- الفصل السادس:

- الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية:

- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي متقطع، ودالة في متغير عشوائي متقطع.

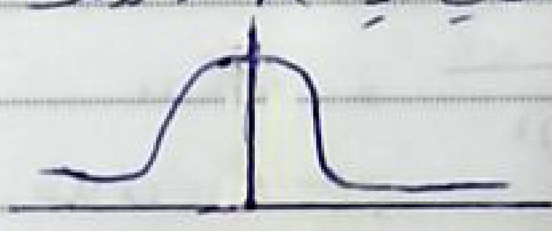
تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة كثافته $f_X(x)$ عندئذٍ نعرف التوقع الرياضي لـ X بـ:

$$E(X)=\sum_x x\, f_X(x)$$

حيث أخذ كل قيم X الممكنة، ولذلك نشترط أن يكون:

$$\boxed{\sum_x |x|\, f_X(x) < +\infty}$$

- إن $E(X)$ يمثل متوسط القيم التي يأخذها المتغير X على المدى الطويل أي متوسط مجموع القياسات الواضحة لـ X إذا كررنا التجربة عدد كبير من المرات، وأيضاً قيمة $E(X)$ تمثل الموقع على المحور ox والتي يتركز حولها التوزيع الاحتمالي لـ X ولذلك تسمى متوسط التوزيع الاحتمالي.



مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة التالي:

دالة متقطع

X	0	1	2	3	المجموع
$f_X(x) = P(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

عين توقع X.

الحل:

$$E(X)=\sum_x x\, f_X(x)$$

$$= 0\left(\tfrac{1}{8}\right)+(1)\left(\tfrac{3}{8}\right)+(2)\left(\tfrac{3}{8}\right)+(3)\left(\tfrac{1}{8}\right) =$$

$$\frac{3+6+3}{8}=\frac{12}{8}=\boxed{1.5}$$

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة كثافته $f_X(x)$ ، ولتكن $g(X)$ دالة بدلالة X عندئذٍ

$$E(g(X)) = \sum_x g(x) f_X(x)$$

شرط أن يكون

$$\sum_x |g(x)| f_X(x) < +\infty$$

مثال: احسب $E(X^2)$ في المثال السابق.

إذن $g(X) = X^2$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x)$$

$$= (0)^2\left(\tfrac{1}{8}\right) + (1)^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + (2)^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + (3)^2\left(\tfrac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3+12+9}{8} = \frac{24}{8} = \boxed{3}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} & ; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

هل لـ X توقع؟

الحل:

$$E(X) = \sum_x x\, f_X(x)$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

وهي متسلسلة متباعدة وبالتالي ليس لـ X توقع.

_ التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر و لدوال في هذا المتغير:

تعريف: ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا كثافته $f_X(x)$ عندئذ نعرف توقع X بـ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

شرط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| . f_X(x)\, dx < +\infty$$

و من أجل $g(X)$ دالة في X يكون

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

شرط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, f_X(x)\, dx < +\infty$$

مثال: ليكن X متغيرا عشوائيا كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & ; \ x \in [2,5] \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع X و $E(X^2)$ و $E(X+1)$

الحل:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{2}^{5} x (1/3)\, dx = 1/3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = 1/3 \left(\frac{25-4}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{7}{2}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \int_2^5 \underbrace{\boxed{x^2}}_{=g(x)} (1/3)\,dx = 1/3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5$$

$$= 1/3 \left(\frac{125-8}{3}\right) = \frac{117}{9} = \boxed{13}$$

$$E(X+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_2^5 (x+1)\, 1/3\,dx$$

$$= 1/3 \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^5 = 1/3 \left[\left(\frac{25}{2}+5\right) - \left(\frac{4}{2}+2\right)\right]$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}}$$

خواص التوقع :

① $E(C) = C \qquad \forall C \in \mathbb{R}$

البرهان:

$$E(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\, f_X(x)\,dx$$

$$= c \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{} = \boxed{c}$$

② $E(c.X) = c \cdot E(X)$ $\boxed{1}$

البرهان:

$$E(c.X) = \int_{-\infty}^{+\infty} c.x\, f_X(x)\,dx$$

$$= c.\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = c.E(X)$$

3) $E\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(g_i(x))$

4) $|E(X)| \leq E|X|$

5) إذا كان

$$a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(X) \leq b$$

6) $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

7) إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين، وكان $E(X) < +\infty$ و $E(Y) < +\infty$ فإنه إذا كان

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

لأن:

$$X \leq Y \Rightarrow \underbrace{Y - X}_{\text{متغير عشوائي}} \geq 0$$

$$\Rightarrow E(Y-X) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(Y) - E(X) \geq 0 \Rightarrow E(Y) \geq E(X)$$

8) $E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$

$\forall c_i \in \mathbb{R}$

9) إذا كانت X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين، ولكل منهما توقع فإن

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$

10) إذا كان X_1 و X_2 ، ... ، X_n متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها توقع فإن

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

11) إن عكس الخاصة (9) ليس صحيحاً بشكل عام أي يمكن أن يكون $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ دون أن يكونا مستقلين عشوائياً

12) لاحظ $E(X^2) \neq (E(X))(E(X))$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \frac{x}{10} \quad ; \quad x = 1,2,3,4$$

جد توقع $X(X-5)$

الحل: حسب خواص التوقع فإن:

$$E(X(X-5)) = E(X^2 - 5X)$$
$$= (E X^2) - 5(EX)$$

نحسب الآن

$$E(X) = \sum_x x \, f_X(x)$$
$$= (1)\left(\frac{1}{10}\right) + (2)\left(\frac{2}{10}\right) + (3)\left(\frac{3}{10}\right) + (4)\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$= \frac{30}{10} = \boxed{3}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x)$$
$$= (1)^2\left(\frac{1}{10}\right) + (2)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (3)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (4)^2\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$= \frac{100}{10} = \boxed{10}$$

$$\Rightarrow E(X(X-5)) = (10) - 5(3) = \boxed{-5}$$

نتيجة: ليكن χ_A الدالة المميزة للمجموعة A فإن

χ_A	1	0
P_i	$P(A)$	$1-P(A)$

ومنه:

$$E(\chi_A) = (1)P(A) + (0)(1-P(A))$$

/ /

$$\boxed{E(X_A)=P(A)}$$

العزوم:

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(x)$ وليكن $\boxed{r\geq 1}$ صحيحاً
إذا وجد لكل X^r توقع فإننا ندعوه بالعزم من المرتبة $\boxed{r}$
ونعطيه بالشكل:

$$E(X^r)=\begin{cases}\sum_x x^r f_X(x), & (X \text{ متقطع})\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)\,dx; & (X \text{ مستمر})\end{cases}$$

نلاحظ من أجل $\boxed{r=1}$ أن العزم من المرتبة الأولى هو التوقع $\boxed{\mu=EX}$
ومن أجل $\boxed{r=2}$ العزم من المرتبة الثانية وهكذا...

نتيجة: بما أن $|X|^{r-1}\le |X|^r$
وهذا يعني أنه إذا وجد العزم من المرتبة $\boxed{r}$ فإن العزم
من مرتبة أصغر من $\boxed{r}$ تكون موجودة

تعريف: نعرف العزم المركزي من المرتبة $\boxed{r\geq 1}$ حول $\boxed{\mu=EX}$ بـ:

$$E(X-\mu)^r=\begin{cases}\sum_x (x-\mu)^r f_X(x); & (\text{متقطع})\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^r f_X(x)\,dx; & (\text{مستمر})\end{cases}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

جد $E(X^r)$، واستنتج $E(2X+1)^2$

الحل:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^r \left(2(1-x)\right) dx = 2\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^{r+2}}{r+2}\right]_0^1$$

$$E(X^r) = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \boxed{\frac{2}{(r+1)(r+2)}}$$

وبالتالي:

$$E(2X+1)^2 = E\left[4X^2 + 4X + 1\right]$$

$$= 4EX^2 + 4EX + 1$$

$$= 4\left(\frac{2}{(3)(4)}\right) + 4\left(\frac{2}{(2)(3)}\right) + 1$$

$$= 2/3 + 4/3 + 1 = \boxed{3}$$

انتهت

وبالتالي:

$$E(X^r) = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) \Rightarrow E(X^r) = \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

$$E(2X+1)^2 = E[4X^2+4X+1] = 4EX^2 + 4EX + 1$$
$$= 4\left(\frac{2}{3(4)}\right) + 4\left(\frac{2}{(2)(3)}\right) + 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 = 3$$

المحاضرة التاسعة عشرة:

13/12/2015

2- التباين والانحراف المعياري:

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً له عزوم من المرتبة الثانية $(EX^2 < +\infty)$ فإننا نعرف تباين X (variance) بالعلاقة:

$$\boxed{Var(X) := E(X - EX)^2}$$

ومن أجل $EX = \mu$ نجد أن:

$$\boxed{Var(X) := E(X - \mu)^2}$$

وهو العزم المركزي من المرتبة الثانية حول μ، وهو يمثل متوسط مربعات انحرافات القياسات عن متوسطها.

تعريف: نعرف الانحراف المعياري لـ X بالعلاقة:

$$\boxed{\sigma_X := \sqrt{Var(X)}}$$

الجذر الموجب للتباين

صيغة أبسط لحساب التباين:

$$\boxed{Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - \mu^2}$$

البرهان:

$$Var(X) := E(\underbrace{X - \mu}_{\text{ثابت}})^2$$
$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$
$$= EX^2 - 2\mu \underbrace{EX}_{\mu} + \mu^2$$
$$= EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = EX^2 - \mu^2$$

خواص التباين:

1) $Var(c) = 0 \quad ; \forall c \in \mathbb{R}$

2) $Var(cX) = c^2 . Var(X) \quad ; \forall c \in \mathbb{R}$

مطلوب البرهان

$var(c) = E(c^2) - (Ec)^2 = c^2 - c^2 = 0$ (1)

$var(cX) = E(cX)^2 - (E(cX))^2$ (2)
$= c^2 EX^2 - (c.EX)^2$
$= c^2 EX^2 - c^2(EX)^2$
$= c^2[EX^2 - (EX)^2]$
$= c^2 . var X$

نتيجة:

$$\sigma_{cX} = |c| . \sigma_X$$

$$\sigma_{cX} = \underbrace{\sqrt{var(cX)}}_{\text{الجذر الموجب}} = \sqrt{c^2 . var(X)} = \sqrt{c^2}\sqrt{var(X)} = |c| . \sigma_X$$

Alnour

3)
$$Var(aX+b)=a^2\,Var(X)\ ;\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$$

البرهان:

$$Var(aX+b)=E(aX+b)^2-\big(E(aX+b)\big)^2$$
$$=E(a^2X^2+2abX+b^2)-(a\,EX+b)^2$$
$$=(a^2EX^2+\underbrace{2abEX}+b^2)-[a^2(EX)^2+\underbrace{2abEX}+b^2]$$
$$=a^2\big(EX^2-(EX)^2\big)=a^2.Var(X)$$

4)
$$var(X)\leq E(X-a)\quad ;\ \forall a\in\mathbb{R}$$

البرهان:

$$(X-a)^2=\big((X-EX)+\underbrace{(EX-a)}_{=c}\big)^2$$
$$=[(X-EX)^2+2(X-EX)\underbrace{(EX-a)}_{ثابت}+\underbrace{(EX-a)^2}_{ثابت}]$$

نأخذ توقع الطرفين:

$$E(X-a)^2=E(X-EX)^2+2(EX-a).E(X-EX)+(EX-a)^2$$
$$=var(X)+2(EX-a)\underbrace{[EX-EX]}_{=0}+(EX-a)^2$$
$$\Rightarrow E(X-a)^2=Var(X)+\underbrace{(EX-a)^2}_{\geq 0}$$
$$\Rightarrow Var(X)\leq E(X-a)^2$$

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2. عندئذٍ نسمي المتغير $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ المتغير المعياري لـ X. ويكون $E(Z)=0$ ، $Var(Z)=1$.

البرهان:

$$E(Z)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}(\underbrace{EX}_{\mu}-\mu)$$
$$=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0$$

$$Var(Z)=Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu)$$
$$=\underbrace{\frac{1}{\sigma^2}}_{=Var(X)}Var(X)=1$$

من الخاصة (3)
$$Var(\underbrace{a}_{=1}X+\underbrace{b}_{-\mu})=a^2\cdot Var(X)$$

أو

(3) بالخاصة $a=\frac{1}{\sigma}$, $b=\frac{-\mu}{\sigma}$

3ـ التغاير وخواصه: (Covariance)

تعريف: ليكن X، Y متغيرين عشوائيين لكل منهما توقع منتهٍ (أي $EX<+\infty$ ، $EY<+\infty$) ولـ $X.Y$ توقع منته ($E(X.Y)<+\infty$) عندئذٍ نعرف تغاير (X,Y) بالعلاقة:

$$cov(X,Y)=E\big((X-EX)(Y-EY)\big):=\sigma_{XY}$$

صيغة مبسطة لحساب التغاير:

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(X.Y) - (EX).(EY)}$$

البرهان:

$$Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$
$$= E[X.Y - Y.EX - X.EY + EX\,EY]$$
$$= E(X.Y) - EX\,EY - EY.EY + EX.EY$$
$$= E(X.Y) - EX.EY$$

حيث نُعرِّف:

$$E(X.Y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f(x,y)\, dx\, dy \ ; & (X,Y) \text{ شعاع مستمر} \\ \sum_x \sum_y x.y\, f(x,y) \ ; & (X,Y) \text{ شعاع متقطع} \end{cases}$$

مبرهنة: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $E(X.Y) = EX.EY$

البرهان: (حالة استمرار):

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f(x,y)\, dx\, dy$$

وبما أن X و Y مستقلين فإن: $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

نعوض فنجد ما يلي:

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f_X(x).f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx . \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = EX.EY$$

حالة الانقطاع مطلوبة نضع بدل $\int$ مجموع $\sum$

نتيجة: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $\underset{\text{نظريا}}{Cov(X,Y) = 0}$

لأن:

$$Cov(X,Y) \overset{\text{تعريف}}{=} E(X.Y) - EX.EY$$
$$\overset{\text{استقلال}}{=} EX.EY - EX.EY = 0$$

مبرهنة: $Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y) \boxed{\mp} 2\,Cov(X,Y)$

البرهان:

$$Var(X \mp Y) = E(X \mp Y)^2 - (E(X \mp Y))^2$$
$$= E(X^2 \mp 2XY + Y^2) - (EX \mp EY)^2$$
$$= EX^2 \mp 2E(X.Y) + EY^2 - [(EX)^2 \mp 2\,EX\,EY + (EY)^2]$$

/ /

$$= \left(EX^2 - (EX)^2 \right) + \left(EY^2 - (EY)^2 \right) \mp 2\left(E(X.Y) - EX.EY \right)$$

$$\Rightarrow Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y) \mp 2\,Cov(X,Y)$$

هذه النتائج يمكن استنتاجها من خواص التغاير

نتيجة (1) إذا كان X و Y مستقلان فإن : $Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y)$

نتيجة (2) : $Cov(X,X) = Var(X)$

نتيجة (3) : $Cov(aX+b, cY+d) = a.c.\,Cov(X,Y) \; ; \; a,b,c,d \in \mathbb{R}$

البرهان :

$$Cov(aX+b, cY+d) = E((aX+b)(cY+d)) - E(aX+b).E(cY+d)$$

$$= E(a.c.X.Y + a.d.X + c.b.Y + b.d) - (a.EX+b).(c.EY+d)$$

$$= a.c.E(X.Y) + \cancel{a.d.EX} + \cancel{c.b.EY} + \cancel{b.d} - a.c.EX.EY - \cancel{a.d.EX} - \cancel{c.b.EY} - \cancel{b.d}$$

$$= a.c.\,E(X.Y) - a.c.EX.EY$$

$$= a.c\left[E(X.Y) - EX.EY \right]$$

$$= a.c.\,Cov(X,Y)$$

15/12/2015

المحاضرة العشرون :

4- معامل الارتباط وخواصه :

تعريف : ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لهما عزوم من المرتبة الثانية منتهية ($EX^2 < +\infty$ و $EY^2 < +\infty$)

نعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y بالعلاقة :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

نتيجة : إذا كان X و Y مستقلين فإن $\sigma_{XY} = 0$ وبالتالي $\rho(X,Y) = 0$

خواص معامل الارتباط :

البراهين مطلوبة

1) $\rho(X,X) = 1$

لأن : $\rho(X,X) = \frac{Cov(X,X)}{\sigma_X.\sigma_X} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$

2) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$

البرهان : سنستخدم متراجحة شوارتز : $\boxed{(E(X.Y))^2 \leq EX^2.EY^2}$

15 / 12 / 2015 المحاضرة العاشرة

معامل الارتباط وخواصه:

تعريف: ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لهما عزوم من الرتبة الثانية منتهية

$$(EY^2 < +\infty \quad , \quad EX^2 < +\infty)$$

نعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y بالعلاقة:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

نتيجة: إذا كان X و Y مستقلين فإن: $\sigma_{XY} = 0$ وبالتالي

$$\rho(X,Y) = 0$$

خواص معامل الارتباط:

① $\rho(X,X) = 1$ لأن:

$$\rho(X,X) = \frac{Cov(X,X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$

② $-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$ البرهان:

نستخدم متراجحة شوارتز

$$(E(X.Y))^2 \leq EX^2 . EY^2$$

باستبدال الـ X بـ $(X - EX)$

و Y بـ $(Y - EY)$ فنجد

/ /

$$\left(E\left((X-EX)(Y-EY)\right)\right)^2 \leq E(X-EX)^2 \cdot E(Y-EY)^2$$

$$\Rightarrow \left(cov(X,Y)\right)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(cov(X,Y)\right)^2}{Var(X) \cdot Var(Y)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\rho(X,Y)\right)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1}$$

$$\rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \rho(X,Y) & ; a.c>0 \\ -\rho(X,Y) & ; a.c<0 \end{cases} \quad 3$$

البرهان:

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{cov(aX+b, cY+d)}{\sqrt{Var(aX+b)} \cdot \sqrt{Var(cY+d)}}$$

$$= \frac{a.c.cov(X,Y)}{|a| \cdot \sqrt{Var(X)} \cdot |c| \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \frac{a.c}{|a|.|c|} \cdot \rho(X,Y) = \begin{cases} \rho(X,Y) & ; a.c>0 \\ -\rho(X,Y) & ; a.c<0 \end{cases}$$

نتيجة: (دون برهان): الشرط اللازم والكافي لكي يكون X و Y مرتبطين خطياً هو $\left(\rho(X,Y)\right)^2 = 1$

/ /

مثال: ليكن (X,Y) متغيراً عشوائياً دالة كثافته المشتركة معطاة بالجدول التالي:

$Y \backslash X$	-1	0	1
-2	$2/10$	$1/10$	$1/10$
0	$1/10$	0	$1/10$
2	$1/10$	$2/10$	$1/10$

استنتج جدول الكثافات الهامشية ثم عين $\rho(X,Y)$
هل X و Y مستقلان عشوائياً؟

الحل:

X	-1	0	1	المجموع
$f_X(x)$	$4/10$	$3/10$	$3/10$	1

Y	-2	0	2	المجموع
$f_Y(y)$	$4/10$	$2/10$	$4/10$	1

$$E(X) = \sum_x x\, f_X(x)$$

$$= (-1)(4/10) + (0)(3/10) + (1)(3/10) = \boxed{-1/10}$$

$$E X^2 = \sum_x x^2\, f_X(x)$$

$$= (-1)^2(4/10) + (0)^2(3/10) + (1)^2(3/10)$$

$$= \boxed{7/10}$$

$$\Rightarrow Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$
$$= 7/10 - (-1/10)^2 = \boxed{69/100}$$

$$E(Y) = \sum_y y\, f_Y(y)$$

$$= (-2)(4/10) + (0)(2/10) + (2)(4/10) = \boxed{0}$$

$$EY^2 = \sum_y y^2 f_Y(y)$$

$$= (-2)^2(4/10) + (0)^2(2/10) + (2)^2(4/10) = \boxed{32/10}$$

$$\Rightarrow Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = 32/10 - 0 = \boxed{32/10}$$

$$E(X.Y) = \sum_x \sum_y x.y\, f(x,y)$$

$$= (-1)(-2)(2/10) + (-1)(0)(1/10) +$$
$$(-1)(2)(1/10) + (0)(-2)(1/10) +$$
$$(0)(0)(0) + (0)(2)(2/10) +$$
$$(1)(-2)(1/10) + (1)(0)(1/10) + (1)(2)(1/10).$$

$$\Rightarrow E(X.Y) = \boxed{2/10}$$

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - (EX.EY)$$
$$= 2/10 - (-1/10)(0) = \boxed{2/10}$$

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \frac{2/10}{\sqrt{69/100}\ \sqrt{\frac{32}{10}}} \simeq \boxed{0.135}$$

إذن: $\rho(X,Y) \neq 0$

وبالتالي

X و Y غير مستقلين عشوائياً.

مثال: ليكن X، Y متغيرين عشوائيين كثافتهما المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & ; 0 \le x \le 1 \ ,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

عين $\rho(X,Y)$.

الحل: نعين أولاً الكثافات الهامشية.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 6xy(2-x-y)\,dy = x(4-3x)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} x(4-3x) & ; 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} ; \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^1 6xy(2-x-y)\,dx$$

$$= y(4-3y)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} y(4-3y) & ; \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \ \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\Rightarrow EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot x(4-3x)\,dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{7/12}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot x(4-3x)\,dx$$

$$= \left[x^4 - \frac{5x^5}{5}\right]_0^1 = \boxed{2/5}$$

$$Var(Y) = \boxed{\frac{43}{720}}$$

بالمثل

/ /

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y \; f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x.y.6xy(2-x-y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 6x^2\left[\frac{2y^3}{3} - x\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 dx$$

$$= \left[\frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \boxed{1/3}$$

$$\text{cov}(X,Y) = E(X.Y) - EX.EY$$

$$= 1/3 - (7/12 \cdot 7/12) = \boxed{\frac{-1}{144}}$$

صح

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)} \cdot \sqrt{\text{var}(Y)}}$$

$$= \frac{-1/144}{\sqrt{\frac{43}{720}} \cdot \sqrt{\frac{43}{720}}} = \boxed{\frac{-5}{43}}$$

نلاحظ أن $\rho(X,Y) \neq 0$ ؛ بالتالي هما مرتبطان (غير مستقلان)

٥- الدوال المولدة للعزوم وخواصها:

تعريف: ليكن X متغير عشوائي كتلته $f_X(x)$ نعرف الدالة المولدة للعزوم X بـ:

$$M_X(t) = E(e^{t.X}), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) & ; (\text{متقطع } X) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx & ; (\text{مستمر } X) \end{cases}$$

خواص الدالة المولدة للعزوم:

① $$M_{aX+b}(t) = e^{bt} . M_X(at)$$

البرهان:

$$M_{aX+b}(t) = E\left(e^{t(aX+b)}\right)$$

$$= E\left(\underbrace{e^{atX}}_{\text{متغير}} . \underbrace{e^{tb}}_{\text{ثابت}}\right)$$

$$= e^{tb}\, E\, e^{at.X} = e^{tb} M_X(at)$$

② $$E X^r = \left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$$

(أي نشتق بالنسبة لـ t ثم نعوض r=0)

وبالتالي:

$$EX = \left.(M_X(t))'\right|_{t=0}$$

$$EX^2 = \left.(M_X(t))''\right|_{t=0}$$

③ إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين بأن

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$$

البرهان:

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right)$$

$$= E\left(e^{tX} \cdot e^{tY}\right)$$

نعوض

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{ty} \cdot f(x,y)\, dx dy$$

وبما أن X و Y مستقلان فإن

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$$

نعوض نجد

$$M_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{ty} \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} f_Y(y)\, dy$$

$$= E\left(e^{tX}\right) \cdot E\left(e^{tY}\right) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

④ إذا كان X متغيراً عشوائياً دالته المولدة للعزوم $M_X(t)$ وكانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لـ X عندئذ:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(M_X(t)\right) = \left(M_X(t)\right)^n$$

/ /

($(X_i)_{1\le i\le n}$ عينة عشوائية لـ X أي لها جميعاً توزيع X
ومستقلة فيما بينها)

⑤ هناك توزيع احتمالي وحيد لـ X له الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$

مثال X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} p & ; \quad x=1 \\ q & ; \quad x=0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث $0<p<1$ ، $p+q=1$ عين $M_X(t)$

واحسب EX^3 ثم استنتج $Var X$.

الحل:

$$M_X(t) = E\, e^{tX}$$

$$= \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$= e^{t(1)} \cdot p + e^{t(0)} \cdot q + 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{M_X(t) = pe^t + q} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$EX = M'_X(t)\Big|_{t=0} = pe^t\Big|_{t=0} = p$$

$$EX^2 = M''_X(t)\Big|_{t=0} = pe^t\Big|_{t=0} = p$$

$$EX^3 = M'''_X(t)\Big|_{t=0} = pe^t\Big|_{t=0} = \boxed{p}$$

$$\Rightarrow Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p)$$
$$= p \cdot q$$

الدالة المولدة للعزوم لشعاع عشوائي:

لتكن $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة لـ (X,Y) وإذا كان

$E(e^{t_1X} + e^{t_2Y})$ موجودة من أجل قيم $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

فإننا نعرف الدالة المولدة لعزوم الشعاع (X,Y) بـ:

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = E(e^{t_1X + t_2Y})$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{t_1x + t_2y} f(x,y) & ; \text{المتقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x + t_2y} f(x,y)\,dx\,dy & ; \text{مستمر} \end{cases}$$

خواصها:

① $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ تحدد توزيع (X,Y) وتوزيع X وتوزيع Y

بسبب الوحدانية.

② $M_{X,Y}(t_1, 0) = M_X(t_1) = E(e^{t_1X})$

③ $M_{X,Y}(0, t_2) = M_Y(t_2) = E(e^{t_2X})$

④ $$E(X^k Y^m) = \left. \frac{\partial^{k+m} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^k \cdot \partial t_2^m} \right|_{t_1=0,\, t_2=0}$$

$$E(X) = \frac{\partial M_{X,Y}(t_1, 0)}{\partial t_1}\Bigg|_{t_1=0}$$

$$EY = \frac{\partial M_{X,Y}(0, t_2)}{\partial t_2}\Bigg|_{t_2=0}$$

$$E(X.Y) = \frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \, \partial t_2}\Bigg|_{t_1=0,\ t_2=0}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته ذي الحدين

$$f_X(x) = \begin{cases} C^n_x \, p^x q^{n-x} & ; x = 0, \dots, n, \quad 0<p<1, \ q = 1-p \\ 0 & \text{خلاف ذلك} ; \end{cases}$$

عين الدالة المولدة للعزوم X $\quad M_X(t)$

الحل:

$$M_X(t) = E e^{tX} = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C^n_x \, p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} C^n_x \, (e^t p)^x q^{n-x}$$

$$= (e^t p + q)^n$$

حسب منشور ثنائي الحدين

$$\left[(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \, x^k y^{n-k} \right]$$

/ /

6- الدالة المميزة لمتغير عشوائي X :

تعريف: إذا كان X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(x)$ نعرف الدالة المميزة لـ X بـ

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) \quad ; \boxed{i = \sqrt{-1}}$$

$$= \begin{cases} \sum e^{itx} f_X(x) & , X \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx & ; X \text{ مستمر} \end{cases}$$

مثال: (X,Y) متجه عشوائي كثافته :

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & ; \ 0 < x < y < \infty \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ ، $M_X(t)$ ، $M_Y(t)$

الحل :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{t_1X + t_2Y})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x + t_2y} \underbrace{e^{-y}}_{f(x,y)} \, dx\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\int_x^{+\infty} e^{t_1x + t_2y - y}\, dy\right] dx$$

/ /

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t_2-1)} e^{t_1 x + t_2 y - y} \right]_x^{+\infty}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-1}{(t_2-1)} e^{t_1 x + (t_2-1)x} dx \; ; \; (t_2-1)<0$$

$$= \frac{-1}{(t_2-1)} \left[\frac{1}{t_1+t_2-1} e^{(t_1+t_2-1)x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{(t_2-1)} \left(\frac{-1}{t_1+t_2-1} \right) \; ; \; \begin{matrix} (t_1+t_2-1)<0 \\ (t_2-1)<0 \end{matrix}$$

$$M_{x,y}(t_1,t_2) = \frac{1}{(1-t_1-t_2)(1-t_2)} \; , \; \begin{matrix} t_2<1 \\ t_1+t_2<1 \end{matrix}$$

$$M_X(t_1) = M_{X,Y}(t_1,0) = \frac{1}{1-t_1} \; ; \; t_1<1$$

$$M_Y(t_2) = M_{X,Y}(0,t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^2} \; ; \; t_2<1$$

انتهت .

المحاضرة الأخيرة .