EQUIVALENCE RELATIONS

البديهيات التالية تحقق إذا علاقة التكافؤ

A relation in a set A is called an *equivalence relation* if it satisfies the following axioms:

$[E_1]$ Every $a \in A$ is related to itself.

$[E_2]$ If a is related to b, then b is related to a.

$[E_3]$ If a is related to b and b is related to c, then a is related to c.

In general, a relation is said to be *reflexive* if it satisfies $[E_1]$, *symmetric* if it satisfies $[E_2]$, and *transitive* if it satisfies $[E_3]$. In other words, a relation is an equivalence relation if it is reflexive, symmetric and transitive.

بشكل عام: نقول عن علاقة انعكاسية إذا حققت E_1

" " " تناظرية " " E_2

" " " متعدية " " E_3

بمعنى آخر: نقول عن العلاقة إنها علاقة تكافؤية إذا كانت

انعكاسية، تناظرية و متعدية.

Chapter 6

(1)

التوابع الخطية

Linear Mappings

MAPPINGS

Let A and B be arbitrary sets. Suppose to each $a \in A$ there is assigned a unique element of B; the collection, f, of such assignments is called a *function* or *mapping* (or: *map*) from A into B, and is written

$$f : A \to B \quad \text{or} \quad A \xrightarrow{f} B$$

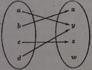
We write $f(a)$, read "f of a", for the element of B that f assigns to $a \in A$; it is called the *value of f at a* or the *image of a under f*. If A' is any subset of A, then $f(A')$ denotes the set of images of elements of A'; and if B' is any subset of B, then $f^{-1}(B')$ denotes the set of elements of A each of whose image lies in B':

$$f(A') = \{f(a) : a \in A'\} \quad \text{and} \quad f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

We call $f(A')$ the *image* of A' and $f^{-1}(B')$ the *inverse image* or *preimage* of B'. In particular, the set of all images, i.e. $f(A)$, is called the *image* (or: *range*) of f. Furthermore, A is called the *domain* of the mapping $f : A \to B$, and B is called its *co-domain*.

To each mapping $f : A \to B$ there corresponds the subset of $A \times B$ given by $\{(a, f(a)) : a \in A\}$. We call this set the *graph* of f. Two mappings $f : A \to B$ and $g : A \to B$ are defined to be *equal*, written $f = g$, if $f(a) = g(a)$ for every $a \in A$, that is, if they have the same graph. Thus we do not distinguish between a function and its graph. The negation of $f = g$ is written $f \neq g$ and is the statement: there exists an $a \in A$ for which $f(a) \neq g(a)$.

Example 6.1: Let $A = \{a, b, c, d\}$ and $B = \{x, y, z, w\}$. The following diagram defines a mapping f from A into B:



Here $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = z$, and $f(d) = y$. Also,

$$f(\{a, b, d\}) = \{f(a), f(b), f(d)\} = \{y, x, y\} = \{x, y\}$$

The image (or: range) of f is the set $\{x, y, z\}$: $f(A) = \{x, y, z\}$.

Example 6.2: Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be the mapping which assigns to each real number x its square x^2:

$$x \mapsto x^2 \quad \text{or} \quad f(x) = x^2$$

Here the image of -3 is 9 so we may write $f(-3) = 9$.

We use the arrow $\mapsto$ to denote the image of an arbitrary element $x \in A$ under a mapping $f: A \to B$ by writing

$$x \mapsto f(x)$$

as illustrated in the preceding example.

Example 6.3: Consider the 2×3 matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. If we write the vectors in $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^2$ as column vectors, then A determines the mapping $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ defined by

$$v \mapsto Av, \quad \text{that is,} \quad T(v) = Av, \qquad v \in \mathbf{R}^3$$

Thus if $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, then $T(v) = Av = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Remark: Every $m \times n$ matrix A over a field K determines the mapping $T: K^n \to K^m$ defined by

$$v \mapsto Av$$

where the vectors in K^n and K^m are written as column vectors. For convenience we shall usually denote the above mapping by A, the same symbol used for the matrix.

Example 6.4: Let V be the vector space of polynomials in the variable t over the real field $\mathbf{R}$. Then the derivative defines a mapping $D: V \to V$ where, for any polynomial $f \in V$, we let $D(f) = df/dt$. For example, $D(3t^2 - 5t + 2) = 6t - 5$.

Example 6.5: Let V be the vector space of polynomials in t over $\mathbf{R}$ (as in the preceding example). Then the integral from, say, 0 to 1 defines a mapping $\mathcal{J}: V \to \mathbf{R}$ where, for any polynomial $f \in V$, we let $\mathcal{J}(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$. For example,

$$\mathcal{J}(3t^2 - 5t + 2) = \int_0^1 (3t^2 - 5t + 2)\,dt = \tfrac{1}{2}$$

Note that this map is from the vector space V into the scalar field $\mathbf{R}$, whereas the map in the preceding example is from V into itself.

Example 6.6: Consider two mappings $f: A \to B$ and $g: B \to C$ illustrated below:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Let $a \in A$; then $f(a) \in B$, the domain of g. Hence we can obtain the image of $f(a)$ under the mapping g, that is, $g(f(a))$. This map

$$a \mapsto g(f(a))$$

from A into C is called the *composition* or *product* of f and g, and is denoted by $g \circ f$. In other words, $(g \circ f): A \to C$ is the mapping defined by

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Our first theorem tells us that composition of mappings satisfies the associative law.

Theorem 6.1: Let $f: A \to B$, $g: B \to C$ and $h: C \to D$. Then $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

We prove this theorem now. If $a \in A$, then

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

and

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

Thus $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$ for every $a \in A$, and so $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Remark: Let $F: A \to B$. Some texts write aF instead of $F(a)$ for the image of $a \in A$ under F. With this notation, the composition of functions $F: A \to B$ and $G: B \to C$ is denoted by $F \circ G$ and not by $G \circ F$ as used in this text.

16

التطبيقات الخطية:

لتكن A و B مجموعات كيفية. وبفرض أن لكل $a \in A$ يوجد تعيين وحيد العنصر من B المجموعة f من تلك التعيينات تدعى دالة أو تطبيق من A إلى B ويكتب:

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{أو} \quad A \xrightarrow{f} B$$

نكتب $f(a)$ تقرأ "f of a"، وكل عنصر من B وفق f يسند إلى $a \in A$ تدعى بقيمة f عنده أو صورة a وفق f. إذا كانت A' أي مجموعة جزئية من A عندها $f(A')$ يدل على مجموعة الصور لعناصر من A' و إذا كانت B' أي مجموعة جزئية من B عندها $f^{-1}(B')$ تدل على مجموعة العناصر من A التي صورها تكمن في B':

$$f(A') = \{ f(a) : a \in A' \} \quad \text{and} \quad f^{-1}(B') = \{ a \in A : f(a) \in B' \}$$

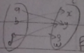
ندعو $f(A')$ صورة A' وندعو $f^{-1}(B')$ صورة العكسية أو الصورة الأصلية لـ B'. بشكل خاص مجموعة كل الصور، أي $f(A)$ تدعى صورة f أو مستقر f. علاوة على ذلك، A تدعى منطلق التطبيق $f : A \longrightarrow B$ و B تدعى المجال المقابل. (مجال)

لكل تطبيق $f : A \longrightarrow B$ يوجد توافق مع مجموعة جزئية من $A \times B$ تعطى بـ $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ ندعو هذه المجموعة رسم البياني لـ f.

تطبيقين $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow B$ نقول أنهما متساويان ونكتب $f = g$ إذا $f(a) = g(a)$ لكل $a \in A$، هذا يعني إذا كانتا لهما نفس الخط البياني.

وهكذا لا نجد تمييز بين الدالة ومخططها البياني. في حين $f = g$ يكتب ؟
$f \neq g$ وفي هذه الحالة يوجد $a \in A$ (واحد على الأقل) بحيث $f(a) \neq g(a)$

مثال 6.1 : لتكن $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{x,y,z,w\}$ لاحظ المخطط
التالي يعرف التطبيق f من A إلى B



هنا $f(a)=y$ ، $f(b)=x$ ، $f(c)=z$
و أيضا $f(d)=y$ $\quad f(\{a,b,d\})=\{f(a),f(b),f(d)\}$
$=\{y,x,y\}=\{x,y\}$
صورة أو المستقر الفعلي لـ f هو المجموعة $\{x,y,z\}$ أي
$f(A)=\{x,y,z\}$

مثال 6.2 : لتكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع بحيث يرسل كل رقم حقيقي
x إلى مربعه x^2 : $f(x)=x^2$ أو $x\mapsto x^2$
هنا صورة -3 هو 9 لذا يمكن كتابة $f(-3)=9$.
نستخدم السهم $\mapsto$ ليدل على صورة عنصر كيفي $x\in A$
وفق تطبيق $f:A\longrightarrow B$ يكتب $x\mapsto f(x)$ كما هو موضح في المثال
السابق.

مثال 6.3 : لدينا مصفوفة من مرتبة 2×3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

إذا كتبنا الأشعة في $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ كأشعة عامودية عندها
A تحدد تطبيق $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ المعطى بـ $v\mapsto Av$

يعني أن $T(v)=Av\ ,\ v\in R^3$

وهكذا إذا كان $v=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ عندها

$$T(v)=Av=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\12\end{pmatrix}$$

تذكرة: كل مصفوفة A من المرتبة $m\times n$ المعرفة على حقل K تحدد تطبيق $T:K^n\to K^m$ معرف بـ $v\mapsto Av$ حيث أن الأشعة في K^n و K^m تكتب أشعة عامودية.

للراحة يجب علينا عادةً تعريف التطبيق أعلاه بواسطة A نفس الرمز المستخدم للمصفوفة.

مثال 6.4: ليكن V فضاء شعاعي كثيرات الحدود بالمتحول t على حقل الأعداد الحقيقية R. عندها المشتق يعطى بالتطبيق $D:V\to V$ حيث أي كثير حدود $f\in V$ ولدينا $D(f)=\frac{df}{dt}$ على سبيل المثال

$$D(3t^2-5t+2)=6t-5$$

مثال 6.5: ليكن V فضاء شعاعي من كثيرات الحدود بالمتحول t على حقل R (كما في المثال السابق) عندها التكامل من 0 إلى 1 يعرف تطبيق $g:V\to R$ حيث من أجل أي كثير حدود $f\in V$ لدينا $g(f)=\int_0^1 f(t)\,dt$ على سبيل فمثلاً:

$$g(3t^2-5t+2)=\int_0^1(3t^2-5t+2)\,dt=\frac{1}{2}$$

ملاحظة: هذا يعني أنه تطبيق من فضاء شعاعي V إلى الحقل العددي R وبينما التطبيق في المثال السابق هو من V إلى نفسه

مثال 6.6: لدينا تطبيقين $f: A \to B$ و $g: B \to C$
الموضح أسفل. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
ليكن $a \in A$ عندها $f(a) \in D$ ، منطلق g بالتالي يمكننا
أخذ صورة $f(a)$ وفق التطبيق g ، يعني أن $g(f(a))$ هذا تطبيق
$a \mapsto g(f(a))$ من A إلى C يدعى مركب أو محصولين f و g و
يرمز له ب $g \circ f$. بعض أخر، $g \circ f : A \to C$ هو
تطبيق معرف بالشكل $(g \circ f)a = g(f(a))$.

نظريتنا الأولى تخبرنا إنه تركيب التطبيقات يحافظ على قانون ترابط الجمع
نظرية 6.1: ليكن $f: A \to B$ ، $g: B \to C$ ، $h: C \to D$
عندها $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

سوف نثبت هذه النظرية الآن: إذا كان $a \in A$ عندها

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

و

$$((h \circ g) \circ f)(a) = ((h \circ g)(f(a))) = h(g(f(a)))$$

لذلك $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$ لكل $a \in A$ وهكذا
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ملاحظة 3: ليكن $F: A \to B$. بعض النصوص تكتب aF بدلاً من $F(a)$
لصورة $a \in A$ وفق F . مع هذا الرمز و تركيب الدوال
$F: A \to B$ و $G: B \to C$ يرمز له ب $F \circ G$ وليس ب
$G \circ F$ كما هو مستخدم في هذا النص.

We next introduce some special types of mappings.

Definition: A mapping $f: A \rightarrow B$ is said to be *one-to-one* (or one-one or 1-1) or *injective* if different elements of A have distinct images; that is,

$$\text{if } a \neq a' \quad \text{implies} \quad f(a) \neq f(a')$$

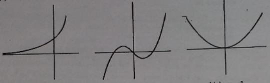
or, equivalently,

$$\text{if } f(a) = f(a') \quad \text{implies} \quad a = a'$$

Definition: A mapping $f: A \rightarrow B$ is said to be *onto* (or: f maps A *onto* B) or *surjective* if every $b \in B$ is the image of at least one $a \in A$.

A mapping which is both one-one and onto is said to be *bijective*.

Example 6.7: Let $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ and $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be defined by $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^3 - x$ and $h(x) = x^2$. The graphs of these mappings follow:



$f(x) = 2^x$ $\qquad$ $g(x) = x^3 - x$ $\qquad$ $h(x) = x^2$

The mapping f is one-one; geometrically, this means that each horizontal line does not contain more than one point of f. The mapping g is onto; geometrically, this means that each horizontal line contains at least one point of g. The mapping h is neither one-one nor onto; for example, 2 and -2 have the same image 4, and -16 is not the image of any element of $\mathbf{R}$.

Example 6.8: Let A be any set. The mapping $f: A \rightarrow A$ defined by $f(a) = a$, i.e. which assigns to each element in A itself, is called the *identity mapping* on A and is denoted by 1_A or 1 or I.

Example 6.9: Let $f: A \rightarrow B$. We call $g: B \rightarrow A$ the *inverse* of f, written f^{-1}, if

$$f \circ g = 1_B \quad \text{and} \quad g \circ f = 1_A$$

We emphasize that f has an inverse if and only if f is both one-to-one and onto (Problem 6.9). Also, if $b \in B$ then $f^{-1}(b) = a$ where a is the unique element of A for which $f(a) = b$.

LINEAR MAPPINGS

Let V and U be vector spaces over the same field K. A mapping $F: V \rightarrow U$ is called a *linear mapping* (or *linear transformation* or *vector space homomorphism*) if it satisfies the following two conditions:

(1) For any $v, w \in V$, $F(v + w) = F(v) + F(w)$.

(2) For any $k \in K$ and any $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

In other words, $F: V \rightarrow U$ is linear if it "preserves" the two basic operations of a vector space, that of vector addition and that of scalar multiplication.

Substituting $k = 0$ into (2) we obtain $F(0) = 0$. That is, every linear mapping takes the zero vector into the zero vector.

سوف نقدم بعض أنواع الخاصة من التطبيقات:

تعريف: التطبيق $f: A \longrightarrow B$ يقال إنه 1 بـ 1 أو متباين إذا كان لكل عنصرين مختلفين من A يملكان صورتان متمايزتان مختلفتان؛ هذا يعني أن $f(a) \neq f(a')$ يكافئ $a \neq a'$ if

أو بشكل مكافئ: $a = a'$ يكافئ $f(a) = f(a')$ if

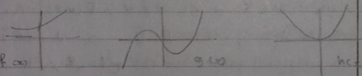
تعريف: تطبيق $f: A \longrightarrow B$ يقال أنه (onto) أو غامر إذا كان لكل $b \in B$ هو صورة لعنصر واحد على الأقل $a \in A$.

التطبيق الذي هو one - one "متباين" و onto "غامر" يقال إنه تقابل.

مثال 6.7: ليكن، $f: R \to R$, $g: R \longrightarrow R$, $h: R \to R$

معرفة بالشكل $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^3 - x$ و $h(x) = x^2$

ورسم البيانات لهذه التطبيقات هي التالي:



التطبيق f متباين؛ هندسياً وهذا يعني إنه كل خط أفقي لا يحوي أكثر من نقطة من f. التطبيق g هو غامر؛ هندسياً، هذا يعني أن كل خط أفقي يحوي على الأقل نقطة من g.

التطبيق h هو لا متباين و لا غامر؛ على سبيل مثال، 2 و 2- لديهما نفس الصورة وهي 4 و 4- ليست صورة لأي عنصر من R.

مثال 6.8: لتكن A أي مجموعة. التطبيق $f: A \to A$ المعرف بـ $f(a)=a$ أي الذي يسند إلى كل عناصر من A بنفسها تدعى تطبيق المطابق على A ويرمز له بـ 1_A أو 1 أو I

مثال 6.9: ليكن $f: A \to B$ ندعو $g: B \to A$ معكوس f ونكتب f^{-1} إذا كان $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$

نتأكد أن لـ f معكوس إذا وفقط إذا كانت f متباين وغامر أيضاً إذا كان $b \in B$ عندها $f^{-1}(b)=a$ حيث a عنصر وحيد من A بحيث $f(a)=b$

التطبيقات الخطية: لتكن V و U فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K.

التطبيق $F: V \to U$ تدعى تطبيق خطي (أو تحويل خطي أو تشاكل فضاءات شعاعية) إذا حافظ على الشرطين التاليين:

1) لأي $v, w \in V$ ، $F(v+w) = F(v) + F(w)$

2) لأي $k \in K$ و أي $v \in V$ ، $F(kv) = k F(v)$

بمعنى آخر، $F: V \to U$ هو خطي إذا حافظ على العمليتين الأساسيتين في الفضاء الشعاعي، وهي الجمع في الأشعة وضرب الشعاع بعدد.

باستبدال كل $k=0$ في (2) نحصل على $F(0)=0$ هذا يعني أن كل التطبيقات الخطية مأخوذة من شعاع صفري إلى شعاع صفري.

English 4 ever

Now for any scalars $a, b \in K$ and any vectors $v, w \in V$ we obtain, by applying both conditions of linearity,

$$F(av + bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w)$$

More generally, for any scalars $a_i \in K$ and any vectors $v_i \in V$ we obtain the basic property of linear mappings:

$$F(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \cdots + a_nF(v_n)$$

We remark that the condition $F(av + bw) = aF(v) + bF(w)$ completely characterizes linear mappings and is sometimes used as its definition.

Example 6.10: Let A be any $m \times n$ matrix over a field K. As noted previously, A determines a mapping $T: K^n \to K^m$ by the assignment $v \mapsto Av$. (Here the vectors in K^n and K^m are written as columns.) We claim that T is linear. For, by properties of matrices,

$$T(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = T(v) + T(w)$$

and

$$T(kv) = A(kv) = kAv = kT(v)$$

where $v, w \in K^n$ and $k \in K$.

We comment that the above type of linear mapping shall occur again and again. In fact, in the next chapter we show that every linear mapping from one finite-dimensional vector space into another can be represented as a linear mapping of the above type.

Example 6.11: Let $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the "projection" mapping into the xy plane: $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. We show that F is linear. Let $v = (a, b, c)$ and $w = (a', b', c')$. Then

$$F(v + w) = F(a + a', b + b', c + c') = (a + a', b + b', 0)$$
$$= (a, b, 0) + (a', b', 0) = F(v) + F(w)$$

and, for any $k \in \mathbf{R}$,

$$F(kv) = F(ka, kb, kc) = (ka, kb, 0) = k(a, b, 0) = kF(v)$$

That is, F is linear.

Example 6.12: Let $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be the "translation" mapping defined by $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Observe that $F(0) = F(0, 0) = (1, 2) \neq 0$. That is, the zero vector is not mapped onto the zero vector. Hence F is not linear.

Example 6.13: Let $F: V \to U$ be the mapping which assigns $0 \in U$ to every $v \in V$. Then, for any $v, w \in V$ and any $k \in K$, we have

$$F(v + w) = 0 = 0 + 0 = F(v) + F(w) \quad \text{and} \quad F(kv) = 0 = k0 = kF(v)$$

Thus F is linear. We call F the *zero mapping* and shall usually denote it by 0.

Example 6.14: Consider the identity mapping $I: V \to V$ which maps each $v \in V$ into itself. Then, for any $v, w \in V$ and any $a, b \in K$, we have

$$I(av + bw) = av + bw = aI(v) + bI(w)$$

Thus I is linear.

Example 6.15: Let V be the vector space of polynomials in the variable t over the real field $\mathbf{R}$. Then the differential mapping $D: V \to V$ and the integral mapping $\mathcal{J}: V \to \mathbf{R}$ defined in Examples 6.4 and 6.5 are linear. For it is proven in calculus that for any $u, v \in V$ and $k \in \mathbf{R}$,

$$\frac{d(u + v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{d(ku)}{dt} = k\frac{du}{dt}$$

that is, $D(u + v) = D(u) + D(v)$ and $D(ku) = k\,D(u)$; and also,

$$\int_0^1 (u(t) + v(t))\,dt = \int_0^1 u(t)\,dt + \int_0^1 v(t)\,dt$$

and

$$\int_0^1 k\,u(t)\,dt = k\int_0^1 u(t)\,dt$$

that is, $\mathcal{J}(u + v) = \mathcal{J}(u) + \mathcal{J}(v)$ and $\mathcal{J}(ku) = k\,\mathcal{J}(u)$.

الآن لأي عددين $a, b \in K$ ولأي شعاعين $v, w \in V$ نحصل على بتطبيق شرطي الخطية معاً $F(av + bw) = F(av) + F(bw)$

$= a.F(v) + b.F(w)$

بشكل عام نحصل لأي من الأعداد $a_i \in K$ ونحصل لأي من الأشعة $v_i \in V$ نحصل على العلاقة الأساسية لتطبيق الخطي:

$$F(a_1 v_1 + \_\_\_ + a_n v_n) = a_1 . F(v_1) + \_\_\_ + a_n F(v_n)$$

نلاحظ أن الشرط $F(av + bw) = a.F(v) + b.F(w)$ يصف بشكل كامل التطبيق الخطي وبعض الأحيان يستخدم بدلاً من التعريف.

مثال 6.10: ليكن A مصفوفة من مرتبة $m \times n$ معرفة على حقل K. المعطاة سابقاً، A تحدد تطبيق $T : K^n \longrightarrow K^m$ المعينة بالشكل: $v \mapsto Av$ (هنا الأشعة في K^n و K^m تكتب عامودية) نثبت أن T هو خطي.

باستخدام خواص مصفوفات:

$$T(v + w) = A(v + w) = Av + Aw$$
$$= T(v) + T(w)$$

و $T(kv) = A(kv) = kAv = k.T(v)$

حيث $v, w \in K^n$ و $k \in K$.

ندعو هذا النوع في الأعلى بالتطبيق الخطي ويجب أن يتحقق مرة بعد مرة.

في الحقيقة، في الفصل القادم سنرى أن كل تطبيقات الخطية من فضاء شعاعي محدود البعد إلى آخر يمكن أن تمثل كتطبيق الخطي من نوع في الأعلى.

مثال 6.11 : ليكن $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق الإسقاط على مستوي xy :
$F(x,y,z)=(x,y,0)$ نرى أن F خطي . موجود في نوطة 18 .

مثال 6.12 : ليكن $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيق الانسحاب المعرف ب $F(x,y)=(x+1,y+2)$
انتبه إن $F(0)=F(0,0)=(1,2)\neq 0$ هذا يعني أن شعاع صفري ليس
تطبيق على شعاع صفري بالتالي F ليس خطي

مثال 6.13 : ليكن $F: V \to U$ تطبيق يسند كل $0\in U$ إلى كل $v\in V$
عندها لأجل $v,w\in V$ و لأي $k\in K$ لدينا :

$$F(v+w)=0=0+0=F(v)+F(w)$$

و

$$F(k\cdot v)=0=k\cdot 0=k\cdot F(v)$$

وهكذا F خطي . ندعو F تطبيق صفري و يكتب عادة أي نرمزله 0 .

مثال 6.14 : لدينا تطبيق مطابق $I: V \to V$ حيث يربط كل $v\in V$
بنفسه ، عندها لأجل أي $v,w\in V$ و لأي $a,b\in K$ لدينا
$I(av+bw)=av+bw=aI(v)+bI(w)$
وهكذا I هو خطي .

مثال 6.15 : ليكن V فضاء شعاعي من كثيرات الحدود بالمتحول t على حقل
الحقيقي $\mathbb{R}$. عندها تطبيق المشتق $D: V \to V$ و تطبيق تكامل
$J: V \to \mathbb{R}$ معرف في مثال 4 و مثال 5 هو خطي يُثبت صحة ذلك

موجود ص 18

Example 6.16: Let $F: V \to U$ be a linear mapping which is both one-one and onto. Then an inverse mapping $F^{-1}: U \to V$ exists. We will show (Problem 6.17) that this inverse mapping is also linear.

When we investigated the coordinates of a vector relative to a basis, we also introduced the notion of two spaces being isomorphic. We now give a formal definition.

Definition: A linear mapping $F: V \to U$ is called an *isomorphism* if it is one-to-one. The vector spaces V, U are said to be *isomorphic* if there is an isomorphism of V onto U.

Example 6.17: Let V be a vector space over K of dimension n and let $\{e_1, \ldots, e_n\}$ be a basis of V. Then as noted previously the mapping $v \mapsto [v]_e$, i.e. which maps each $v \in V$ into its coordinate vector relative to the basis $\{e_i\}$, is an isomorphism of V onto K^n.

Our next theorem gives us an abundance of examples of linear mappings; in particular, it tells us that a linear mapping is completely determined by its values on the elements of a basis.

Theorem 6.2: Let V and U be vector spaces over a field K. Let $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be a basis of V and let $u_1, u_2, \ldots, u_n$ be any vectors in U. Then there exists a unique linear mapping $F: V \to U$ such that $F(v_1) = u_1$, $F(v_2) = u_2$, $\ldots$, $F(v_n) = u_n$.

We emphasize that the vectors $u_1, \ldots, u_n$ in the preceding theorem are completely arbitrary; they may be linearly dependent or they may even be equal to each other.

KERNEL AND IMAGE OF A LINEAR MAPPING

We begin by defining two concepts.

Definition: Let $F: V \to U$ be a linear mapping. The *image* of F, written $\operatorname{Im} F$, is the set of image points in U:

$$\operatorname{Im} F = \{u \in U : F(v) = u \text{ for some } v \in V\}$$

The *kernel* of F, written $\operatorname{Ker} F$, is the set of elements in V which map into $0 \in U$:

$$\operatorname{Ker} F = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

The following theorem is easily proven (Problem 6.22).

Theorem 6.3: Let $F: V \to U$ be a linear mapping. Then the image of F is a subspace of U and the kernel of F is a subspace of V.

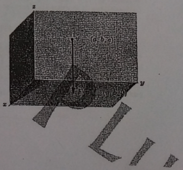
Example 6.18: Let $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the projection mapping into the xy plane: $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Clearly the image of F is the entire xy plane:

$$\operatorname{Im} F = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\}$$

Note that the kernel of F is the z axis:

$$\operatorname{Ker} F = \{(0, 0, c) : c \in \mathbf{R}\}$$

since these points and only these points map into the zero vector $0 = (0, 0, 0)$.



مثال 6.16 : ليكن $F: V \to U$ تطبيق خطي وهو متباين وغامر عندها معكوس التطبيق $F^{-1}: U \to V$ موجود. سوف نرى أن المعكوس أيضاً خطي.

عندما نتحقق من إحداثيات شعاع بالنسبة لأساس، وأيضاً ندخل الفكرة على فضائين متماثلين. نحن الآن نعطي صيغة التعريف.

تعريف: التطبيق الخطي $F: V \longrightarrow U$ يدعى تماثل إذا كان 1-1 والفضاءات الشعاعية V و U يقال إنهما متماثلان إذا وجد تطبيق تماثل من V إلى U.

مثال 6.17 : ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K ذات البعد n وليكن $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ V عندها كما تم الإشارة سابقاً التطبيق $v \mapsto [v]_e$ أي التي تربط كل $v \in V$ بإحداثيات الشعاع بالنسبة للقاعدة $\{e_i\}$ هو تماثل V على K^n

نظريتنا التالية تعطينا الكثير من الأمثلة على التطبيقات الخطية، وبشكل خاص، تخبرنا أن التطبيق الخطي يحدد تماماً بقيم عناصر القاعدة.

نظرية 6.2: ليكن V و U فضاءات شعاعية على حقل K وليكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ قاعدة لـ V وليكن $u_1, \dots, u_n$ أي أشعة في U. عندها يوجد تطبيق خطي وحيد $F: V \longrightarrow U$ بحيث $F(v_1)=u_1, \dots, F(v_n)=u_n$.

نتأكد أن الأشعة $u_1, \dots, u_n$ في المبرهنة السابقة كيفية تماماً، قد تكون مرتبطة خطياً أو أنهم قد يتساوون مع بعضهم البعض.

- نواة و المستقر الفعلي لتطبيق خطي:

نبدأ بتعريف المفهومين:

تعريف: ليكن $F: V \longrightarrow U$ تطبيق خطي. المستقر الفعلي لـ F، ونكتب $\operatorname{Im} F$ هو مجموعة صور النقاط في U:

$$\operatorname{Im} F = \{u \in U : F(v) = u \text{ لبعض } v \in V\}$$

النواة لـ F، نكتب $\ker F$، هي مجموعة العناصر في V التي تصور في $0 \in U$:

$$\ker F = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

النظرية التالية من سهل إثباتها (مشكلة 6.22)

نظرية: ليكن $F: V \longrightarrow U$ تطبيق خطي عندها مستقر فعلي F فضاء جزئي من U و النواة F هو فضاء جزئي من V

مثال 6.12: ليكن $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيق الإسقاط على المستوي xy $F(x,y,z) = (x,y,0)$. بوضوح المستقر الفعلي لـ F هي المستوي بأكمله:

$$\operatorname{Im} F = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

لاحظ أن نواة لـ F هي محور z.

$$\ker F = \{(0,0,c) : c \in \mathbb{R}\}$$

طالما هذه النقاط وفقط تلك النقاط تصور بالشعاع الصفري $0 = (0,0,0)$.

Happy New year ... انتهى المقرر

And Good luck

:)