بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة:

أ- بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (المنفصلة)

آ- توزيع برنولي

نسمي كل تجربة لها نتيجتان ؛ تجربة برنولية (ثنائية)

نسمي إحدى النتيجتين نجاحاً أو الأخرى فشلاً ونرمز لاحتمال النجاح $\boxed{p}$ واحتمال الفشل $\boxed{q=1-p}$ فنهتم بعدد النجاحات التي عددها $\boxed{n}$ ونرمز لعدد النجاحات X

مثال: تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة هي تجربة برنولية لها نتيجتين إما صورة (نجاح) أو كتابة (فشل) ووسيط هذه التجربة هو $p=\frac{1}{2}$

مثال: إذا ألقينا حجري نرد واعتبرنا نتيجة التجربة نجاحاً إذا كان مجموع الوجهين $\boxed{4}$ وفشلاً خلاف ذلك فنكون أمام تجربة برنولية وسيطها $p=\frac{3}{36}$

حالات النجاح: $\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$

تعريف: نقول عن متغير عشوائي متقطع أنه له توزيعاً برنولياً وسيطه p ونرمز لذلك بـ: $X \sim Ber(p)$

إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية

$$f_X(x)=P(X=x)=p^x \cdot q^{1-x} \quad ; \quad x\in\{0,1\}$$

$0<p<1$

$q=1-p$

خواص هذا التوزيع :

١- الدالة المولدة للعزوم :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} e^{tx} \cdot p^x \cdot q^{1-x} = e^0 \cdot p^0 q^1 + e^t p^1 \cdot q^0$$

$$\boxed{M_X(t) = q + pe^t}$$

٢- التوقع والتباين :

$$EX = M'_X(t)\Big|_{t=0} = pe^t\Big|_{t=0} = \boxed{p}$$

$$EX^2 = M''_X(t)\Big|_{t=0} = pe^t\Big|_{t=0} = \boxed{p}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p) = \boxed{p.q}$$

٣- التوزيع الحداني (الثنائي) : إذا كررنا تجربة برنولية وسيطها $\boxed{p}$ (احتمال النجاح) $\boxed{n}$ مرة حيث $\boxed{n \geq 2}$ وكانت هذه التكرارات مستقلة عن بعضها عندئذ فإن لـ X الذي يمثل عدد النجاحات التوزيع الحداني أو الثنائي بوسيطين $\boxed{p, n}$ ونرمز لذلك بـ $X \sim bin(n, p)$

- تعريف : نقول عن المتغير العشوائي X إنه له توزيعاً حدانياً (ثنائياً) إذا بالوسيطين $n \geq 2$ و $0 < p < 1$

ونعبر عن ذلك ب : $X \sim bin(n,p)$

إذا كان له دالة الكثافة الاحتمالية ا

$$f_X(x) = P(X=x) = C^n_x \, p^x \cdot q^{n-x} \quad ; \; x = 0,1,\dots,n$$

$0<p<1$

$q=1-p$

أي أن لـ X جدول الكثافة الاحتمالية التالية :

x	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n	مجموع
$f_X(x)$	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C^n_k \cdot p^k \, q^{n-k}$	$\dots$	p^n	1

خواص هذا التوزيع :

١- الدالة المولدة للعزوم

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \cdot C^n_x \, p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C^n_x \, (pe^t)^x \cdot q^{n-x}$$

$$\boxed{\overset{\text{ثنائي حد نيوتن}}{=} (pe^t+q)^n}$$

ملاحظة حول ثنائي حد نيوتن :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

٢- التوقع والتباين :

$$EX = M'_X(t)\Big|_{t=0} = n(pe^t+q)^{n-1} \cdot pe^t \Big|_{t=0}$$

$$\boxed{EX = n.p}$$

Subject: / /

$$EX^2 = M''_X(t)\Big|_{t=0} = np(pe^t+q)^{n-1}\cdot e^t + n(n-1)pe^t(pe^t+q)^{n-2}\cdot pe^t\Big|_{t=0}$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

$$\boxed{EX^2 = np + n^2p^2 - np^2}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$
$$= np - np^2 = np(1-p)$$

$$\boxed{Var(X) = n.p.q}$$

مبرهنة: إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي تملك كل منها توزيع برنولي بوسيط P فإن المتغير العشوائي $\boxed{Y = \sum_{i=1}^{n} X_i}$ له التوزيع الحداني الثنائي بوسيطين n و P

البرهان: بما أن المتغيرات مستقلة فإنه حسب مبرهنة سابقة

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} (pe^t+q)$$

$$\boxed{M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (pe^t+q)^n}$$

وهي الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الحداني بوسيطين n و P

وهكذا نلاحظ أن كل متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p هو مجموع لـ n من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها التوزيع البرنولي بوسيط p

تمرين: إذا كان احتمال أن يصيب رام الهدف هو 0,8 فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 مرات ~~ونرمز~~ ورمزنا لـ X لعدد مرات اصابة الهدف ، المطلوب:

أ- اكتب دالة احتمال المتغير العشوائي X

ب- احسب احتمال اصابة الهدف مرة واحدة فقط

ج- احسب احتمال اصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر

د- احسب احتمال اصابة الهدف مرتين على الأقل

هـ- احسب احتمال اصابة الهدف

و- احسب القيمة المتوقعة لاصابة الهدف والانحراف المعياري

الحل: أ- التسديد نحو الهدف هو تجربة برنولية لها نتيجتان إما النجاح (أصابة الهدف) أو الفشل (عدم اصابة الهدف) ووسيطها $P=0.8$ والتسديد نحو الهدف 5 مرات هو تكرار التجربة البرنولية 5 مرات وبالتالي يكون لـ X (عدد مرات اصابة الهدف).

التوزيع الحداني بوسيطين $n=5$ و $P=0.8$

فيكون لـ X دالة الكتلة :

$$f_X(x) = P(X=x) = C^n_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$
$$= C^5_x \cdot p^x \cdot q^{5-x}$$

$$\boxed{f_X(x) = C^5_x \cdot (0.8)^x \cdot (0.2)^{5-x} \quad x = 0,1,2,3,4,5}$$

ب) $f_X(x) = P(X=x) = C^5_1 \, (0.8)^1 \cdot (0.2)^4$

$= 5 \times 0.8 \times 0.0016 = 0.0064$

ج) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= C^5_0 \, (0.8)^0 \, (0.2)^5 + 0.0064$

$= 0.00032 + 0.0016 = 0.00672$

د) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$= 1 - 0.00672 = 0.99328$

هـ) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1)$

$= 1 - P(X=0)$

$= 1 - 0.00032$

$P(X \geq 1) = 0.99968$

و . التوقع : $E(X) = n.P = 5 \times 0.8 = 4$

. التباين : $Var(X) = n.P.q = (5)(0.8)(0.2) = 0.8$

. الانحراف المعياري : $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.8} \simeq 0.9$

تمرين: تنتج إحدى شركات لقاحاً لمعالجة السعال فإذا فرضنا أن نسبة اللقاحات الفاسدة في الانتاج معروفة سلفاً بأنها 0.05 وبالتالي نسبة اللقاحات الجيدة 0.95 وإذا اخترنا 15 لقاحاً من الانتاج بطريقة عشوائية فما الاحتمال:

1) أن يكون 3 لقاحات فاسدة
2) " " على الاكثر 3 لقاحات فاسدة
3) احسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لاختيار اللقاح الفاسد

الحل: ليكن X متغير يدل على عدد اللقاحات الفاسدة فيكون احتمال ظهور اللقاح الفاسد (احتمال النجاح) $P = 0.05$

ويكون عدد مرات ظهور اللقاح الفاسد هو $n = 15$

و $q = 1 - P = 0.95$ والتجربة مدانية (ثنائية) فيكون لـ X دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = P(X = x) = C_x^k \, p^x q^{k-x} \qquad x = 0, 1, \dots, n$$

$$= C_x^{15} (0,05)^x \cdot (0.95)^{n-x}$$

أ) $f_X(3) = P(X = x) = C_3^{15} (0.05)^3 (0.95)^{12}$

$$= (455)(0.000125)(0.5404)$$

$$\simeq 0.031$$

ب) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= C_0^{15}(0.05)^0(0.95)^{15} + C_1^{15}(0.05)^1(0.95)^{14}$$
$$+ C_2^{13}(0.05)^2(0.95)^{13} + C_3^{15}(0.05)^3(0.95)^{12}$$

$$\Rightarrow P(x \leq 3) = 0.463 + 0.366 + 0.135 + 0.031$$
$$\boxed{P(x \leq 3) = 0.995}$$

ج) $EX = nP = (15)(0.05) = \boxed{0.75}$

$Var(X) = n.P.q = (15)(0.05)(0.95)$
$= \boxed{0.7125}$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{n.P.q} \approx \boxed{0.84}$$

تمرين: يجري تفتيش الشحنات الكبيرة من البضاعة القادمة إلى مؤسسة صناعية بطريقة العينة لنفترض أن هذه الطريقة تتلخص باختيار ١٥ قطعة عشوائية، ثم اختبارها الواحدة تلو الأخرى ورفض البضاعة إذا كان فيها قطعتين مرفوضتين أو أكثر. فإذا احتوت بضاعة على 0.05 من القطع المرفوضة فما هو احتمال:

أ) قبول البضاعة

ب) رفض //

الحل: ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد القطع المرفوضة فتكون مجموعة قيمه $\{0,1,2,\ldots,15\}$ واحتمال الحصول على قطعة مرفوضة (النجاح) $\boxed{P=0.05}$ و $\boxed{q=0.95}$

و $\boxed{n=15}$

والتجربة ثنائية (ثنائية) ويكون لـ X دالة الكثافة

$$f_X(x) = P(X=x) = C_x^k \, p^x \cdot q^{k-x} \quad ; \quad x=0,\dots,n$$

$$= C_x^{15} (0.05)^x (0.95)^{15-x} \quad ; \quad x = 0,\dots,15$$

أ) $P(\text{قبول الشحنة}) = P(X<2) = P(X=0)+P(X=1)$

$$= C_0^{15}(0.05)^0(0.95)^{15} + C_1^{15}(0.05)^1(0.95)^{14}$$

$$= 0.463 + 0.366 \simeq \boxed{0.829}$$

ب) $P(\text{رفض الشحنة}) = 1 - P(\text{قبول الشحنة})$

$$= 1 - 0.829 = \boxed{0.171}$$

ملاحظة: إذا كان لـ X التوزيع الحداني أي $X \sim bin(n,p)$ أي أن

$$f_X(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x} \quad ; \quad x = 0,1,\dots,n$$
$$q = 1-p$$

فإن القيمة الأكثر احتمالاً من بين قيمه هي العدد الصحيح الواقع داخل المجال

$$\underbrace{[np - q \; ; \; np + p = (n+1)p]}_{\text{طول المجال} = 1 = q+p}$$

تمرين: احتمال كشف جهاز رادار لطائرة معادية هو 0.9
إذا كان لدينا خمسة أجهزة رادار تعمل مستقلة عن بعضها البعض، المطلوب:

أ) احسب احتمال ظهور طائرة معادية على أربع شاشات منها

ب) احسب احتمال اكتشاف طائرة معادية في سمائنا

ج) احسب القيمة الأكثر احتمالاً لعدد أجهزة الرادار التي ستكشف الهدف ثم احسب قيمة الاحتمال عند هذه القيمة!

الحل: ليكن X المتغير الدال على عدد أجهزة الرادار التي ستكشف الهدف
تكون مجموعة قيمه $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
ويكون لـ X التوزيع الحداني بالوسيطين $n = 5$ ، $P = 0.9$
أي أن:

$$f_X(x) = C^n_x \, p^x . q^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, \ldots, n$$
$$= C^5_x (0.9)^x (0.1)^{5-x} \quad ; \quad x = 0, 1, \ldots, 5$$

أ) $f_X(4) = P(X = 4) = C^5_4 (0.9)^4 (0.1)^1$
$\simeq 0.33$

ب) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$
$= 1 - C^5_0 (0.9)^0 (0.1)^5 = 1 - 0.00001$
$= 0.99999$

ج) نحسب طرفي المجال $[\, np-q \,,\, np+p \,]$

$$np-q=(5)(0.9)-0.1=4.4$$

$$np+p=(5)(0.9)+0.9=5.1$$

فتكون القيمة الاكثر احتمالا لاجهزة الرادار تقع في المجال $[4.4 \,,\, 5.4]$ وهي العدد الصحيح $X=5$

$$P(X=5)=C^5_5(0.9)^5(0.1)^0 \approx \boxed{0.591}$$

تمرين: كم مرة يجب القاء قطعة نقود غير متزنة ، احتمال ظهور الصورة $\boxed{0.4}$ حتى نحصل على صورة باحتمال أكبر من $\boxed{0.9}$

الحل: تجربة برنولية لها نتيجتان صورة (نجاح) أو كتابة (فشل) نكررها n مرة للحصول على صورة ، فإذا رمزنا بـ X المتغير الدال على عدد مرات ظهور الصورة فيكون لـ X التوزيع الحداني أي أن $bin(n, 0.4)$

$$f_X(x)=C^n_x(0.4)^x\cdot(0.6)^{n-x} \quad ; \; x=0,\dots,n$$

إذن المطلوب تحديد قيمة n التي تحقق

$$P(X\geq 1) > 0.9$$

$$1-P(X<1) > 0.9$$

$$1-P(X=0) > 0.9$$

$$1-0.9 > P(X=0)$$

$$f_X(0) < 0.1$$

$$\Rightarrow C_0^n (0.4)^0 (0.6)^n < 0.1$$

$$\Rightarrow (0.6)^n < 0.1$$

ln $$\Rightarrow n \ln(0.6) < \ln(0.1)$$

من خواص الـ ln ينزل الأس

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.6)} \simeq 4.6 \Rightarrow n \geq 5$$

تمرين: يتضمن امتحان 100 سؤال من النوع متعدد الخيارات ولكل سؤال أربعة أجوبة مقترحة ، واحد منها فقط هو الجواب الصحيح .

أ). إذا خصص لكل سؤال درجة واحدة فما هي الدرجة المتوقعة لطالب يجيب معتمداً على الحزر أي بالتخمين.

ب). إذا خصص لكل إجابة خاطئة (-1) ، فكم يجب أن نخصص للإجابة الصحيحة حتى تكون الدرجة المتوقعة لطالب يجيب بالحزر صفراً .

الحل: أ) إذا رمزنا بـ X لعدد الإجابات الصحيحة يكون له التوزيع الحداني بوسيطين .

$n = 100$ ، $p = \frac{1}{4}$

وبالتالي تكون الدرجة المتوقعة

$$EX = np = (100)\left(\frac{1}{4}\right) = 25$$ درجة

ب) إذا خصصنا للإجابة الصحيحة الدرجة $\boxed{a}$

وفرضنا أن X_i تمثل درجة الطالب في السؤال i

حيث $i = 1, 2, \ldots, 100$ فنجد أن

X_i (برنولي)	-1	a
$f_{X_i}(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

فتكون درجة الطالب بالامتحان $\sum_{i=1}^{n} X_i$

والدرجة المتوقعة هي:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n=100} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n=100} \sum_{x} x f_x(x).$$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} \left((-1)\left(\frac{3}{4}\right) + (a)\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} \left[\frac{-3+a}{4}\right] = 100\left(\frac{-3+a}{4}\right)$$

$$= 25(-3+a) = 0 \quad \text{(فرضاً)}$$

$$\Rightarrow -3 + a = 0 \quad \Rightarrow a = 3$$

درجات

مبرهنة
تقبل دونا برهان

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة بحيث يكون لكل X_i التوزيع الحدّي بوسيطين n_i و P حيث $i = 1, \dots, N$ عندئذ يكون

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim bin\left(\sum_{i=1}^{N} n_i , P \right)$$

٢- التوزيع البواسوني: إذا كان X يتبع التوزيع البواسوني فإن X يمثل عدد الأحداث المرغوبة في الملحوظة خلال وحدة قياس معينة ، زمناً أو مسافة أو حجماً أو مساحة

أمثلة: العدد العشوائي للسيارات الصغيرة التي تصل إلى محطة وقود خلال ساعة محددة في كل يوم

- العدد العشوائي للمكالمات الهاتفية التي تصل إلى مقسم ما خلال الربع ساعة الأولى من ساعة محددة.

- العدد العشوائي لحوادث السير (المرور) في مدينة معينة خلال يوم ماطر.

- العدد العشوائي للولادات التي تحصل خلال الأسبوع الأول من كل شهر

تعريف: نقول عن متغير عشوائي X بأن له توزيعاً بواسونياً إذا كان له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda)^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

أي أن له جدول الكثافة التالية

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$
$f_X(x)$	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\cdot\lambda$	$\cdots$	$e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	$\cdots$

نلاحظ $f_X(x)$ تحقق الشرطين:

1- $f_X(x) \geq 0$

2) $$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = \sum_x x\, f_X(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty} x\,\frac{\lambda\,\lambda^{x-1}}{x(x-1)!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{\underbrace{(x-1)}_{=y}!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\lambda^y}{y!}}_{=e^{+\lambda}} = \lambda\,\underbrace{e^{-\lambda}\cdot e^{+\lambda}}_{=1} = \lambda$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)\, e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(\underbrace{x-2}_{y})!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{y!}}_{e^{+\lambda}}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{+\lambda} = \boxed{\lambda^2}$$

* $Var(X) = E(X(X-1)) + EX - (EX)^2$

$$= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2$$

$\rightarrow \boxed{Var(X) = \lambda}$

الدالة المولدة للعزوم

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{(-\lambda)} \cdot e^{(e^t \cdot \lambda)}$$

$$= \boxed{e^{\lambda(e^t - 1)}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ملاحظة: إن وسيط التوزيع البواسوني لمتغير عشوائي X يمثل المتوسط الحسابي لقيم X أي أن λ تمثل معدل عدد الحادثات الواقعة في وحدة القياس المعتبرة.

تمرين: إذا كان معدل عدد الولادات في مشفى دار التوليد هو ثلاث ولادات كل ساعة والمطلوب:

1) ما احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة خلال ساعة معينة

2) ما احتمال " " " أربع ولادات على الأكثر " "

الحل: نفرض X يدل على عدد الولادات كل ساعة فإن X يتبع التوزيع البواسوني بوسيط: $\boxed{\lambda=3}$

$X \sim Poiss(\lambda = 3)$

أي أن له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-3} \cdot \frac{3^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, \ldots$$

1) $P(X=1) = f_X(1) = e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} = 3e^{-3} = \boxed{0.149}$

2) $P(X \le 4) = \sum_{k=0}^{4} P(X=k) = e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3} + \frac{27}{6}e^{-3} + \frac{81}{24}e^{-3}$

$= 0.815$

تقريب التوزيع الثنائي إلى توزيع بواسون:

مبرهنة: نفرض أن X متغير عشوائي له التوزيع الحدائي بوسيطين n و p فإذا كانت n كبيرة و p صغيرة بحيث يبقى $\lambda = n.p$ ثابتاً موجباً فإن X يتوزع تقريباً وفق التوزيع البواسوني بوسيط: $\lambda = n.p$

$$X \sim bin(n, p) \cong pois(\lambda = np)$$

ملاحظة على المبرهنة: تفيد المبرهنة السابقة بأن الاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال البواسونية مساوية تقريباً الاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال الحدانية مهما أجل قيم n الكبيرة و p الصغيرة ويكون التقريب مقبولاً إذا حقق الشرط $\boxed{np < 5}$

مثال وتمرين: يصيب مرض نادر حديثي الولادة بنسبة 0.003 فإذا كان هناك 120 ولادة حديثة في مستشفى معينة خلال أسبوع فما احتمال أن يكون من بينهم ثلاثة أطفال مصابين بهذا المرض؟ وما احتمال أن يصاب طفل واحد على الأقل بهذا المرض؟

الحل: التجربة ثنائية (مصاب، غير مصاب) متكررة تكرار مستقل $n=120$ وبالتالي التجربة ستكون حدانية (ثنائية) بوسيطين $n=120$ و $P=0.003$ وبما أن n كبيرة و P صغيرة $nP=0.36<5$ فيمكن تقريب هذا التوزيع إلى التوزيع البواسوني بوسيط $\lambda=n.P=0.36$

أي أن $X \sim Pois(0.36=\lambda)$ يدل على الإصابات بالمرض تتكون بدالة الكثافة:

$$f_X(x)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-0.36}\cdot\frac{(0.36)^x}{x!} \qquad x=0,\dots,120$$

$$\Rightarrow P(X=x)=f_X(3)=\frac{(0.36)^3 e^{-0.36}}{3!}=0.005$$

واحتمال أن يصاب واحد منهم على الأقل هو:

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$$

$$=1-e^{-0.36}\cdot\frac{(0.36)^0}{0!}$$

$$=1-0.698=0.302$$

أما بالنسبة للحداني

$$C_x^n P^x\cdot q^{n-x}=C_x^{100}(0.003)^x(0.997)^{120-x}$$

لكن صعب الحسابات هنا في هذه المسألة بالنسبة للحداني.

تمرين: تتلقى مقسم هاتف كلية العلوم بجامعة دمشق مكالمات بمعدل 15 مكالمة وسطياً بالساعة لنفرض أن عدد مكالمات خلال فترة زمنية تتبع توزيع بواسون.

والمطلوب حساب:

أ) تلقي ثلاث مكالمات خلال دقيقتين

ب) " مكالمتين على الأكثر " "

الحل: بفرض أن X تمثل عدد المكالمات خلال دقيقتين فيكون لـ X توزيع بواسون بالوسيط

$$\lambda = n.p = (15)\left(\frac{2}{60}\right) = \frac{30}{60} = 0.5$$

وله دالة الكثافة:

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-0.5} \cdot \frac{(0.5)^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, \dots$$

أ) $$P(X=3) = e^{-0.5} \cdot \frac{(0.5)^3}{3!} = 0.0126$$

ب) $$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= e^{-0.5} + e^{-0.5}(0.5) + e^{-0.5} \cdot \frac{0.25}{2!}$$

$$= 0.9856$$