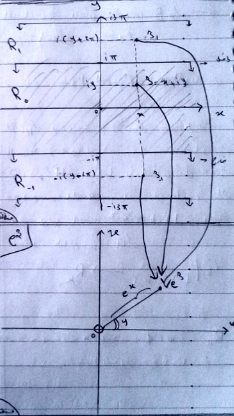
بداية. المحاضرة الثالثة

الاربعاء 23-3-2016

ملاحظة: سنقدم تبريرًا جديدًا لمسألة الرسم وتعيين خط ما لن نتبع الاسلوب القديم وهو المتطابق وإنما سنستعمل اسلوب المجالات. أي إذا الاسهم الى الداخل تكون المجموعة تحوي السقف وعندما الاسهم الى الخارج تكون المجموعة لا تحوي السقف وهكذا...



نلاحظ انه أي عنصرين من الشريط R_0 لن تتساوى صورهم

$$R_0 = \{ z \in \mathbb{C} ; -\pi < Im\, z \le \pi \}$$

بشكل عام إن الشريط الواحد سيكون متباين

$$R_k = \{ z \in \mathbb{C} ; -\pi + 2\pi k < Im\, z \le \pi + 2\pi k \} \; ; k \in \mathbb{Z}$$

أي أن التابع الاسي دوري ولكنه متباين على كل شريط R_k ومنه التابع الاسي هو تقابل على كل شريط R_k .. لنأخذ مقصور التابع الاسي على الشريط R_k

$$e^z\big|_{R_k} : R_k \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \longmapsto e^z$$ تقابل

ومنه له تابع عكسي.. سنرمز له بـ l_k

"شرط أن يكون للتابع تابع عكسي هو أن يكون تقابل"

$$l_k : \mathbb{C}^* \longrightarrow R_k$$

أي كل عنصر من $\mathbb{C}^*$ سيكون له صورة واحدة فقط في R_k

$$w_k = l_k(z) \iff z = e^{w_k}$$

$$\iff re^{i\theta} = e^{u_k + iv_k}$$

$$re^{i\,Arg\, z} = e^{u_k + iv_k}$$

$$\iff \begin{cases} u_k = \ln|r| = \ln|z| \\ v_k = Arg\, z + 2\pi k \end{cases}$$

$$w_k = \log z \;\wedge\; w \in R_k$$

ان الفروع ℓ_k هي فروع غير مستمرة عند اي نقطة من ox^-

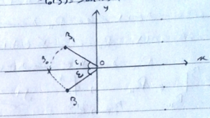
تحليلها ان

$$\ell_k(z) = \ell_0(z) + i2\pi k$$

اذا اثبتنا ان $\ell_0(z)$ غير مستمرة فسوف يكون $\ell_k(z)$ غير مستمرة:

$$\ell_0 : \mathbb{C}^* \longrightarrow R_0$$

$$\ell_0(z) = \ln(r) + i\theta \; ; -\pi < \theta \le \pi$$



$$z_0 = r_0 e^{i\pi}$$

$$\ell_0(z) = \ln r_0 + i\pi$$

$$z = r_0 e^{i(-\pi+\varepsilon)}$$

$$\ell_0(z) = \ln r_0 + i(-\pi+\varepsilon)$$

نجعل " $z \to z_0$ " بالمسار حول دائرة نصف قطرها r_0

$$\ell_0(z) \longrightarrow \ln r_0 + i(-\pi)$$

$$\neq \ell_0(z_0).$$

ومنه التابع غير مستمر عند أي نقطة z من ox^-.

ملاحظة:

اذا اخذنا z_1 من النصف العلوي

$$z_1 = r_0 e^{i(\pi-\varepsilon_1)}$$

$$\ell_0(z_1) = \ln r_0 + i(\pi-\varepsilon_1)$$

$$z_1 \longrightarrow z_0$$

$$\ell_0(z_1) \longrightarrow \ln r_0 + i\pi$$

$$= \ell_0(z)$$

النهاية تساوي الصورة ولكن لا نحكم مباشرة على استمرار التابع لسبب انه غير مستمر كما رأينا.

ملاحظة:

المسارين السابقين يقتربان من z_0 وليس لهما نفس النهاية فالنهاية غير موجودة

ملاحظة:

سيأتي سؤال للتمييز بين التابع اللوغاريتمي

ملاحظة:

$\ell_k(z)$ هي فروع غير مستمرة عند الاعداد السالبة فهي غير اشتقاقية عندها ومنه هي غير تحليلية عندها وبما أن $\mathbb{C}^*$ مفتوحة والتابع غير قابل للاشتقاق على نقاط غير تحليلي عليها ولاشتقاقية الفروع التحليلية نأخذ مقصور التابع ℓ_k التالي

$$\ell_k \big|_{\mathbb{C} \setminus \{o x^-\}} \longrightarrow R_k$$

$\underline{x^-}$ نصف المحور السالب لذلك لا داعي لكتابة $\mathbb{C}^*$

$$R_k = \{ w \in \mathbb{C} : -\pi + 2\pi k < Im\, w < \pi + 2\pi k$$

هستفيد من الرموز مع أشكالها المحصورة .

حذفنا π (π] لأننا حذفنا الزوايا السالبة

وبذلك أصبح $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$

لأن صورة المستقيم $x=0$ هو π ...

لأن الأعداد الواقعة عليه زاويتها π

من هنا

إن التابع ℓ_k هولومورفي على $\mathbb{C}\setminus\{x\le 0\}$

حسب نوع ... على المجموعة $\mathbb{C}\setminus\{x\le 0\}$

~~...~~ وإن

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{x\le 0\} : \frac{1}{z} = \ell_k'(z)$$

الإثبات:

لدينا مبرهنة بالتحليل الحقيقي تقول:

"إذا كان للتابع f تابع عكسي وليكن f^{-1} وكان f قابل للاشتقاق عند x وكان $f'(x)\neq 0$ فإن التابع f^{-1} سيكون قابل للاشتقاق عند $f(x)$

نطبقها في التحليل العقدي بـ:

لدينا التابع العقدي f له تابع عكسي f^{-1} وكان هذا التابع قابل للاشتقاق عند z_0 و $f'(z_0)\neq 0$ فإن التابع f^{-1} سيكون قابل للاشتقاق عند z_0

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

حيث $w_0 = f(z_0)$ ، $z_0 = f^{-1}(w_0)$

$$\Rightarrow f'^{-1}(z_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))}$$

ملاحظة هامة:

الشرط الأساسي:

إن ℓ_k هو تابع عكسي لـ $e^z|_{R_k}$

و e^z قابل للاشتقاق على كل $\mathbb{C}$ وبالتالي على R_k وإن

$$(e^z)' = e^z \neq 0 \quad \forall z\in R_k$$

ومنه

$$\ell_k'(z) = \frac{1}{(e^z)'|_{\ell_k(z)}}$$

$$= \frac{1}{e^{\ell_k(z)}} = \frac{1}{z}$$

لوغاريتم

وبما أن $\mathbb{C}\setminus\{x\le 0\}$ مجموعة مفتوحة و $\ell_k(z)$ قابل للاشتقاق على جوار منه تحليلي عليها

أنس الحاكم

بداية المحاضرة الرابعة - الخميس 2016/3/24

بسم الله الرحمن الرحيم

في هذه المحاضرة تم اعادة ترتيب الافكار

- التابع الاسي العقدي واللوغاريتمي

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$$

$$exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

وهو تحليلي على $\mathbb{C}$ و $(e^z)' = e^z$

e^z تابع دوري دوره 2π وبالتالي فإن التابع هو تابع غير متباين وغامر $\mathbb{C}^*$.

لكن هذا التابع سيكون متباين على الشريط الافقي الذي عرضه 2π لكن دون احدى ~~حافتيه~~ حافتيه

و $exp|_R$ غامر $\mathbb{C}^*$ وهو

$exp|_R$ هو تابع تقابلي فله تقابل عكسي من $\mathbb{C}^*$ الى الشريط R.

لن يكون مستمراً عند أي نقطة من نصف المستقيم $]0, \infty^-]$ الذي صورته وفق $exp|_R^{-1}$ هي حافة R المحتواه منه

ويمكن اثبات ان $exp|_R^{-1}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus]0, \infty^-]$

أي تابع معاكس للتابع الاسي على أي شريط عرضه 2π دون حافتيه سيكون فرعاً تحليلياً للتابع اللوغاريتمي متعدد القيم على $\mathbb{C} \setminus]0, \infty^-]$

بشكل خاص اذا أخذنا الاشرطة الافقية R_k

$$R_k = \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{\text{القسم الحقيقي}} \times \underbrace{]-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k[}_{\text{القسم التخيلي}}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

ورمزنا بـ l_k لـ $exp^{-1}|_R$

ونعرفه بالعلاقة

$$l_k(z) = ln|z| + i(Arg\, z + 2\pi k)$$
$$= l_0(z) + i2\pi k$$

ان $l_0 = \underline{Log}$ ، كبيرة L

ونسميه الفرع الرئيسي لـ Log

l_{k_0} نسميه الفرع الموافق لـ $k = k_0$

نجد أن

$$l_k'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus]0, \infty^-]$$

- الدوران حول المبدأ دورة كاملة هو الذي يغير الزاوية وهذا الدوران هو الذي يغير من فرع الى فرع.

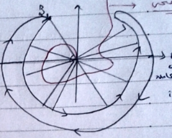
وهذا معنى الدوران دورة كاملة حول المبدأ يعني الانتقال من فرع الى فرع.

عندما صنفنا الـ نقطة صفر هذا الدوران دورة كاملة حول المبدأ دورة كاملة. وسمي 0 نقطة تفرع التابع اللوغاريتمي

كما نسمي D مستوي فرع التابع اللوغاريتمي

ملاحظة الفرع

أي معين بداية المبدأ و ينتهي إلى اللانهاية يمنع الدوران حول المبدأ



نقاط التفرع لـ $\log(h(z))$ هي اصفار $h(z)$

أي حلول المعادلة $h(z) = 0$

مثال:

نقاط تفرع $\log(z^2 + 9)$

هي $-3i, +3i$.

أي هنا يجب منع الدوران دورة كاملة حول $(3i)$ و $(-3i)$ لمنع الانتقال من فرع الى فرع ويمنع الدوران هنا أيضاً في القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين وتقاطعها من المستوي

ملاحظة:

$\log(z)$ هو العدد التحليلي لـ $\ln(z)$ الى المستوي العقدي.

لا يوجد دراسة زوجية أو استمرار أو متتالية ومتسلسلات لتابع متعدد القيم لذلك لا ادرس دراسة لتابع متعدد القيم ندرسه في كل فرع من فروعه

السلاسل التحليلية الصحيحة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$$

متقاربتان بالإطلاق على $\mathbb{C}$ أي $(R=\infty)$

أثبت ذلك

السلسلة الأولى تمثل تابعاً تحليلياً على $\mathbb{C}$ نرمز له بـ $\sin z$

السلسلة الثانية تمثل تابعاً تحليلياً على $\mathbb{C}$ نرمز له بـ $\cos z$

أي:

"التابع الممثل بسلسلة قوى هو تابع تحليلي في قرص تقاربه ومشتقته هو التابع الممثل بسلسلة المشتقة" وإن

$$(\sin z)' = \cos z$$
$$(\cos z)' = -\sin z$$

$\boxed{\text{أثبت ذلك}}$

- $\sin z$ هو تمديد تحليلي لـ $\sin x$ الى المستوي العقدي

$\forall z = x \in \mathbb{R} : \sin z = \sin x$

،

$\cos z$ تابع زوجي على $\mathbb{C}$

$\sin z$ " " " $\mathbb{C}$

① $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$

اثبت صحتها

$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z)$

② $e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)$

بجمع ① و② ونطرح ① و②

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \cos(z) \\ \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} &= \sin(z) \end{aligned}} \; *$$

هام جداً

إن التوابع $\sin z, \cos z$ توابع دورية دورها 2π . اثبت ذلك .

من الملاحظة [*]

إن معظم المطابقات المثلثية الحقيقية تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$ نذكر منها

① $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

اثبت صحتها

② التحويل من مجموع الى جداء

③ $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$

④ $\cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos(2z)$

$2\cos^2(z) = \cos(2z)$

$1 - 2\sin^2(z) = \cos(2z)$