المحاضرة الثالثة عشر - الاثنين

2015 / 11 / 23

- المتتاليات المحدودة ::

نقول إن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ إنها محدودة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث

$$|z_n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

وهذا يكافئ أن مجموعة حدود المتتالية محدودة...

مثال: $\{i^n\}$ محدودة لأن

$|i^n| \le 1 \quad \forall n$

$\{\frac{i^n}{n}\}$ محدودة لأن

$|\frac{i^n}{n}| = \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n$

- متتالية الأجزاء الحقيقية ومتتالية الأجزاء التخيلية لمتتالية عقدية

لتكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية ولتكن z_n حدها العام لأجل كل n ولتكن $z_n = x_n + iy_n$ حيث $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليات حقيقية

ومنه كل متتالية عقدية z_n يقابلها متتاليتان حقيقيتان x_n ، y_n حيث

$$z_n = x_n + iy_n$$

نسمي $\{x_n\}$ متتالية الأجزاء الحقيقية

$\{y_n\}$ متتالية الأجزاء التخيلية

مثال: $z_n = \frac{1}{n} + i\cos n$

متتالية عقدية نجد متتالية الأجزاء الحقيقية لها هي $\{\frac{1}{n}\}$ ومتتالية الأجزاء التخيلية لها هي $\{\cos n\}$ الذي نجد أن z_n محدودة كانت متتالية الأجزاء الحقيقية لها ومتتالية الأجزاء التخيلية لها محدودتان

مبرهنة: لتكن z_n متتالية عقدية حيث $z_n = x_n + iy_n$

إن z_n محدودة إذا وفقط إذا كانت كل من x_n و y_n محدودتان

الإثبات:

$\Leftarrow$ نفرض أن z_n محدودة ومنه يوجد عدد ~~عدد~~ حقيقي M بحيث يكون

$|z_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |\operatorname{Re} z| \le |z|$

$(\operatorname{Re} z)^2 \le (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = \cancel{|z|^2}$

$(\operatorname{Re} z)^2 \le |z|^2$

$\Rightarrow \operatorname{Re} z \le |z|$

وبنفس الطريقة $|\operatorname{Im} z| \le |z|$

$\Rightarrow |x_n| \le |z_n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|y_n| \le |z_n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالعكس...

نوضح $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ محدودتان..

⇐ وجود عددين حقيقيين M_1 و M_2

$\Rightarrow |x_n| \le M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|y_n| \le M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |z_n| = |x_n + i y_n|$

$\le |x_n| + |i y_n|$

$\le M_1 + M_2 = M$

$\Rightarrow |z_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

مثال: $\{z_n = \frac{1}{n} + i \frac{n}{n+1}\}$

محدودة

$x_n = \{\frac{1}{n}\} \le 1$

$y_n = \{\frac{n}{n+1}\} \le 1$

ومن هنا نجد أن z_n محدودة.

♦ تقارب متتالية عقدية.

نقول عن z_n إنها متقاربة لعدد عقدي a إذا حقق الشرط

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k > 0 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$

$\forall n \ge N$.

ونشير لها بـ $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$ أو $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

ملاحظة:

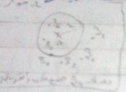
[illegible]

[illegible]

هندسياً:

$\{z\}$ متقاربة إلى a هذا يعني أن أي جوار لـ a سيحوي كل حدود المتتالية باستثناء عدد منتهٍ

$|z_n - a|$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n \ge N$



• نقول عن متتالية عقدية إنها ~~[illegible]~~ متباعدة

• ونكتب $z_n \to \infty$

أو $\lim z_n = \infty$

$\forall M > 0 \; \exists N(M) > 0 ; \forall n \ge N$

$: |z_n| > M$

ملاحظة

• $|z_n - a| \to 0 \Leftrightarrow z_n \to a$

• $z_n \to \infty \Leftrightarrow |z_n| \to \infty$

• $z_n \to a \Rightarrow |z_n| \to |a|$

العكس غير صحيح $|(-1)^n| \to 1$

لكن $(-1)^n$ غير متقاربة من (1)

ونستطيع أن $(-1)^n$ [illegible]

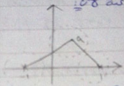
[illegible] المتتالية العقدية [illegible] المتتالية

العقدية [illegible]

ملاحظة:

تكون المتتالية العقدية متباعدة إذا لم نجد ما يحدد عدد عقدي a يحقق شرط التقارب وإذا [illegible] المتتاليات [illegible] تكون متباعدة

مثال: $(-1)^n$ متباعدة لأنّ



إذا كان

$a \neq 1 \wedge a \neq -1$

نختار ε بحيث

$\varepsilon = \frac{\min[d(a,1), d(a,-1)]}{2}$

ونختار القرص $D(a,\varepsilon)$ أي القرص الذي مركزه a ونصف قطره ε لا يحوي أي حد من حدود المتتالية

إذا كان: $a=-1$ نأخذ القرص $D(-1,\frac{1}{2})$

نلاحظ أن سيحوي عدد غير منتهٍ من حدود المتتالية وبالمثل يوجد خارجه عدد غير منتهٍ من حدود المتتالية

إذا كان $a=1$ نأخذ القرص $D(1,\frac{1}{2})$

نلاحظ نفس الكلام مع $a=-1$

وبالتالي لا يمكن ايجاد نهاية للمتتالية $(-1)^n$

مثلاً: نلاحظ $|(-1)^n| \to 1$ وهذا مثال على العكس

ملاحظة:

لا يوجد [illegible] وحيدة [illegible] وحيدة [illegible]

[illegible] الخروج [illegible] ١ أي عدد

[illegible] ١ و ١

[تمرين]:

أثبت أن أي متتالية تتراجع بين عدد منتهٍ من القيم بحيث تتوزع هذه القيم على عدد غير منتهٍ من المرات تكون متباعدة // بنفس الطريقة //

مثال:

i^n متباعدة لأنها تتراجع بين أربع قيم تمر عليها بعدد غير منتهٍ من المرات

$\{i,-i,1,-1\}$

ملاحظة:

[illegible] المتتالية [illegible] وجدت [illegible]

صحيحة [illegible] والعكس [illegible]

مبرهنة:

تكون المتتالية العقدية $z_n = x_n + iy_n$ متقاربة إلى العدد a إذا وفقط إذا كانت متتاليتا الأجزاء الحقيقية $\{x_n\}$ والتخيلية $\{y_n\}$ متقاربتين إلى $Re\,a$ و $Im\,a$

أي $z_n \to a \iff \begin{cases} x_n \to Re\,a \\ y_n \to Im\,a \end{cases}$

الإثبات [illegible]

ملاحظة [illegible] $|x_n - Re\,a| < \varepsilon$

[illegible]