تطبيقات نظرية الفئات.

د. حمزة الحاكمي.

تعريف الفئة:

نقول أنه توجد لدينا فئة $\mathcal{L}$ إذا وجد:

① صف أشياء نرمز له بـ $ob(\mathcal{L})$ وعناصره نرمز لها بأحرف كبيرة $A,B,\dots \in ob(\mathcal{L})$

② صف مورفيزمات $Mor(\mathcal{L})$ ويتألف من الأسهم $A \to B$ حيث $A,B \in ob(\mathcal{L})$

يحققان الشروط التالية:

I. $\forall A,B \in ob(\mathcal{L}) : \mathcal{L}(A,B) = Hom(A,B)$ تشكل مجموعة

حيث $\mathcal{L}(A,B)$ هي مجموعة الأسهم من A إلى B، كما أنه عدم وجود أسهم بين A و B يعني أنه $\mathcal{L}(A,B) = \emptyset$ وهي مجموعة أي الشرط محقق.

II. لأجل: $\forall A,B,D \in ob(\mathcal{L})$ أشياء يوجد تطبيق:

$$\mu : \mathcal{L}(A,B) \times \mathcal{L}(B,D) \longrightarrow \mathcal{L}(A,D)$$

يحقق أنه من أجل $\forall u : A \to B ,\ v : B \to D$

فإنه تركيب المورفيزمات محقق أي أنه:

$$\mu(u,v) = v.u$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v.u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ & D \end{tikzcd}$$

III. إن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية أي:

$$\forall\ A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} D \xrightarrow{w} K$$

فإنه:

$$(w.v).u = w.(v.u)$$

ملاحظة هامة جداً:

يوجد فرق كبير بين $w.(v.u)$ وبين $w(v.u)$ لأن الأولى تركيب مورفيزمات بينما الثانية تعني قيمة w عند القيمة $v.u$ وهذا يعني أنه مدخلات التابع w هي مورفيزمات وهو شيء خاطئ.

IV. شرط وجود المحايد من اليمين ومن اليسار أي: $\forall A \in ob(\mathcal{L}), \exists I_A : A \to A$

$\forall v : D \to A \ ; \ I_A.v = v$

$\forall u : A \to B \ ; \ u.I_A = u$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I_A"] & A \arrow[d, "u"] \\ D \arrow[u, "v"] & B \end{tikzcd}$$

(V) لأجل $(A,B)\neq(A',B')$ ؛ $\forall\, A,B,A',B' \in ob(\mathcal{L})$

$$\mathcal{L}(A,B)\cap\mathcal{L}(A',B')=\phi$$

[1] **نتيجة:**

لتكن $\mathcal{L}$ فئة ، عندئذٍ لأجل كل $A\in ob(\mathcal{L})$ فإنه I_A وحيد.

الإثبات:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "I'_A I_A"'] & A \arrow[d, "I'_A"] \\ & A \end{tikzcd}$$

لنفرض وجود مورفيزمين مطابقين «الحيادي» I_A و I'_A فإنه:

كونه I'_A حيادي فإنه: $I_A\cdot I'_A = I_A$

ومن كونه I_A حيادي فإنه: $I_A\cdot I'_A = I'_A$

وبما أنه I_A و I'_A لهما نفس المنطلق والمستقر فإنه $I'_A = I_A$ ومنه المطابق وحيد.

أمثلة:

① فئة المجموعات: أشياؤها المجموعات ومورفيزماتها التطبيقات ورمزها set's

«أي أنه الرمز set's بديل عن $\mathcal{L}$ في هذه الفئة»

② فئة الزمر: أشياؤها الزمر ومورفيزماتها هي التشاكلات الزمرية.

الفئة الجزئية:

لتكن $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ فئتين ، نقول أنه $\mathcal{L}'$ فئة جزئية من $\mathcal{L}$ إذا حققت:

(I) $ob(\mathcal{L}')\overset{\text{تجاوزاً}}{\subset} ob(\mathcal{L})$ أي أنه كل شيء من أشياء الفئة $\mathcal{L}'$ هو شيء من أشياء الفئة $\mathcal{L}$

(II) المورفيزمات في $\mathcal{L}'$ هي جزء من مورفيزمات $\mathcal{L}$ «أي تجاوزاً: $Mor(\mathcal{L}')\subset Mor(\mathcal{L})$»

(III) عملية تركيب المورفيزمات المعرفة على $\mathcal{L}$ هي نفسها عملية تركيب المورفيزمات المعرفة على $\mathcal{L}$.

(IV) المورفيزمات المطابقة في $\mathcal{L}'$ هي ذاتها المورفيزمات المطابقة في $\mathcal{L}$.

مثال:

فئة الزمر التبديلية تشكل فئة جزئية من فئة الزمر.

الفئة الثنوية:

لتكن $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ فئتين ، نقول إن الفئة $\mathcal{L}'$ هي فئة ثنوية للفئة $\mathcal{L}$ إذا حققت:

① صف الاشياء للفئتين ذاته : $ob(\mathcal{L}) = ob(\mathcal{L}')$.

② أياً كانت $A,B \in ob(\mathcal{L})$ فإنه : $\mathcal{L}(A,B) = \mathcal{L}'(B,A)$

- نرمز للفئة الثنوية للفئة $\mathcal{L}$ بالشكل $\mathcal{L}^{\circ}$.
- وفقاً لتعريف الفئة الثنوية يمكن استنتاج مايلي بالنسبة للفئة $\mathcal{L}$ فإنه: $(\mathcal{L}^{\circ})^{\circ} = \mathcal{L}$.

نتيجة:

ينتج من تعريف الفئة الثنوية أنه : لكل فئة فئة ثنوية .

تعريف:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ عندئذٍ:

➤ نقول عن المورفيزم u أنه مونومورفيزم إذا كانه لأجل كل شيء من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ (أي $\forall X \in ob(\mathcal{L})$) فإنه التطبيق:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "u.f"'] & \end{tikzcd}$$

$$\alpha : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$

المعرف بالشكل: $\alpha(f) = u.f$

وذلك $\forall f \in \mathcal{L}(X,A)$ هو تطبيق متباين «α متباين».

➤ نقول عن المورفيزم u أنه ابيمورفيزم إذا كانه لأجل كل شيء من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ (أي $\forall X \in ob(\mathcal{L})$) فإنه التطبيق:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g.u"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\beta : \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$$

المعرف بالشكل: $\beta(g) = g.u$

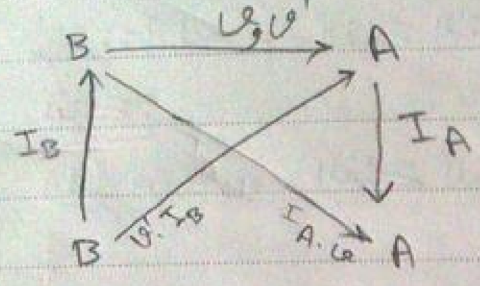
وذلك $\forall g \in \mathcal{L}(B,X)$ هو تطبيق متباين «β هو المتباين»

➤ نقول عن المورفيزم انه ايزومورفيزم إذا وجد مورفيزم آخر $v : B \longrightarrow A$ بحيث ، $v.u = I_A$ ، $u.v = I_B$

2. ملاحظة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$، عندئذٍ:
إذا كان u ايزومورفيزم فإن المورفيزم $v: B \to A$ الذي لأجله يتحقق:
$u.v = I_B$ و $v.u = I_A$ هو ايزومورفيزم وهو وحيد.

الاثبات:



لنفرض أنه $v': B \to A$ يحقق: $v'.u = I_A$ و $u.v' = I_B$ ، إذن:

$$v = I_A . v = (v'.u).v =$$
$$= v'.(u.v) = v'.I_B = v'$$

ومنه v هو وحيد.
أما عن كونه v ايزومورفيزم فهو واضح وذلك لأنه يحقق التعريف حيث المورفيزم الآخر المقابل له هو u.

3. مبرهنة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذٍ:
(1) تركيب مونومورفيزمين هو مونومورفيزم.
(2) إذا كان $v,u \in Mor(\mathcal{L})$ وكان $v.u$ مونومورفيزم فإن u هو مونومورفيزم
(3) $\forall A \in ob(\mathcal{L})$. فإن المورفيزم المطابق I_A هو مونومورفيزم.

الاثبات:

(1) لنفرض أنه: $v: B \to D$ و $u: A \to B$ مونومورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ عندئذٍ التطبيق: $\alpha: \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$
هو تطبيق متباين. $\forall f \in \mathcal{L}(X,A): \alpha(f) = u.f$
وكذلك التطبيق: $\beta: \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$
هو تطبيق متباين $\forall g \in \mathcal{L}(X,B)\ \beta(g) = v.g$
وذلك لأجل $\forall X \in ob(\mathcal{L})$.
لنأخذ المورفيزم المشكل من تركيب المونومورفيزمين u و v أي:
$v.u: A \to D$. ولنأخذ التطبيق، $\gamma: \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$
$\forall f \in \mathcal{L}(X,A): \gamma(f) = (v.u).f$

حتى نثبت أن $v.u$ هو مونومورفيزم يجب أن نثبت أن γ متباين أي :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X,A) \;:\; \gamma(f_1) = \gamma(f_2) \Rightarrow (v.u).f_1 = (v.u).f_2$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1{,}f_2"] \arrow[d, "\gamma(f_1)\,\gamma(f_2)"'] \arrow[dr, "u.f_1\,,\,u.f_2"] & A \arrow[d, "u"] \\ D & B \arrow[l, "v"] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow v.(u.f_1) = v.(u.f_2)$$

إن: $u.f_1 \,,\, u.f_2 \in \mathcal{L}(X,B)$

ومنه فإن: $\beta(u.f_1) = \beta(u.f_2)$

إن β متباين تعريفاً ومنه: $u.f_1 = u.f_2$

إن $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ ومنه: $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$

إن α متباين تعريفاً ومنه: $f_1 = f_2$ ومنه γ متباين ومنه $v.u$ هو مونومورفيزم .

② لنفرض أن $u : A \to B \,,\, v : B \to D$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ ولنأخذ التطبيقين:

$$\alpha : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B) \quad / \quad \beta : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X,A) : \alpha(f) = u.f \quad / \quad \forall g \in \mathcal{L}(X,B) : \beta(g) = v.g$$

ولنعرف المونومورفيزم المكون من تركيب u مع v أي : $v.u : A \to B$ أي أن

التطبيق التالي: $\gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$

هو تطبيق متباين: $\forall f \in \mathcal{L}(X,A) \;:\; \gamma(f) = (v.u).f$

ولنثبت أن u هو مونومورفيزم أي لنثبت أن التطبيق α متباين .

لتكن $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ حيث : $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ ومنه فإن: $u.f_1 = u.f_2$

حسب خاصية تركيب المورفيزمات فإن: $v.(u.f_1) = v.(u.f_2)$ ،

حسب خاصية التجميع للمورفيزمات فإن : $(v.u)f_1 = (v.u)f_2$ ،

بما أن $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ فإن: $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$ ، بما أن γ متباين فإن ، $f_1 = f_2$

ومنه فإن α متباين « لأننا اثبتنا أن: $(\alpha(f_1) = \alpha(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2)$ » ومنه u مونومورفيزم .

③ أياً تكن A من أغراض الفئة $\mathcal{L}$ « $\forall A \in ob(\mathcal{L})$ » فإن المورفيزم المطابق على A :

$I_A : A \longrightarrow A$ موجود ، لنأخذ التطبيق: $\delta : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$

$$\forall X \in ob(\mathcal{L}) \qquad \forall f \in \mathcal{L}(X,A) : \delta(f) = I_A f$$

ولنثبت على أنه متباين ، لنأخذ: $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ حيث $\delta(f_1) = \delta(f_2)$ ومنه :

$$\delta\; I_A . f_1 = I_A . f_2 \xrightarrow{I_A \text{ هو المطابقة}} f_1 = f_2$$

ومنه δ متباين ومنه I_A مونومورفيزم وذلك $\forall A \in ob(\mathcal{L})$.

انتهت المحاضرة الأولى .