \circ u$ ممكن
$i = 1, \dots n$
لنأخذ العلاقة

$$w : N_2 \longrightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$$

$$\alpha \longrightarrow (u_1(\alpha), \dots u_n(\alpha))$$

إن w تشاكل معرفة

كذلك : $w \circ f = u$
لأنه ممكن $B \in N_1$ فإن

$$w \circ f(B) = w(f(B)) = (u_1(f(B)), u_2(f(B)), \dots u_n(f(B)))$$

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\pi}} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}$$

$$= u_1(f(B)) + u_2(f(B)) + \dots + u_n(f(B))$$

$$= Pr_1 \circ u(B) + \dots + Pr_n \circ u(B)$$

$$u_i \circ f = Pr_i \circ u$$

$$= (\underbrace{Pr_1(u(B))}_{\text{المركبة الأولى ل } u(B)}, \dots, \underbrace{Pr_n(u(B))}_{\text{المركبة } n \text{ ل } (u(B))})$$

$$= u(B) \qquad (\, , \dots , \,)$$