١٤٠٣ ٢٠١٠ / ١١ / ٢٥

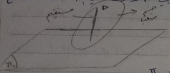
الحركة المستوية

تعريفها: هي حركة جسم صلب بحيث تبقى كل نقطة منه في مستوي واحد يوازي المستوي الثابت بالفراغ يسمى المستوي الثابت بالمستوي الأساسي للحركة ونرمز له π_1.

إذاً أن جميع نقاط الحاوية على مسارات النقط تقع في مستويات موازية للمستوي الأساسي.

النظرية الأساسية:

إذا تحرك جسم صلب حركة مستوية فإن أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي π_1 ومتماسك مع الجسم يتحرك حركة انسحابية.



البرهان: جسم صلب S $\forall A,B\in\Delta \Rightarrow A,B\in S$

$\Rightarrow |\vec{AB}| = c$ ثابت

لكن $A\in\Delta$ يوجد مستوي π' يوازي المستوي الأساسي π_1

و $B\in\Delta$ " " π'' " " π_1

$\Rightarrow \pi' \parallel \pi'' \parallel \pi_1$

ومن الفرض لدينا $AB \perp \pi_1 \Rightarrow \vec{AB}$ ثابت

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{c}$

نستنتج أن AB ثابتة منحى وثابتة طويلة

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0}$$

ولتكن $O_1 \in$ للمعلم الثابت

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{O_1B}-\vec{O_1A})}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{O_1B}}{dt} = \frac{d\vec{O_1A}}{dt} \Rightarrow \vec{V}(B) = \vec{V}(A)$$

ومنه الحركة انسحابية ... انتهى البرهان.

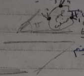
نتيجة: لو أخذنا أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي للحركة فإن جميع نقاطه تمتلك نفس السرعة ونفس التسارع ومعرفة سرعة أي نقطة منه فإننا نستطيع معرفة جميع سرع النقاط الواقعة على المستقيم المقام على هذه النقطة ويعامد π_1.

فلدراسة الحركة المستوية لجسم صلب يكفي دراسة حركة مستوي واحد يقع في المستوي الأساسي للحركة.

إذاً تقاد الحركة المستوية إلى دراسة حركة نقاط مستوي تقع داخل المستوي الأساسي للحركة.

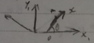
*** تعين درجات حرية الجسم الصلب الذي يتحرك حركة مستوية:**

نعلم أن للمستوي المتحرك 3 درجات من الحرية لأنه يتعين إذا علمنا موضع ثلاث نقاط منه غير واقعة على استقامة واحدة ولكل نقطة منه وسيطين في المستوي وهذه الوسطاء مرتبطة بـ 3 علاقات (البعد) إذاً عدد الوسطاء المستقلة هي 3 إذا نحتاج إلى 3 معادلات للحركة إذاً نحتاج إلى قطب يتعين بإحداثين ونهاية أولى هي عبارة عن زاوية واحدة لأن الحركة تتم في مستوي يشمل دوران فيها معمول على Δ العامودي على Π



إذاً الوسطاء هي $O(x_0, y_0)$ والزاوية θ حيث θ هي زاوية $3=3-6$ الدوران التي يصنعها مستقيم متماسك من مستوي متحرك مع المستقيم الثابت في المستوي الثابت.

مثال قضيب OA يتحرك حركة مستوية نختار O متحركة على أحد محاور وتكون θ هي بين Ox_1 و Ox



*** تعين موضع وسرعة وتسارع أي نقطة من الجسم الصلب:**

$$\forall M \in S : \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

حيث O هي قطب للحركة. علماً لدينا دوران خلدين دوران حول O.

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

حيث $\vec{v}(O)$ سرعة القطب و $\vec{\omega}$ سرعة الآنية

وهي نفس العلاقة التي حصلنا عليها في الحركة العامة لجسم صلب لكن $\vec{\omega}$ هنا لا يتغير منحاه وهو يعامد مستوي الحركة أي $\vec{\omega}$ دوماً عامودي على Π. أيضاً $\vec{\omega}$ لا يتغير من نقطة لأخرى ولا يتعلق باختيار القطب

*** المركز الآني للدوران:** هو نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها بالنسبة للمستوي ثابت في لحظة معينة نرمز لها بـ I إذاً $I \in \Pi$ لكن $\vec{v}(I) = 0$ بالنسبة لـ Π_1 وإذا اخترنا المركز الآني للدوران هو قطب الحركة عندها:

$$\forall M \in S , \quad \vec{v}(M) = \underbrace{\vec{v}(I)}_{0} + \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

أي أن سرعة M في كل لحظة هي سرعة دورانية حول I لذلك يدعى I مركز آني للدوران.

مبرهنة: إن المركز الآني للدوران أن وجد فهو وحيد.

الإثبات: لنفرض I_1 و I_2 مركزان آنيان للدوران وهما نقطتان من المستوي المتحرك ومنه في لحظة معينة يكون: $\vec{v}(I_2) = \vec{v}(I_1)$

$$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(I_1) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2}$$

$$0 = 0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2}$$

$$\vec{0} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2}$$

يكون جداء خارجي مساوي صفر إذا كان شعاعين متوازين لكن هنا $\overrightarrow{I_1I_2} \not\parallel \vec{\omega}$ لكون $\vec{\omega} \perp \Pi$ دوماً وأيضاً $\vec{\omega} \neq 0$ لأنه شعاع دوران $\Leftarrow$ $\overrightarrow{I_1I_2} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{I_1I_2} = \vec{0} \Rightarrow$ I_1 منطبق على I_2

ملاحظة: إذا كانت A و B نقطتين من مستوي متحرك فإن: $\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA}$

وأيضاً: $\vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IB}$.

لدينا: $|\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}| . |\overrightarrow{IA}| . \sin\frac{\pi}{2}$

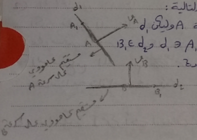
لكن شعاعين من مستوي متحرك

$|\vec{v}(B)| = |\vec{\omega}| . |\overrightarrow{IB}| . \sin\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(A)|}{|\overrightarrow{IA}|} = \frac{|\vec{v}(B)|}{|\overrightarrow{IB}|}$$ — هامة

★ تعين مركز الدوران الآني للدوران هندسياً: ويأتي سؤال نظريا.

نختار نقطتين A و B في مستوي الحركة ونميز الحالات التالية:



١) $\vec{v}(A) \not\parallel \vec{v}(B)$: نرسم مستقيم عامودي على سرعة A وليكن d_1 ونرسم مستقيم عامودي على سرعة B وليكن d_2 ولتكن $A_1 \in d_1$ و $B_1 \in d_2$

نطبق نظرية على A,A_1 و B,B_1 كل واحدة على حدة.

أولاً على A,A_1:

$$\text{proj}_{d_1} \vec{v}(A) = \text{proj}_{d_1} \vec{v}(A_1)$$

لكن $d_1 \perp v(A)$

$$\Rightarrow \text{proj}_{d_1} \vec{v}(A_1) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A_1) = 0 \text{ أو } \perp d_1$$

بنفس طريقة من أجل B,B_1 نستنتج

$$\vec{v}(B_1) = 0 \text{ أو } \perp d_2$$

~~وبما أن $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(B) \Leftarrow d_1 \nparallel d_2 \Leftarrow d_1$ و d_2 متقاطعين في نقطة ولتكن I~~

$$I \in d_1 \cap d_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in d_1 & \text{أي} \\ I \in d_2 & \text{أو} \end{cases}$$

وبالتالي

$$I \in d_1 \Rightarrow \vec{v}(I) \begin{cases} 0 \\ \perp d_1 \end{cases}$$

$$I \in d_2 \Rightarrow \vec{v}(I) \begin{cases} 0 \\ \perp d_2 \end{cases}$$

ومنه نجد حالتين $\vec{v}(I) = 0$ عندها تكون I مركز آني لدوران.

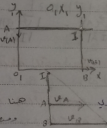
ولا يمكن أن يكون $\vec{v}(I)$ عامودي على كلا من d_1 و d_2 لكون $(d_1 \cap d_2)$.

بالنتيجة في المسائل :

* بالمسائل . إذا كان سرعة نقطتين غير متوازيين فإننا نقيم عامودين واحد على A وواحد على B ونقطة تقاطع العامودين هو مركز آني لدوران.

مثال توضيحي: ليكن AB مستقيم ينزلق طرفاه في مستوي $O_1 X_1 y_1$

مع هنا غير متوازية لذلك نقيم عامود من نقطة A ونقاطعه مع عامود مقام من B فينتج I مركز آني لدوران



هنا d_1 منطبق على d_2 ومنطبق على مستقيم AB

2) $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ ولكن $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$:

تكون نظرية المساقط محققة إذا كان المستقيم عامودي على منحني السرعتين $v(A)$ و $v(B)$ و بوصل نهاية السرعتين المستقيم ~~[illegible]~~ مفصلها مركز الآني لدوران I يقع على على مستقيم لأن من تشابه مثلثات نجد أن :

$$\frac{|v(A)|}{|IA|} = \frac{|v(B)|}{|IB|}$$

عندها يكون I مركز آني لدوران.