تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة

$$f_X(x) = \begin{cases} Kx^2 & ; \quad x \in [0,3] \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

① عين الثابت K حتى تكون $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية لـ X

② عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ X ، ثم احسب

$P(1 < X < 2)$

الحل: ① يجب أن يتحقق الشرط

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{=0} + \int_{0}^{3} Kx^2\,dx + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} 0\,dx}_{=0} = 1$$

$$0 + K\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 0 = 1$$

$$K\left(\frac{27}{3} - 0\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad K \cdot 9 = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{9}$$

أي أن دالة الكثافة الاحتمالية الفعلية لـ X هي

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & ; \quad x \in [0,2] \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

② دالة التوزيع الاحتمالي تعطى بالعلاقة:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

من أجل $x<0$

فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0$$

من أجل $0<x\le 3$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{t^2}{9}\,dt = \frac{x^3}{27}$$

من أجل $x<3$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{3} \frac{t^2}{9}\,dt + \int_{3}^{x} (0)\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^3 + 0$$

$$= (1-0) = 1$$

ملاحظة:

في الامتحانات: عند طلب إيجاد الثابت K يجدر بنا في الطلبة

بعد تعويض قيمة K التي أوجدناها.

نعوض $x = 0, 1, 2$

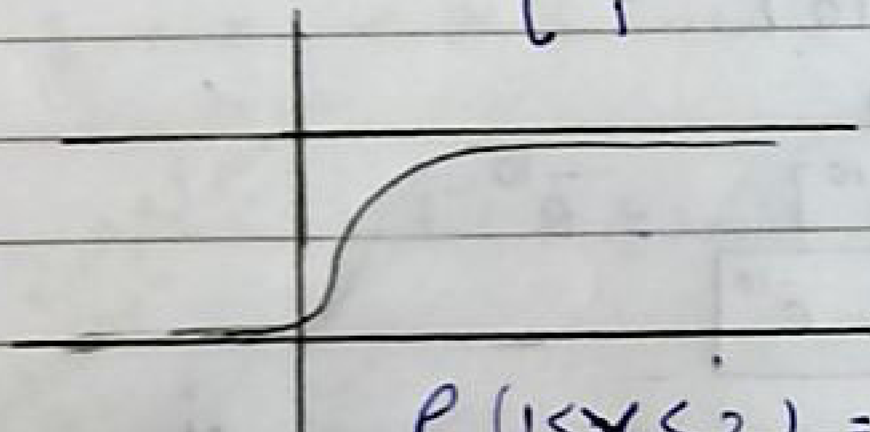
نعوض $1 < x < 4$

/ /

دالة التوزيع تراكمية

نفرض دالة التوزيع الاحتمالية لـ X هي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$



$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1)$$
$$= \frac{(2)^3}{27} - \frac{(1)^3}{27} = \frac{8-1}{27} = \boxed{\frac{7}{27}}$$

ملاحظة: إذا لم يطلب إيجاد دالة التوزيع نأخذ

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2}{9}\,dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \boxed{\frac{7}{27}}$$

تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X، وتحقق من ذلك ثم احسب $P(X > 10)$

عن طريق دالة التوزيع

الحل:

$$f_X(x) = (F_X(x))' = (1 - e^{-x})' = e^{-x}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

للتحقق من أن: $f_X(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = 0 + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} = 0-(-1) = 1$$

إذن الدالة كثافة احتمالية منتظمة.

$$P(X>10) = 1 - P(X \leq 10)$$
$$= 1 - F(10)$$
$$= 1 - [1-e^{-10}] = e^{-10}$$
$$\Rightarrow \boxed{P(X>10) = e^{-10}}$$

أو

$$P(X>10) = \int_{10}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{10}^{+\infty} = 0 - (-e^{-10})$$
$$= \boxed{e^{-10}}$$

الأشعة العشوائية وتوزيعاتها الاحتمالية الثنائية

تعريف: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على (Ω, f, P) فإننا نسمي الشعاع (X, Y) شعاعاً عشوائياً معرفاً على (Ω, f, P):

- أي أنه علينا أن نلحق بكل حدث ابتدائي ω من Ω قيمة (x, y) من $\mathbb{R}^2$ لهذا الشعاع.

تعريف: نسمي الدالة $F(x,y)$ المعرفة بالعلاقة

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x\ ,\ Y \leq y)$$

دالة التوزيع المشتركة للشعاع العشوائي (X,Y)

ملاحظة: إن وقوع الحدث $[X \leq x, Y \leq y]$ يعني وقوع الحدثين $[X \leq x]$ و $[Y \leq y]$ معاً آن واحد. أي أن

/ /

احتمال التقاطع ، احتمال تقاطع الحدثين $P([X \leq x, Y \leq y]) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y])$

خواص دالة التوزيع المشتركة :

1. $F_{(X,Y)}(x,y)$ هي دالة غير متناقصة بالنسبة لكل من x و y ومستمرة على الأقل من جهة اليمين .

2. $F(x,-\infty) = 0$ ، $F(-\infty, y) = 0$

3. $F(+\infty,+\infty) = 1$

4. $F(x,+\infty) = F_X(x)$ ، $F(+\infty, y) = F_Y(y)$

حيث $F_X(x)$ ، $F_Y(y)$ دالتا التوزيع الهامشيتين الاحتمالية لكل من X و Y على الترتيب .

5. $P(x_1 < X \leq x_2 \ , \ y_1 < Y \leq y_2) =$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

برهان 5 (مفروضة ثابتة)

$$P(x_1 < X \leq x_2 \ , \ \underbrace{y_1 < Y \leq y_2})$$

من الاحتمال الأول X

$$= \underbrace{P(X \leq x_2 \ , \ y_1 < Y \leq y_2)} - \underbrace{P(X \leq x_1 \ , \ y_1 < Y \leq y_2)}$$

$$= P(X \leq x_2 , Y \leq y_2) - P(X \leq x_2 , Y \leq y_1)$$
$$- [P(X \leq x_1 , Y \leq y_2) - P(X \leq x_1 , Y \leq y_2)]$$

$$\Rightarrow P(x_1 < X \leq x_2 \ , \ y_1 < Y \leq y_2) = F_{(X,Y)}(x_2, y_2) - F_{(X,Y)}(x_1, y_1)$$
$$- F_{(X,Y)}(x_1, y_2) + F_{(X,Y)}(x_1, y_1)$$

المتغيرات العشوائية الثنائية المتقطعة (المنفصلة):

تعريف: نقول عن المتغير (X, Y) أنه متقطع إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها هذا المتغير منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد.

دالة الكثافة المشتركة لمتغير عشوائي متقطع (X, Y)

نفرض أن $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$

$R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$

تكون عندئذ مجموعة قيم المتغير العشوائي (X, Y) هي

$$R_{(X,Y)} = \{(x_i, y_j) \ : i = 1, 2, \dots, m, \dots \ ; \ j = 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

نقول إن الحدث $[(X,Y) = (x_i, y_j)]$ قد وقع إذا وقع كلا الحدثين $[X = x_i]$ و $[Y = y_j]$ معاً في آن واحد. هو تقاطع الحدثين

ونرمز لاحتمال وقوع هذا الحدث بـ $f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$

أي أن:

$$f_{(X,Y)}(x_i, y_j) = P([X = x_i \ , Y = y_j]) \quad , i = 1, \dots, m, \dots$$
$$j = 1, \dots, n, \dots$$

نسمي الدالة $f_{(X,Y)}(x, y)$ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغير العشوائي الثنائي (X, Y)

(أي دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $X \ ; \ Y$)

ويمكن التعبير عن دالة الكثافة المشتركة بجدول كما يلي.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	المجموع
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	$\cdots$	$f(x_1,y_n)$	$\cdots$	$\sum_j f(x_1,y_j) = f_X(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	$\cdots$	$f(x_2,y_n)$	$\cdots$	$\sum_j f(x_2,y_j) = f_X(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m,y_1)$	$f(x_m,y_2)$	$\cdots$	$f(x_m,y_n)$	$\cdots$	$\sum_j f(x_m,y_j) = f_X(x_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
المجموع	$\sum_i f(x_i,y_1) = f_Y(y_1)$	$\sum_i f(x_i,y_2) = f_Y(y_2)$	$\cdots$	$\sum_i f(x_i,y_n) = f_Y(y_n)$	$\cdots$	1

إن دالة الكثافة المشتركة لـ (X, Y) تحقق الخواص التالية:

1. $0 \le f_{X,Y}(x,y) \le 1 \quad \forall x \in R_X , y \in R_Y$
2. $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$
3. $P([(x,y) \in A]) = \sum\sum_{(x,y)\in A} f(x,y)$

حيث A مجموعة جزئية من R^2

مبرهنة/ "دون برهان" إذا كان (X, Y) متغيراً عشوائياً متقطعاً ودالة كثافته الاحتمالية المشتركة $f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$ حيث $i=1,\dots,m,\dots$ & $j=1,\dots,n,\dots$

وفرضنا أن $f_X(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ X

و $f_Y(y)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y فإن

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) \quad ; \quad i = 1, \dots, m, \dots$$

$$f_Y(y_j) = P(Y = y_j) \quad ; \quad j = 1, \dots, n, \dots$$

$$f_X(x_i) = \sum_{j\geq 1} f_{(X,Y)}(x_i, y_j) \quad ; i=1,\dots,m,\dots$$

$$f_Y(y_j) = \sum_{i\geq 1} f_{(X,Y)}(x_i, y_j) \quad ; j=1,\dots,n,\dots$$

- أي أننا نستطيع إيجاد دوال الكثافة الهامشية للمتغيرين X و Y من خلال دالة الكثافة المشتركة لـ (X,Y).

دالة التوزيع المشتركة للشعاع العشوائي المتقطع تعرف بالشكل:

$$F(x,y) = P(X\leq x, Y\leq y)$$

$$:= \sum_{x_i\leq x} \sum_{y_j\leq y} f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

مثال: نفرض أن (X,Y) شعاعاً عشوائياً له جدول التوزيع المشترك

X \ Y	1	2	3	المجموع	
4	$0,3 = f_{(X,Y)}(4,1)$	$0,1 = f_{(X,Y)}(4,2)$	$0,3 = f_{(X,Y)}(4,3)$	0,7	$= f_X(x_1)$
6	0,1	0	0,2	0,3	$= f_X(x_2)$
المجموع	0,4	0,1	0,5	1	

نلاحظ أن

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} f(x_i, y_j) = f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_1,y_3)$$

$$+ f(x_2,y_1) + f(x_2,y_2) + f(x_2,y_3)$$

$$= 0,3 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0 + 0,2 = \boxed{1}$$

.أن دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X موضحة بالجدول التالي

X	4	6	المجموع
$f_X(x)$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_2, y_j) = 0,7$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_2, y_j) = 0,3$	1

.دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لـ Y هي:

Y	1	2	3	المجموع
$f_Y(y)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_1) = 0,4$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_2) = 0,1$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_3) = 0,5$	1

$x \leq 5$
$y \leq 2.5$

$$F(5, 2.5) = \sum_{X \leq 5} \sum_{Y \leq 2.5} f(x_i, y_j)$$

$$= \underset{(X,Y)}{f(4,1)} + \underset{(X,Y)}{f(4,2)}$$

$$= 0,3 + 0,1 = \boxed{0,4}$$

$$F(7, 2.5) = \sum_{X \leq 7} \sum_{Y \leq 2.5} f(x_i, y_j)$$

$$= f(4,1) + f(4,2) + f(6,1) + f(6,2)$$

$$= 0,3 + 0,1 + 0,1 + 0 = \boxed{0,5}$$

$$F(2, 5) = \underbrace{\sum_{X \leq 2}}_{\text{مستحيل}} \sum_{Y \leq 5} f(x_i, y_j)$$

$$= \boxed{0}$$

/ /

$$F(7,4) = \underbrace{\sum_{x \le 7} \sum_{x \le 4}}_{\text{جمع القيم}} f(x_i, y_j)$$

$$= \boxed{1}$$

انتهت.

تمرين: ليكن (X, Y) متغيرا عشوائيا ذو دالة كثافة احتمالية مشتركة كالتالي:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21} \quad ; \quad x = 1,2,3$$
$$y = 1,2$$

جد الكثافات الهامشية لكل من X و Y .

الحل:

دالة الكثافة الهامشية
لأي متغير
نلاحظ أنها لا
تعتمد على y إطلاقاً

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \left(\frac{x+y}{21}\right)$$

$$= \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21} \quad ; \quad x=1,2,3$$

للتأكد نلاحظ أن

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{2x+3}{21}\right) = \frac{5}{21} + \frac{7}{21} + \frac{9}{21} = \frac{21}{21} = \boxed{1}$$

هي دالة كثافة احتمالية هامشية للمتغير الأول.

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{x+y}{21}\right)$$

$$= \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21} = \frac{6+3y}{21}$$

$$= \frac{2+y}{7} \quad ; \quad y=1,2$$

للتأكد:

$$\sum_y f_Y(y) = \sum_{y=1}^{2} \left(\frac{2+y}{7}\right) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = \boxed{1}$$

تمرين: لتكن $f(x,y)$ الكثافة المشتركة للمتغير العشوائي (X,Y):

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30} \quad ; \quad x = 1,2,3 \quad y = 1,2$$

عين الكثافات الهامشية لـ X و Y.

الحل:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{xy^2}{30}$$

$$= \frac{x}{30} + \frac{4x}{30} = \frac{5x}{30} = \frac{x}{6} \quad ; x = 1,2,3$$

للتأكد نلاحظ أن

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{xy^2}{30}$$

$$= \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{6y^2}{30} = \frac{y^2}{5} \quad ; y = 1,2$$

للتأكد:

$$\sum_y f_Y(y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{y^2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = \boxed{1}$$

★ ملاحظة من التمرين نلاحظ أن:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30} = \frac{x}{6} \cdot \frac{y^2}{5} = f_X(x)\, f_Y(y)$$

وهذا يدل على استقلال المتغيرين X و Y.

تعريف: نقول عن الشعاع العشوائي (X, Y) إنه مستمر إذا وجدت دالة غير سالبة $f(x,y)$ بحيث يكون من أجل أي عددين حقيقيين x و y :

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

تعريفها الاحتمالي

دالة التوزيع

تسمى الدالة $f(x,y)$ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للشعاع العشوائي (X,Y) وهي تحقق الشرطين التاليين:

1. $f(x,y) \geq 0 \quad ; \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

وكما أن

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

أي أن الكثافة المشتركة هي المشتقة الثانية لدالة التوزيع مرة بالنسبة لـ x ومرة بالنسبة لـ y.

الكثافات الهامشية في حالة الاستمرار

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

تمرين: ليكن X و Y متغيرين عشوائيين كثافتهما المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} c(3x+y) & ; \ 1<x<5 \ , \ 0<y<3 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أ) عين قيمة الثابت الحقيقي c.

ب) أوجد الكثافات الهامشية.

ج) احسب الاحتمالات $P(2<X<4, Y>1)$ و $P(Y<2)$.

/ /

الحل:

أ) بما أن $f(x,y)$ دالة كثافة مشتركة يجب تحقق الشرط

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^3\int_1^5 c.(3x+y)\,dx\,dy =$$

$$= c\int_0^3 \left[\frac{3x^2}{2}+yx\right]_1^5 dy$$

$$= c\int_0^3 \left[\left(\frac{75}{2}+5y\right)-\left(\frac{3}{2}+y\right)\right] dy$$

$$= c\int_0^3 (36+4y)\,dy = c.\left[36y+2y^2\right]_0^3$$

$$= c(108+18) = c(126) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{126}}$$

تكون دالة الكثافة المشتركة لـ X و Y

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{126}(3x+y) & ; 1<x<5 \ , 0<y<3 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ب)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^3 \frac{1}{126}(3x+y)\,dy$$

$$= \frac{1}{126}\left[3xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^3$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{126}\left(9x+\frac{9}{2}\right) & ; 1<x<5 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

/ /

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{126}(3x+y)\,dx$$

$$= \frac{1}{126}\left[\frac{3x^2}{2} + yx\right]_1^5 = \frac{1}{126}\left[\left(\frac{75}{2}+5y\right) - \left(\frac{3}{2}+y\right)\right]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{126}[36+4y] & ; \quad 0<y<3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$P(2<X<4 \;\;, Y>1) = P(2<X<4,\ 1<Y<3)$ (8)

Y محصورة بين ① و ③

$$= \int_1^3\int_2^4 \frac{1}{126}(3x+y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{126}\int_1^3 \left[\frac{3x^2}{2} + yx\right]_2^4 dy = \frac{1}{126}\int_1^3 \left[(24+4y) - (6+2y)\right] dy$$

$$= \frac{2}{126}\int_1^3 (9+y)\,dy$$

$$= \frac{1}{63}\left[9y + \frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{63}\left[\left(27+\frac{9}{2}\right) - \left(9+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{63}[22] = \boxed{\frac{22}{36}}$$

$P(Y<2) = P(0<Y<2)$

نعوض بدالة الكثافة
الهامشية

$$= \int_0^2 f_Y(y)\,dy = \frac{1}{126}\int_0^2 (4y+36)\,dy = \frac{1}{126}\left[2y^2 + 36y\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{126}(8+72) = \frac{80}{126} = \boxed{\frac{40}{63}}$$

طريقة ثانية "أسهل وأقصر":

$$P(Y<2) = P(1<X<5 \quad , 0<Y<2)$$

$$= \int_0^2 \underbrace{\left[\int_1^5 f(x,y)\, dx\right]}_{f_Y(y)} dy$$

$$= \boxed{\frac{40}{63}}$$

استقلال المتغيرات العشوائية:

تعريف: نقول عن متغيرين عشوائيين X و Y إنهما مستقلان إذا كان ما يلي متحققاً:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

حيث $F(x,y)$ دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغير X و Y أي للشعاع (X,Y)

و F_X و F_Y دالتا التوزيع الهامشي لـ X و Y على الترتيب.

إذا كان الشعاع العشوائي (X,Y) مستمراً يمكننا أن نضع تعريف آخر:

تعريف: نقول عن المتغيرين العشوائيين المستمرين X و Y إنهما مستقلان عشوائياً إذا كان

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

تعريف: نقول عن متغيرين عشوائيين متقطعين X و Y إنهما مستقلان عشوائياً إذا تحقق:

$$P(X=x , Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

من أجل جميع القيم (x,y) التي يأخذها الشعاع (X,Y)

/ /

تمرين: ليكن (X,Y) متغيرا عشوائيا كثافته المشتركة:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{13} \quad ; (x,y) \in \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$$

جد كثافة X و Y ، هل هما مستقلان.

الحل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_y f(x,y) & ; x = 1 \\ \sum_y f(x,y) & ; x = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1)(1)^2}{13} + \frac{(1)(2)^2}{13} = \boxed{\frac{5}{13}} & ; x = 1 \\ \frac{(2)(2)^2}{13} = \boxed{\frac{8}{13}} & ; x = 2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_x f(x,y) & ; y = 1 \\ \sum_x f(x,y) & ; y = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1)(1)^2}{13} = \boxed{\frac{1}{13}} & ; y = 1 \\ \frac{(1)(2)^2}{13} + \frac{(2)(2)^2}{13} = \boxed{\frac{12}{13}} & ; y = 2 \end{cases}$$

X \ Y	1	2	الحدي / $f_X(x)$
1	$\frac{1}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$
2	0	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{13}$
الحدي $f_Y(y)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{12}{13}$	

نلاحظ أن

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f(1,1) = \frac{1}{13} \neq \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{5}{169}$$

وبالتالي X و Y غير مستقلين عشوائياً.

انتهت.

المحاضرة الخامسة عشر 29 / 11 / 2015

تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته معرّفة بالجدول:

X	0	1
$f_X(x)$	$1/3$	$2/3$

وليكن Y متغيراً عشوائياً مستقلاً عن X ودالة كثافته:

Y	0	1	2
$f_Y(y)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

والمطلوب: ① عين دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (X,Y)

② عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Z = X + Y$

الحل:

① بما أن X و Y مستقلان احتمالياً فإن $\boxed{f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$

ومنه سيكون لـ (X,Y) دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة المرفقة بالجدول

$X \backslash Y$	0	1	2	مجموع $f_X(x)$
0	$f_X(0) \cdot f_Y(0) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$	$f_X(0) \cdot f_Y(1) = 1/3 \cdot 2/4 = 2/12$	$f_X(0) \cdot f_Y(2) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
1	$f_X(1) \cdot f_Y(0) = 2/3 \cdot 1/4 = 2/12$	$f_X(1) \cdot f_Y(1) = 2/3 \cdot 2/4 = 4/12$	$f_X(1) \cdot f_Y(2) = 2/3 \cdot 1/4 = 2/12$	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	1

② لتعيين دالة الكثافة لـ Z نوجد قيم هذا المتغير فنجد:

$R_Z = \{0, 1, 2, 3\}$

/ /

والاحتمالات المرافقة لقيم Z هي:

$$f_Z(0) = P[Z=0] = P[X=0, Y=0] = \boxed{1/12}$$

$$f_Z(1) = P[Z=1] = P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=0]$$
$$= 2/12 + 2/12 = \boxed{4/12}$$

$$f_Z(2) = P[Z=2] = P[X=1, Y=1] + P[X=0, Y=2]$$
$$= 4/12 + 1/12 = \boxed{5/12}$$

$$f_Z(3) = P[Z=3] = P[X=1, Y=2] = \boxed{2/12}$$

وبالتالي كثافة Z معرفة بالجدول

Z	0	1	2	3	(للتأكد) المجموع
$f_Z(z)$	1/12	4/12	5/12	2/12	1

تمرين: ليكن X, Y متغيرين ثنائيين لهما دالة الكثافة المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{210} & ; 2<x<6 \ , \ 0<y<5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1. برهن أن $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية ثنائية مشتركة لـ (X,Y).
2. عين الكثافات الاحتمالية الهامشية.
3. عين دوال التوزيع الاحتمالية الهامشية.

/ /

④ احسب $P(3<X<4,\ Y>2)$ ثم
احسب $P(X>3)$

⑤ احسب $P(X+Y>4)$

⑥ هل المتغيرين X و Y مستقلين عشوائياً.

الحل ① لدينا $f(x,y)\geq 0$ فرضاً و للبرهان أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

بالتالي

$$\int_{2}^{6}\int_{0}^{5} \frac{2x+y}{210}\,dy\,dx$$

$$=\int_{2}^{6}\left[\frac{2xy}{210}+\frac{y^2}{420}\right]_0^5 dx=\int_{2}^{6}\left(\frac{10x}{210}+\frac{25}{420}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{42}+\frac{5}{84}x\right]_2^6$$

$$=\left(\frac{36}{42}+\frac{30}{84}\right)-\left(\frac{4}{42}+\frac{10}{84}\right)$$

$$=\frac{32}{42}+\frac{10}{42}=\frac{42}{42}=1$$

إذن $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة لـ (X,Y)

②
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{0}^{5}\frac{2x+y}{210}\,dy$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \left[\frac{2x}{210}y + \frac{y^2}{420}\right]_0^5 = \frac{10}{210}x + \frac{25}{420}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{4x+5}{84} & ; 2<x<6 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_2^6 \frac{2x+y}{210}\,dx = \left[\frac{x^2}{210} + \frac{yx}{210}\right]_2^6$$

$$= \left(\frac{36}{210} + \frac{6y}{210}\right) - \left(\frac{4}{210} + \frac{2y}{210}\right) = \frac{32}{210} + \frac{4y}{210}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{32+4y}{210} & ; 0<y<5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$ 3

$$= \int_2^x \frac{4t+5}{84}\,dt = \frac{1}{84}\left[2t^2 + 5t\right]_2^x$$

$$= \frac{1}{84}\left[(2x^2+5x) - (8+10)\right]$$

$$= \frac{1}{84}\left[2x^2 + 5x - 18\right]$$

/ /

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 2 \\ \frac{1}{84}(2x^2+5x-18) & ; \quad 2 \leq x < 6 \\ 1 & ; \quad 6 \leq x \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt$$

$$= \int_0^y \frac{4t+32}{210}\, dt$$

$$= \frac{1}{210}\left[2t^2 + 32t\right]_0^y = \frac{1}{210}(2y^2+32y)$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \quad y < 0 \\ \frac{1}{210}(3y^2+32y) & ; \quad 0 \leq y < 5 \\ 1 & ; \quad 5 \leq y \end{cases}$$

4

$$P(3 < X < 4 \; , \; Y > 2)$$

$$= P(3 < X < 4 \; , \; 2 < Y < 5)$$

$$= \int_3^4 \int_2^5 \left(\frac{2x+y}{210}\right) dy\, dx = \int_3^4 \left[\frac{2xy}{210} + \frac{y^2}{420}\right]_2^5 dx$$

$$= \int_3^4 \left[\left(\frac{10x}{210} + \frac{25}{420}\right) - \left(\frac{4x}{210} + \frac{4}{420}\right)\right] dx$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{6x}{210} + \frac{21}{420}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{210} + \frac{21}{420}x\right]_3^4$$

$$= \left(\frac{48}{210} + \frac{84}{420}\right) - \left(\frac{27}{210} - \frac{63}{420}\right)$$

$$= \frac{21}{210} + \frac{21}{420} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \boxed{3/20}$$

$$P(X > 3) = \int_3^6 f_X(x)\,dx = \int_3^6 \frac{4x+5}{84}\,dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{84} + \frac{5}{84}x\right]_3^6$$

$$= \left(\frac{72}{84} + \frac{30}{84}\right) - \left(\frac{18}{84} + \frac{15}{84}\right)$$

$$= \frac{102}{84} - \frac{33}{84} = \boxed{\frac{69}{84}}$$

$P(X + Y > 4) =$ (5)

هو عبارة عن تكامل بالنسبة للمتغيرين العرضيين في المجموعة

$$\Delta = \{(x, y) \quad : x + y > 4\}$$

$$P(X + Y > 4) = \iint_\Delta f(x, y)\,dx\,dy$$ Si

$$\Rightarrow P(X+Y>4) = 1 - P(\underbrace{X + Y \leq 4}_{Y \leq 4 - X})$$

$$= 1 - \int_2^4 \int_0^{4-X} \frac{2x+y}{210}\,dy\,dx$$

$$= 1 - \int_2^4 \left[\frac{2x}{210} y + \frac{y^2}{420} \right]_0^{4-x} dx$$

$$= 1 - \int_2^4 \left[\frac{2x(4-x)}{210} + \frac{(4-x)^2}{420} \right] dx$$

$$= 1 - \frac{1}{210} \int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x + 8 \right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{210} \left[-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 8x \right]_2^4$$

$$= 1 - \frac{1}{210} \left[(-32 + 32 + 32) - (-4 + 8 + 16) \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{210} \left[(32) - (20) \right] = 1 - \frac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{210}_{\,35}} = \boxed{\frac{33}{35}}$$

6 يجب أن يكون $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

لكون X و Y مستقلين عشوائياً ، نلاحظ من الطلب السابق أن

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(\frac{4x+5}{84} \right) \left(\frac{4y+32}{210} \right)$$

$$\neq \frac{2x+y}{210} = f(x,y)$$

أي أن X و Y غير مستقلين عشوائياً .

تمرين: ليكن (X,Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة.

$$f(x,y) = e^{-x-y} \quad ; \quad 0 < x < +\infty$$
$$0 < y < +\infty$$

نضع:

$$A = \{(x,y) : 0 < x < +\infty \; ; \; 0 < y < \frac{x}{3}\}$$

احسب $P((X,Y) \in A)$.

الحل:

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{x/3} e^{-x-y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{x/3} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(-e^{-x/3} - (-1)\right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(-e^{-\frac{4}{3}x} + e^{-x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{4} e^{-\frac{4}{3}x} - e^{-x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \left[(0) - \left(\frac{3}{4} - 1\right)\right] = \boxed{1/4}$$

انتهت.

دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

① الانتقال من متغير عشوائي متقطع: ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً مجموعة قيمه $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ وله الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x) = P(X = x) \qquad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وليكن Y متغيراً مرتبطاً بـ X بالعلاقة $Y = U(X)$ عندئذٍ علينا حساب مجموعة قيم Y وكذلك كثافته بالحساب المباشر

$$P(Y = y_n) = P(U(X) = y_n) = P(X = U^{-1}(y_n))$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول التوزيع (الكثافة) الآتي:

المجموع = 1

X	-1	-2	-3	1	2	3
$f_X(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

عين جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير $\boxed{Y = |X|}$

الحل: نلاحظ أن مجموعة قيم Y هي

$$R_Y = \{1, 2, 3\}$$

وأن

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=+1) = 1/6 + 1/6 = \boxed{2/6}$$
$$P(Y=2) = P(X=-2) + P(X=2) = 1/6 + 1/6 = \boxed{2/6}$$
$$P(Y=3) = P(X=-3) + P(X=3) = 1/6 + 1/6 = \boxed{2/6}$$

فيكون لـ Y جدول الكثافة التالي

Y	1	2	3	المجموع
$f_Y(y)$	$2/6$	$2/6$	$2/6$	1

/ /

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.15	0.20	0,20	0,15	0,30

عين جدول الكثافة للمتغير $Y=(X-2)^2$

الحل: نحدد مجموعة قيم Y

$$X=0 \Rightarrow Y=4$$
$$X=1 \Rightarrow Y=1$$
$$X=2 \Rightarrow Y=0$$
$$X=3 \Rightarrow Y=1$$
$$X=4 \Rightarrow Y=4$$

$$\Rightarrow R_Y=\{0,1,4\}$$

نحسب الاحتمالات المقابلة لقيم Y :

$$P(Y=0)=P(X=2)=0,20$$
$$P(Y=1)=P(X=1)+P(X=3)=0,20+0,15=0,35$$
$$P(Y=4)=P(X=0)+P(X=4)=0,15+0,30=0,45$$

فيكون لـ Y جدول الكثافة

Y	0	1	4	المجموع
$f_Y(y)$	0,20	0,35	0,45	1

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} & ; \ x=0,1,2,\ldots \quad \text{من أجل الأعداد الصحيحة ;} \\ 0 & \text{خلاف ذلك ;} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة لـ $\boxed{Y=4.X}$

/ /

الحل نوجد قيم المتغير Y

$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$

$R_Y = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$

وتكون دالة الكثافة لـ Y

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(4 \cdot X = y) = P(X = \tfrac{y}{4}) = \frac{\mu^{y/4} \cdot e^{-\mu}}{(y/4)!}$$

$$= f_X(y/4)$$

إذن

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\mu^{y/4} \cdot e^{-\mu}}{(y/4)!} & ; \quad y = 0, 4, 8, \dots \\ 0 & ; \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

---

② الانتقال لمتغير عشوائي مستمر: ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً له الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ ، وليكن $Y = U(X)$ متغيراً معطى بدلالة X عندئذ يكون Y متغيراً عشوائياً مستمراً وكثافته تعطى بالعلاقة

$$f_Y(y) = f_X(\underbrace{U^{-1}(y)}_{\text{دالة عكسية}}) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

حيث

$$(U^{-1}(y))' = x'_y$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للمتغير $\boxed{Y = -2 \ln X}$

$$Y = U(X) = -2 \ln X$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{-2} = \ln X \Rightarrow X = e^{-Y/2} = U^{-1}(Y)$$ ومنه

لدينا

$$0 < X < 1$$ معرفة X و Y

$$0 < Y < +\infty$$

$$\left(U^{-1}(y)\right)' = -\frac{1}{2} e^{-y/2}$$

يجب ذكر العلاقة قبل الحل

$$\boxed{f_Y(y) = f_X\left(U^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right|} \quad - (*)$$

$$\Rightarrow \left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{2} e^{-y/2}$$

$$f_X(\underbrace{U^{-1}(y)}_{x_y}) = \boxed{1}$$

نعوض في العلاقة (*) فنجد

$$f_Y(y) = 1 \cdot \frac{1}{2} e^{-y/2}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2} & ; \ 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تمرين دورة

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & ; 0<x<1 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

① عين دالة كثافة المتغير $Y = X^3$.

② عين دالة كثافة المتغير $Y = 2X+1$.

الحل:

①

$$Y = U(X) = X^3 \Rightarrow \boxed{X = U^{-1}(Y) = Y^{1/3}}$$

نلاحظ أن $0 < X < 1$

فيكون: $0 < Y < 1$

- نحسب المشتق

$$(U^{-1}(y))' = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

- نأخذ القيمة المطلقة للمشتق

$$|(U^{-1}(y))'| = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

- نحسب قيمة الكثافة لـ X في $U^{-1}(y)$

$$f_X(U^{-1}(y)) = f_X(y^{1/3}) = 6 \cdot y^{1/3}(1 - y^{1/3})$$

- نعوض في علاقة الكثافة لـ Y

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

$$= \cancel{6}^{2} \cdot y^{1/3}(1-y^{1/3}) \cdot \frac{1}{\cancel{3}} y^{-2/3}$$

فتكون لـ Y الكثافة الاحتمالية التالية

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(y^{-1/3} - 1) & ; 0<y<1 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$Y = U(X) = 2X + 1 \Rightarrow \boxed{X = U^{-1}(Y) = \frac{Y-1}{2}}$$ ②

نلاحظ أن $0 < X < 1$

ومنه $1 < Y < 3$

- نحسب المشتقة للدالة العكسية

$$(U^{-1}(y))' = 1/2$$

- نأخذ القيمة المطلقة للناتج السابق

$$|(U^{-1}(y))'| = 1/2$$

- نحسب قيمة الكثافة في $U^{-1}(y)$

$$f_X(U^{-1}(y)) = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{y-1}{\cancel{2}}\right)\left(1 - \frac{y-1}{2}\right)$$

$$= -\frac{6}{4}y^2 + 6y - \frac{9}{2}$$

نعوض في علاقة $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

$$= \left(-6/4\, y^2 + 6y - 9/2\right) \cdot 1/2$$

$$f_Y(y) = -3/4\, y^2 + 3y - 9/4$$

- إذن دالة كثافة Y الاحتمالية

$$f_Y(y) = \begin{cases} -3/4\, y^2 + 3y - 9/4 & , 1 < y < 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك ،} \end{cases}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x|} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

عين كثافة $\boxed{Y = X^2}$

الحل

$$Y = U(X) = X^2$$

$$\Rightarrow X = U^{-1}(Y) = \boxed{\mp Y^{1/2}}$$

$$R_X = \{x \quad : \quad -\infty < x < +\infty \}$$

$$R_Y = \{y \quad : \quad 0 < y < +\infty \}$$

$$|(U^{-1}(y))'| = |\mp \tfrac{1}{2} y^{-1/2}| = \tfrac{1}{2} y^{-1/2}$$

$$f_X(U^{-1}(y)) = f_X(\mp y^{1/2}) = f_X(-y^{1/2}) + f_X(+y^{1/2})$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

$$= [f_X(-y^{1/2}) + f_X(y^{1/2})] \cdot \tfrac{1}{2} y^{-1/2}$$

$$= [\tfrac{1}{2} e^{-y^{1/2}} + \tfrac{1}{2} e^{-y^{1/2}}] \tfrac{1}{2} y^{-1/2}$$

$$= \frac{e^{-y^{\frac{1}{2}}}}{2 y^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & ; \quad 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت.