17 / 11 / 2015 المحاضرة /12/

مثال/ ألقينا حجر نرد مرتين ، وليكن X المتغير الدال على أكبر الوجهين الظاهرين

و Z المتغير الدال على أصغر الوجهين الظاهرين.

جد دالة الكثافة الاحتمالية لكل من X و Z ثم دالة التوزيع لهما.

الحل:

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$R_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وجدولا الكثافة لهما هما:

X	1	2	3	4	5	6	المجموع
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Z	1	2	3	4	5	6	المجموع
$f_Z(z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

دالة توزيعها هي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{36} & 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{36} & 3 \le x < 4 \\ \frac{16}{36} & 4 \le x < 5 \\ \frac{25}{36} & 5 \le x < 6 \\ 1 & 6 \le x \end{cases}$$

طبقنا القانون من المحاضرة السابقة

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \leq z < 2 \\ \frac{20}{36} & 2 \leq z < 3 \\ \frac{27}{36} & 3 \leq z < 4 \\ \frac{32}{36} & 4 \leq z < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \leq z < 6 \\ 1 & 6 \leq z \end{cases}$$

* دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر و دالة توزيعه:

نقول عن الدالة الموجبة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ إنها دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر X إذا كان

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

و مقابل f دالة كثافة احتمالية لـ X نعرف دالة التوزيع الاحتمالي لـ X بـ:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

- نتائج و ملاحظات:

① $F(x^+) = F(x^-) = F(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$

② $$P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b)$$
$$= P(a < x < b)$$
$$= F(b) - F(a)$$

③ $$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$
$$= F(b) - F(a)$$

" [illegible] ان تكون القارئ [illegible] "

/ /

④ إذا كانت A مجموعة قيوسة من $\mathbb{R}$ فإن

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\, dx$$

⑤ إذا كان $F_X(x)$ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير X فإنه حسب ليستمر خ :

من أجل كل $\quad F_X'(x) = f_X(x)$

نقطة x تكون عندها f مستمرة.

/مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \quad (\lambda \text{ ثابت حقيقي موجب})$$

① جد λ لكي تكون $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية مغلقة لـ X

② جد دالة التوزيع الاحتمالي لـ X . احسب $F(2,5)$.

الحل :

لدينا الشرط الأول محقق وهو أن

$$f_X(x) \geq 0$$

لنستخدم الشرط الثاني وهو

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} (0)\, dx}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} \lambda . e^{-x}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \lambda . e^{-x}\, dx = 1$$

/ /

$$\Rightarrow \lambda\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda[0-(-1)] = 1$$

$$\Rightarrow \lambda(1) = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

② دالة التوزيع

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

من أجل $x<0$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt = 0$$

من أجل $x \geq 0$ فإن

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t}\,dx = \left[-e^{-t}\right]_0^x = (-e^{-x}) - (-1)$$

$$= 1 - e^{-x}$$

فتصبح دالة التوزيع لـ X

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

$$F(2,5) = 1 - e^{-(2,5)} = 0,92$$

/ /

تمرين: لتكن لدينا الدالة:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\leq x<2 \\ 0 & 2\leq x \end{cases}$$

1) برهن أن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X

2) أوجد دالة التوزيع $F_X(x)$ ثم احسب $F(0,2)$ و $F(1,5)$

الحل:

لدينا فرضاً أن $f_X(x)\geq 0$ ولنبرهن الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx}_{=0}+\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 \frac{1}{2}\,dx+\underbrace{\int_2^{+\infty}(0)\,dx}_{=0}$$

$$=0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x}{2}\right]_1^2+0$$

$$=0+\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)+0$$

$$=0+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+0$$

$$=\boxed{1}$$

إذن $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية لـ X

2) تعريفاً

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

من أجل $x<0$ فإن

/ /

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt = 0$$

مراحل $0 \le x < 1$ بان

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = 0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2}}$$

مراحل $1 \le x < 2$ ، بان

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{x} \tfrac{1}{2}\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t}{2}\right]_1^x$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{x}{2}}$$

مراحل $2 \le x$ ، بان

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{1} t.\,dt + \int_{1}^{2} \tfrac{1}{2}\,dt + \int_{2}^{x} (0)\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t}{2}\right]_1^2 + 0$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + 0 = \boxed{1}$$

ملخص دالة التوزيع لـ X

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

وبالتالي:

$$F(0,2) = \frac{(0,2)^2}{2} = \frac{0,04}{2} = \boxed{0,02}$$

$$F(1,5) = \frac{1,5}{2} = \boxed{0,75}$$

لدينا استمرارية على كامل المجال الحقيقي

تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك، ثم عين $\boxed{c}$ من أجلها

$$P(X \leq c) = \frac{1}{2}$$

الحل:

$$f_X(x) = \left(F_X(x)\right)' = \left(\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2} \quad ; \quad x > 0$$

ومنه:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

نتحقق من ذلك: لدينا الإيجاب $f_X(x) \geq 0$ ولنبرهن الشرط الثاني:

/ /

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 + (0-(-1)) = \boxed{1}$$

$$P(X \le c) = 1/2 \Rightarrow F(c) = 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = 1+c$$

$$\Rightarrow \boxed{c=1}$$

أي أن احتمال $x \le 1$ = $\frac{1}{2}$

$$P(x \le 1) = 1/2$$

تمرين: إذا علمت أن الطلب اليومي لمادة معينة يمثل متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة التالي:

X	0	1	2	3	4	5	6	>6
$f_X(x)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05	0

① برهن أن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية متقطعة لـ X.

② عين دالة التوزيع $F_X(x)$.

③ احسب $P(X \ge 4)$ و $P(X < 2)$.

الحل:

① لدينا $f_X(x) \ge 0$ و لنبرهن الشرط التالي:

$$\sum_i f_X(x_i) = (0,1) + (0,15) + (0,2) + (0,05) + (0,15) + (0,1) + (0,05) + 0 = \boxed{1}$$

/ /

إذن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية لـ X

(2)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 0{,}1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25 & ; 1 \leq x < 2 \\ 0{,}45 & ; 2 \leq x < 3 \\ 0{,}70 & ; 3 \leq x < 4 \\ 0{,}85 & ; 4 \leq x < 5 \\ 0{,}95 & ; 5 \leq x < 6 \\ 1 & ; 6 \leq x \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - [P(X \leq 4) - P(X = 4)] \\ &= 1 - [F(4) - f(4)] \\ &= 1 - [0{,}85 - 0{,}15] = 1 - 0{,}70 = \boxed{0{,}30} \end{aligned}$$

$$P(X < 2) = F(2) - f(2) = 0{,}45 - 0{,}2 = \boxed{0{,}25}$$

انتهت .