المحاضرة الثانية :

مقدمة :

درسنا في ما سبق في أبحاث التحليل العددي (1) بحث الاستيفاء حيث إنَّ

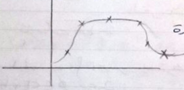
الاستيفاء : هو البحث عن تابع (قد تكون حدودية) تمر من جميع النقاط المعطاة

فبفرض أنه لدينا خمس نقاط عندئذٍ تكون الحدودية من الدرجة الرابعة.

الفرض يكون كالتالي

ليكن لدينا $(n+1)$ نقطة مختلفة $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$

الطلب : بحث عن دالة تمر من $\boxed{\text{جميع}}$ النقاط المعطاة (ربما تكون حدودية ويمكن أن تكون غير الحدوديات).

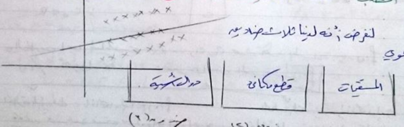


ولكن : في هذه الطريقة نسبة الخطأ كبيرة جداً لذلك نستخدم طريقة ثانية وهي التقريبات

★ التقريبات :

الفرض يكون كالتالي : ليكن لدينا مجموعة النقاط التالية

الطلب : بحث عن دالة قد تمر وقد لا تمر من النقاط المعطاة.



وتعتمد الطريقة على اختبار التابع الذي قد يكون حدودية أو تابع أسي أو لوغاريتمياً

ولكن بشرط : هو أن يكون الخطأ الكلي (حيث إن الخطأ الكلي هو مجموع الأخطاء لكل النقاط والخطأ هو بعد النقطة عن التابع) أصغر ما يمكن.

وهكذا نجد أنه في التقريبات نختار التابع (من زمرة محددة) ثم نحسب الخطأ ويكون هذا التابع أفضل تابع من هذه الزمرة. وأخيراً أفضل التابع (من هذه الزمرة)

أو نوقفه حسب دقة الخطأ . مع ملاحظة أنه لا توجد طريقة فعلية لاختيار الزمرة المناسبة) .

[توضيح للكلام السابق : نختار التابع من زمرة محددة ولتكن الزمرة مثلاً المستقيمات من الصندوق الأول ثم نحسب الخطأ . ونكون هنا المستقيم أفضل مستقيم من زمرة المستقيمات . بحيث يكون خطؤه أصغر ما يمكن من باقي المستقيمات . ولا توجد لدينا طريقة فعلية لاختيار الزمرة]

التقريبات تقسم إلى :

تقريبات خطية

تقريبات غير خطية .

⊙ ليكن $f(x)$ تابع معرف ومستمر على المجال $[a,b] \subset R$ ونفرض أن $\phi \in C[a,b]$ حيث :

$$\phi(x) = \phi(x, c_0, c_1, \dots, c_n) = \phi(x, c)$$

علماً أن : $x \in [a,b]$, $c = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (c_0, c_1, \dots, c_n)$

; $c_k \in R$

والمطلوب إيجاد المعاملات $c_0, c_1, \dots, c_n$ بحيث تكون المسافة بين $f(x)$ و $\phi(x)$ أصغر ما يمكن . ونميز حالتين بالنسبة لـ $f(x)$

الحالة الأولى : إذا كان التابع $f(x)$ معطى عند عدد منته من النقاط $x_i \in [a,b]$ وحيث $y_i = f(x_i)$

عندئذ : تدعى المسألة

<< بمسألة تقريب المربعات الصغرى للبيانات المتقطعة . >>

الحالة الثانية : إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق أو قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$

عندئذ تدعى المسألة

بمسألة تقريب المربعات الصغرى للتوابع المستمرة .

$c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_n$

$\boxed{3}$

أما بالنسبة للتابع $\phi(x)$ فيتم إيجاده باستنادا إلى:

(1) إذا أمكن كتابة التابع $\phi(x)$ بدلالة توابع مستقلة خطياً $\phi_k(x) \in [a,b]$ أي بالشكل:

$$\phi(x,c) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

عندئذ تدعى المسألة بمسألة التقريب الخطي

ex: $\phi(x, c_0, c_1, c_2, c_3) = c_0 + c_1 e^{2x} + c_2 \ln x + c_3(x+1)$

وفيما عدا (1) تدعى المسألة بالتقريب غير الخطي.

ex: $\phi(x, c_0, c_2, c_3, c_4) = c_0 \cos h(c_1 x) + c_2 e^{-c_3(x-c_4)}$

التقريب الخطي: بفرض $f \in C[a,b]$ و $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \in [a,b]$ توابع مستقلة خطياً. ولنفرض S مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ بحيث

$$\forall \phi \in S \quad ; \quad \phi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

عندئذ: $d(f,\phi) = \|f-\phi\| = D(c_0, c_1, \dots, c_n)$

أي إن المسافة بين الدالتين f, ϕ تعتمد على التابع ϕ (أي معاملاته) تبعاً لاختيار المألوفة للتوابع ϕ_k:

1. $\phi_0 = 1, \phi_1 = x, \phi_2 = x^3, \dots, \phi_n = x^n$ (حدوديات من الدرجة n على الأكثر)
2. $\phi_0 = 1, \phi_1 = \cos(x), \phi_2 = \sin(x), \phi_3 = \cos(2x), \dots$ (مثلثية)
3. $\phi_0 = 1, \phi_1 = e^{a_1 x}, \phi_2 = e^{a_2 x}, \phi_3 = e^{a_3 x}, \dots$ حيث $a_k \in \mathbb{R}$ أسية
4. التوابع المتعامدة.

ملاحظة: يمكن صياغة مسألة التقريب كما يلي:

لنفرض $f \in C[a,b]$ والتوابع $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \in C[a,b]$ توابع مستقلة خطياً المطلوب إيجاد $\phi^{\circ}(x) \in S$ بحيث:

$$\phi^{\circ}(x) = \phi^{\circ}(x, c_0^{(\circ)}, c_1^{(\circ)}, \dots, c_n^{(\circ)}) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(\circ)} \phi_k(x) \in S$$

$$D(c_0^{(\circ)}, c_1^{(\circ)}, \dots, c_n^{(\circ)}) = \|f - \phi^{(\circ)}\| = \min \|f - \phi\| = \min_{\phi \in S} D(c_0, c_1, \dots, c_n)$$