المحاضرة التاسعة عشر - الاثنين

2015 / 12 / 21

مبرهنة التراص.

كل مجموعة جزئية M متراصة من فضاء متري تكون مغلقة ومحدودة

أولاً لنبرهن أنها مغلقة..

ومعلوم أن $M \subseteq \bar{M}$.

$x \in \bar{M} \Rightarrow \exists x_n \in M$.

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

إذا $x \in M$ يتم المطلوب.

إذا كان $x \notin M$ .. بما أن المجموعة M متراصة فإنه يملك ~~[illegible]~~ متتالية جزئية متقاربة ولتكن متقاربة من x_n. وبما كانت المتتالية جزئية من x_n فإنه ستتقارب من نفس النهاية

$\Rightarrow x_n \to x \Rightarrow x \in M$

$\Rightarrow \bar{M} \subseteq M \Rightarrow \boxed{\bar{M} = M}$

$x \in M$ أو $x \notin M$ فقط ..

ثانياً لنبرهن المحدودية.. {كل جزئية متقاربة يجب أن تكون محدودة}

لنفرض جدلاً أن M غير محدودة وبالتالي يوجد متتالية غير محدودة ولتكن y_n بحيث $d(y_n, b) > n$ .. هذه المتتالية لا يمكن أن تحوي أي جزئية متقاربة وهذا يناقض كون M متراصة وهذه M محدودة ومغلقة

ملاحظة: العكس غير صحيح بالحالة العامة.

أي يمكن أن تكون مجموعة ~~[illegible]~~ جزئية من فضاء متري وتكون مغلقة ومحدودة ولكنها غير متراصة.

هلبرت $\ell^{p=2}$

• مثال:

• نأخذ المتتالية e_n من الفضاء ℓ^2 حيث $(e_n = \delta_{ni})$ هنا أصفار المتتالية كلها أصفار إلا الـ(n) يساوي الـ(1) أي

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, 0, \ldots, \overset{n}{1}, 0, \ldots)$

$\vdots$

هذه المتتالية محدودة لأن

$\|e_n\| = \sup |e_i| = 1$

وأن المجموعة مغلقة لأن نقاط التراكم هي المجموعة الخالية (أي ليس لا نقاط تجمع) وهنا حصلنا مجموعة محدودة ومجموعة مغلقة ولكنها غير متراصة لأن المتتالية لا تملك نقاط تراكم وبالتالي لا يوجد منها متتالية جزئية متقاربة

في المرحلة التالية سنثبت أن الإغلاق والمحدودية هنا تعني التراص...

مبرهنة الزامن..

الشرط اللازم والكافي لكي تكون المجموعة الجزئية M من فضاء منظم X منتهي البعد متراصة هو أن تكون مغلقة ومحدودة

$M \subseteq X$

(M مغلقة ومحدودة) $\Longleftrightarrow$ (M متراصة)

الإثبات:

M متراصة $\Longrightarrow$ مغلقة ومحدودة

تم برهانه سابقاً

M مغلقة ومحدودة $\Longrightarrow$ M متراصة..

نفرض $M \subseteq X$ مجموعة مغلقة ومحدودة

ومن الفرض لدينا X فضاء منظم منتهي البعد

ونفرض $\dim X = n$ وبالتالي الفضاء يملك قاعدة ولتكن $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ وحيدة نستطيع كتابة أي عنصر من الفضاء X بدلالة عناصر القاعدة E كتركيب خطي..

ولنأخذ المتتالية $x_m \in M$..

بما أن x_m من M و M جزئية من X فيكون عناصر x_m تكتب بشكل وحيد كتركيب خطي بدلالة عناصر القاعدة E أي

$$x_m = \xi_1^m e_1 + \xi_2^m e_2 + \dots + \xi_n^m e_n$$

وبما أن المجموعة محدودة فإن المتتالية x_m ستكون محدودة أيضاً وبالتالي

$$\|x_m\| \leq K \quad \forall m$$

حسب مبرهنة التراكيب الخطية

$$K \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i^m e_i \right\|$$

$$\geq C \sum |\xi_i^m| ; \forall C > 0$$

حيث نجد

$$|\xi_j^m| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^m| \leq \frac{K}{C} = K_1$$

وهذا يعني أن المتتالية محدودة

حسب مبرهنة بولزانو فايرشتراس يوجد للمتتالية $\xi_j^{(m)}$ نقطة تجمع ولنرمز لهذه النقطة هي ξ_j مما يعني أنه توجد متتالية جزئية منها متقاربة إلى ξ_j

وبالتالي لدينا n متتالية «المتتالية الأعمدة» كلها محدودة.

$$x_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_2^1 e_2 + \dots + \xi_n^1 e_n$$

$$x_2 = \xi_1^2 e_1 + \xi_2^2 e_2 + \dots + \xi_n^2 e_n$$

$$\vdots$$

$$x_m = \xi_1^m e_1 + \xi_2^m e_2 + \dots + \xi_n^m e_n$$

$$\vdots$$

نأخذ متتالية العمود الأول (ξ_1^m)

هذه محدودة ومنه حسب بولزانو -
فايرشتراس توجد منها متتالية جزئية
متقاربة من ξ_1 أي $y_{1m} \to \xi_1$
نتصور المتتالية السابقة بالعمود الثاني
فنحصل على متتالية جزئية محدودة ومنه
حسب فايرشتراس توجد متتالية جزئية
منها ومتقاربة الى ξ_2 أي $y_{2m} \to \xi_2$
ثم نتصور $\{y_{2m}\}$ بالعمود
الأول ونكرر هذه العملية n مرة
فنحصل على متتالية جزئية $\{z_m\}$ من $\{x_m\}$
تتقارب من z حيث $z = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$
وبما أن M مغلقة فإن $z \in M$ و
منه يوجد لكل متتالية x_m متتالية
جزئية متقاربة في M ومنه M متراصة
انتهى البرهان