مقدمة: $X:(\Omega,F)\longrightarrow \mathbb{R}$

بحيث $\forall B\subseteq \mathbb{R}\ ;\ X^{-1}(B)\in F$

يكون X متغير عشوائي منتقطع (منفصل) إذا كانت مجموعة قيمه منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد وإذا كانت مجموعة قيمه غير منتهية وغير قابلة للعد فإن X يدعى متغير عشوائي مستمر.

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

[1] دالة الكثافة: ليكن X متغير عشوائي منفصل مجموعة قيمه $R_X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$
إن مجموعة كل الأحداث الابتدائية (الأولية) ω من Ω والتي من أجلها يأخذ المتغير X القيمة x_i تشكل حدثاً نرمز له $[X=x_i]$ ونرمز لاحتمال الحدث بـ $p[X=x_i]$ حيث:
$[X=x_i]=\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_i\}$ عندئذ الدالة: $f_X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تدعى الدالة الاحتمالية لـ X أو دالة الكثافة الاحتمالية لـ X، وهي تحقق شرطين:

أ. $\forall x_i\in R_X : f_X(x_i)\geq 0$

ب. $\sum_{i\geq 1} f_X(x_i)=1$

وتوضع الدالة بالجدول:

X	x_1	x_2	...	x_n	المجموع
$p[X=x_i]=f_X(x_i)$	$f_X(x_1)=p[X=x_1]$	$f_X(x_2)=p[X=x_2]$	...	$f_X(x_n)$	1

مثال: في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية وليكن X المتغير الدال على عدد الصور الحاصلة، عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X.

الحل: فضاء العينة لهذه التجربة: $\Omega=\{TTT, TTH, HTH, HHT, HTT, THT, HHH\}$
حيث $|\Omega|=2^3=8$ ومجموعة قيم X هي: $R_X=\{0,1,2,3\}$

ودالة الكثافة لـ X توضع بالجدول:

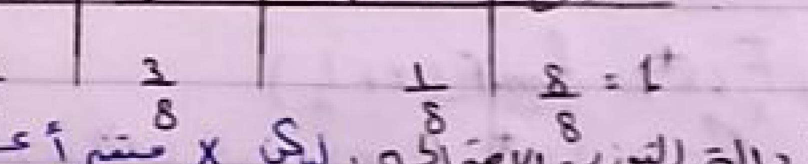
X	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$	$x_4=3$	المجموع
$f_X(x_i)=p[X=x_i]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}=1$

[2] دالة التوزيع الاحتمالي: ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً معرفاً على Ω إن الدالة المعرفة بالشكل:

$$F_X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ F_X(x)=p(X\leq x)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

- وفائدة دالة التوزيع F_X تكمن في إمكانية حساب احتمالات لـ X من الشكل:

$$p(a<X\leq b)=p([X\leq b]/[X\leq a])=p([X\leq b])-p([X\leq a])$$
$$=F_X(b)-F_X(a)$$

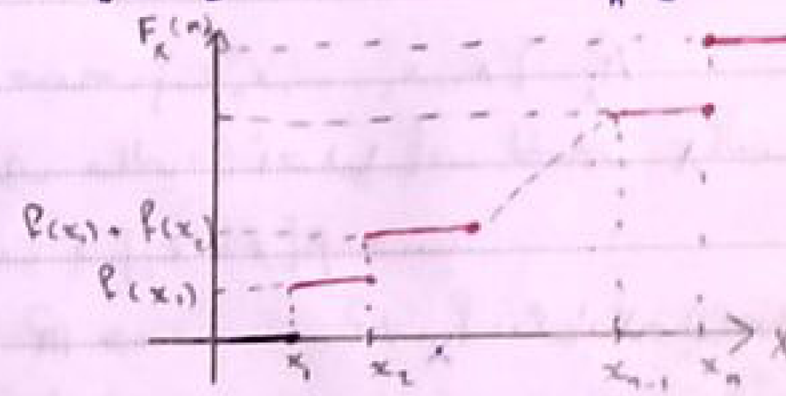


إذا كانت $f_X(x_i)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ X فإن:

$$F_X(x)=\sum_{x_i\leq x} f_X(x_i)$$

وبالتالي من أجل $R_X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ فإن:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < x_1 \\ f(x_1) + f(x_2) & ; x_1 \le x < x_2 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & ; x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 & ; x_n \le x \end{cases}$$



مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x=0,1,2,3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

والمطلوب عين جدول الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة التوزيع الاحتمالي $F_X(x)$ واحسب $F(2,5)$

الحل: إن جدول الكثافة لـ X له الشكل:

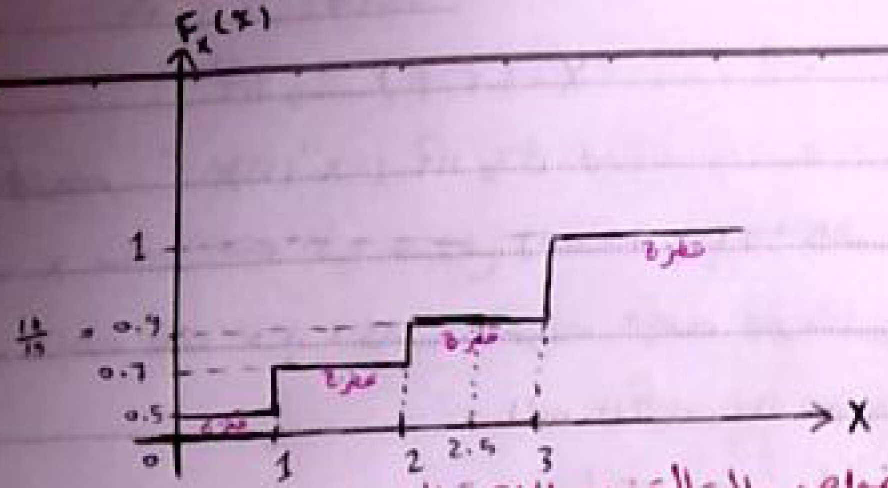
X	x=0	1	2	3	المجموع
$f_x(x)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

نلاحظ أن $\sum_{i=1}^{4} f_X(x_i) = 1$ فتكون دالة التوزيع الاحتمالي لـ X لها الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ f_X(x_1) = f_X(0) = \frac{8}{15} & ; 0 \le x < 1 \\ f_X(0) + f_X(1) = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} & ; 1 \le x < 2 \\ f(0) + f(1) + f(2) = \frac{14}{15} & ; 2 \le x < 3 \\ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 & ; 3 \le x \end{cases}$$

$$F_X(2.5) = P(X \le 2.5) = \frac{14}{15}$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$$

ولهذه الدالة الشكل البياني (الدرس التالي):



خواص دالة التوزيع الاحتمالي:

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \le F_X(x) \le 1$

2) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \; : \; x_1 \le x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

لأن:

$x_1 \le x_2 \Rightarrow$

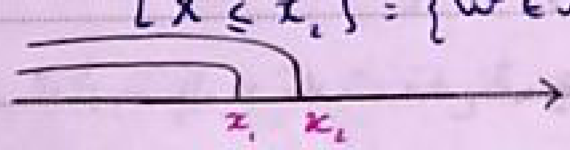
$[X \le x_1] \subseteq [X \le x_2]$

$\Rightarrow P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$

$\Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

$\Rightarrow [X \le x_1] = \{\omega \in \Omega : \underbrace{X(\omega)}_{\in \mathbb{R}} \le x_1\}$

$[X \le x_2] = \{\omega \in \Omega : \underbrace{X(\omega)}_{\in \mathbb{R}} \le x_2\}$



3) $F(+\infty) = P[X \le +\infty] = P(\{\omega \mid \omega \in \Omega : X(\omega) \le \infty\})$
$= P(\Omega) = 1$

$F(-\infty) = P[X \le -\infty] = P(\phi) = 0$

4) $F_X(x^+) = \lim_{n \to \infty} F(x + \frac{1}{n})$

F مستمرة من اليمين أي أن $F_X(x^+) = F_X(x)$ حيث

5) F مستمر من اليسار أي أن $F_X(x^-) \ne F_X(x)$

حيث $F_X(x^-) = \lim_{n \to \infty}(x - \frac{1}{n})$

6) نلاحظ من الخاصتين 4) و 5) أن:

$F(x^+) - F(x^-) = P[X \le x] - P[X < x]$
$= P(X = x)$

أي أنه إذا كان $P[X=x] > 0$ فإن $F_X(x)$

/ /

نهاية فترة عند x مساوية لها الاتصال.

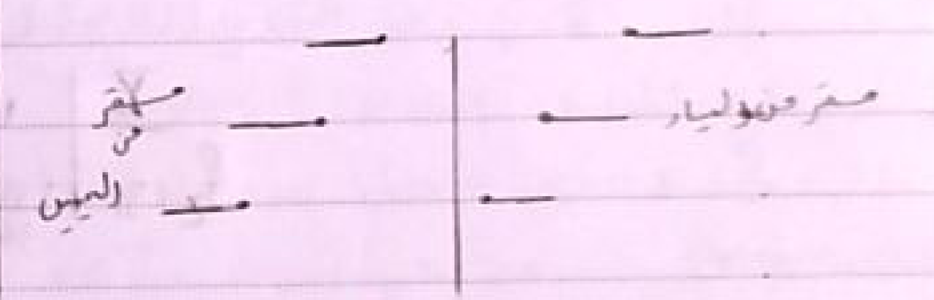
وإذا كان $p[X=x]=0$ فإن $F_X(x^+)=F_X(x^-)$

ويكون عندئذ X متغير عشوائي مستمر ومنه نقول

إن المتغير العشوائي X مستمر إذا تحقق:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ p[X=x]=0$$

ملاحظة [1]: إذا وضعنا في تعريف دالة التوزيع $F_X(x)=p[X<x]$ فإن $F_X(x)$ يكون مستمر من اليسار وغير مستمر من اليمين.



ملاحظة [2]: بعض العلاقات المهمة.

1) $p(X>a)=1-p(X\leq a)=1-F(a)$

2) $p(X\geq a)=1-F(a)+f(a)$

3) $p(X\leq b)=F(b)$

4) $p(X<b)=F(b)-f(b)$

5) $p(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

6) $p(a<X<b)=F(b)-F(a)-f(b)$

7) $p(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)+f(a)$

8) $p(a\leq X<b)=F(b)-F(a)+f(a)-f(b)$

تعريف دالة الحدث: ليكن (Ω,F,p) فضاء احتمالي ولتكن $A\in F$ نقول عن الدالة $X_A:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ إنها تمثل دالة الحدث A إذا تحقق:

$$\forall \omega\in\Omega:\ X_A(\omega)=\begin{cases}1 & :\omega\in A\\ 0 & :\omega\notin A \text{ أو } \omega\in A'\end{cases}$$

وبالتالي إذا كانت $X_A:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ تمثل دالة الحدث A وكان $B\subseteq\mathbb{R}$ فإن:

$$X_A^{-1}(B)=\{X_A\in B\}=\begin{cases}A & ,\ \{1\}\in B,\ \{0\}\notin B\\ A' & ,\ \{1\}\notin B,\ \{0\}\in B\\ \Omega & ,\ \{0,1\}\in B\\ \phi & ,\ \{0,1\}\notin B\end{cases}$$

وبالتالي نستنتج أن X_A هو متغير عشوائي منفصل مجموعة قيمه $\{0,1\}$ ونجد أن كل متغير عشوائي X مجموعة قيمه $\{0,1\}$ يمثل دالة حدث والعكس صحيح.