المحاضرة الأولى: تحليل عددي - مدرس المقرر الدكتورة رانيا مخيط

- أشارت الدكتورة في بداية المحاضرة أن هذه المادة تحتاج إلى آلة حاسبة علمية، نضبط على الراديان - إضافة إلى الكتاب فهو هام جداً. نحتاجه بالإضافة إلى المحاضرات لأنه غني بالأمثلة.

مقدمة: يعد التحليل العددي من أفرع الرياضيات الهامة إذا أن وظيفته تبدأ في الوقت الذي تقف فيه الطرائق التحليلية حيث أننا نعلم بأنه لكل مسألة ما ثمة طريقتين

إما طريقة تحليلية (مألوفة) يعطي حلولاً فعلية ، وطريقة عددي يعطي حلولاً تقريبية

ولو أردنا تعريف هذا العلم فإننا نقول هو علم يبين كيفية بناء خوارزمية لحل مسألة رياضية وذلك ضمن شروط رياضية تتضمن وجود الحل ووحدانيته وشروط هندسية تتضمن الخوارزمية بأقل تكلفة ممكنة.

تعريف التحليل العددي:

هو بناء خوارزمية لمسائل رياضية بشرط أن تكون معرفة ومستقرة.

- من أجل أي مسألة رياضية مطروحة Problem math لحلها نقوم بعدة تساؤلات

1) هل الإمكانية موجودة (معرفة ومستقرة)؟

الجواب: نعم

إذا كان الجواب نعم

2) هل الطرائق التحليلية ممكنة؟

نعم true نحل بالطرائق التحليلية ونرمز للحل بـ T

لا: نستخدم التحليل العددي

عدة خطوات

الجواب: يكون تقريبي نرمز له بـ a

مثال فيه الإمكانية غير موجودة.

$\int_{-2}^{2} \ln x \, dx$ ، $\int_{-2}^{2} e^{x} \, dx$

الإمكانية غير موجودة لأن التكامل غير معرفة عند حدود التكامل.

مثال جانبي: $\int_0^1 e^{x^2}\cos x^2(\ln x^2+1)\,dx$ إن كل من الدوال $(\ln(x^2+1))$ و $\cos x^2$ و e^{x^2} معرفة على R وجداؤها معرف على R فهو معرفة على أي مجال جزئي من R أي الإمكانية موجودة ولكن لا يوجد طرائق تحليلية ممكنة لحلها.

ملاحظة: لا يمكن أن نجزم بأن الحل الحقيقي $Q=T$ الحل التقريبي ففي بعض الحالات قد يتساوى عدد كبير من خاناتها ولكن قد يكون محدود مثال تقريبي قد نجد .....1 خانة متطابقة بالرغم من أن كل خانة ذات الترتيب 1..... غير متطابقة بينهما والمقابل في حالات خاصة يمكن أن نجد أن $Q=T$ ومنه لا نستطيع الجزم.

تنويه: غالباً لا نطرح مسألة حلها التحليلي موجود لحلها عددياً. ولكن نطرح المثال القابل للحل تحليلياً على سبيل المقارنة.

ملاحظة: نسأل $\boxed{3}$ كيف يمكن الحكم أن الخوارزمية جيدة (Q جيد).

غير احتمالية

إذا كان الحل الحقيقي T موجود نحسب $T-Q$ وقد يكون مقدار موجب أو سالب ونستطيع أن:

E: Error exact $=|T-Q|$ (الخطأ الفعلي) موجب

E صغير ← تقبل الخوارزمية تقبل Q

E كبير ← نرفض الخوارزمية

نحسب $R=\left|\frac{E}{T}\right|$ الخطأ النسبي

صغير ← تقبل الخوارزمية

كبير ← نرفض الخوارزمية

(الأهم) إذا كان T غير موجود نلاحظ مفهوم:

1. استقراء لا يتعلق بـ T.
2. حل إما من خلال برهانات وتراجعات. $E_{max} \geq E_{exact}$
3. بحل "تشبيه" E_{max}

E_{max} صغير ← تقبل الخوارزمية تقبل Q

E_{max} كبير ← نحسب $R_{max}=\frac{E_{max}}{Q}$

R_{max} صغير ← تقبل الخوارزمية تقبل Q

R_{max} كبير ← نرفض الخوارزمية

The end ..

Reem