2016/3/16

عصور حديث

طرائق العد:

طرائق العد العامة:

إن معظم مسائل العد تؤول إلى أحد المسائل:

1. مقارنة مجموعة بمجموعة عددها معلوم. حسب مبدأ تقابلي
2. حساب عدد عناصر مجموعة ناتجة عن اجتماع عدد من المجموعات
3. حساب " " الجداء الديكارتي لعدة مجموعات.

$|A|+|B|-|A\cap B|$

هي ثنائيات مركبة أولى من مجموعة أول ومركبة ثانية من مجموعة ثانية.

قدرة مجموعة: عدد عناصر المجموعة المنتهية A ويرمز لها بـ $|A|$

أو $\mathrm{Crad}\, A$

مبدأ العد الأول:

إذا وجد تقابل (متباين وغامر) $f: A \longrightarrow B$ $\Leftarrow |A| = |B|$

مبدأ العد الثاني:

إذا كان A_1 و A_2 و ... A_n مجموعات منفصلة مثنى مثنى أي $A_i \cap A_j = \emptyset$ فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

أما لو غير منفصلة مثنى مثنى يجب طرح تقاطعها.

بشكل عام: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

بينما لو كان لدينا 3 مجموعات غير منفصلة:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

A 18

Scanned by CamScanner

المبدأ العد الثالث: إذا كانت $A_1, \dots, A_n$ مجموعات منتهية

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| \quad *$$

أمثلة:

- إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات متتالية ما هي عدد نتائج ممكنة.

$$|A| = 2^3 = 8$$

- لنفرض إننا نريد تصنيف مجموعة من الأشخاص وفق طالنوع المدينة وطبعهم ولنرمز (إذا علمنا أن هناك 20 مرتبة)

تعود للمبدأ العد الثالث: $2 \times 2 \times 20 = 80$ = عدد حالات ممكنة

- ليكن q عدداً طبيعياً قواسمه الأولية $d_1, d_2, \dots, d_k$

فإن: $q = d_1^{m_1} \cdot d_2^{m_2} \cdot \dots \cdot d_k^{m_k}$

فما هو قواسم العدد q

$9 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad 7^0$

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ (4) (3) (2) 7^1

$5^0, 5^1, 5^2$

$4 \times 3 \times 2 = 24$ فقواسمه

قواسم (q):

$$(m_1+1)(m_2+1) \cdot \dots \cdot (m_k+1)$$

العينات المرتبة: إذا كانت A مجموعة منتهية غير خالية وكان r عدد طبيعي غير معدوم كل عنصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ من A^r تدعى عينة مرتبة حجمها r مأخوذة من مجموعة

جداء ديكارتي A مرة r

$$|A^r| = (|A|)^r \quad . A$$

مجموعة — عدد

هناك حالتين: بفرض $|A| = n$ $\quad n = 10$

$|A|^r = n^r$

1) أن نعيد إلى A كل عنصر أضدناه

2) أن لا نعيد A العنصر مأخوذ

حينها 3

$10 \cdot 9 \cdot 8$

$(10-3+1)$

Scanned by CamScanner

$$|A|(|A|-1)\cdots(|A|-r+1)$$
$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

التبديلات:

لتكن مجموعة العناصر السابقة بترتيب n شيئاً مختلفاً
في r مكان ويرمز لها بـ $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثلاً إذا كان لدينا مجموعة من أحرف ولريد تكوين كلمة هناك نوع لترتيب.

التوافيق: إذا كان ترتيب العناصر السابقة لا يهم فإننا نستخدم التوافيق.

تعريف رياضي: إذا كانت مجموعة A عدد عناصرها n وأردنا مجموعة جزئية منها مجموعة عناصرها r فنقول عن هذا أنه توافيق r مأخوذ من A ويرمز له بـ $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!(r)!}$$

في لعبة الورق هناك 52 ورقة مراد تقسيمها على أشخاص بحيث شخص يأخذ 13 ورقة لكن ليس مهم ترتيب الورق فكم طريقة يمكن ترتيب؟ $C(52,13) = \frac{52!}{39!13!}$

ملاحظات: 1) $P_0^n = 1$ و $0! = 1$

2) $C(n,n-1) = n$ و $C(n,1) = n$ و $C(n,n) = 1$ و $C(n,0) = 1$

3) $C(n,r) = C(n,n-r)$

4) قانون الكرخي $C(n+1,r) = C(n,r) + C(n,r-1)$
يستخدم لبرهان متطابقات التوافيق

Scanned by CamScanner

5) إذا كان A و B عددين حقيقيين فإن مفكوك نيوتن:

$$(A+B)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} A^{n-r} \cdot B^r$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$i=0 \quad i=1 \quad i=2=n$

تمرين: برهن أن:

1. $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

2. $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$

3. $2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots +$ { إذا كان n زوجي: $\binom{n}{n}$ ، إذا كان n فردي: $\binom{n}{n-1}$ }

الحل: 1) نلاحظ في مفكوك نيوتن بالاستبدال $A=1$ و $B=1$ نحصل على:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} \cdot 1^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot 1^n$$

$$= 1^n \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$$

$$\Rightarrow = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \quad \text{---} (1)$$

2) في مفكوك نيوتن بالاستبدال $A=1$ و $B=-1$ نحصل على

$$0 = (1-1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (1)^{n-r} \cdot (-1)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^r$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \quad \text{(2)}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$0 + 2^n = 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots + \begin{cases} 2\binom{n}{n} & n \text{ زوجي} \\ 2\binom{n}{n-1} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

وبالقسمة على 2 نجد:

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \begin{cases} \binom{n}{n} & n \text{ زوجي} \\ \binom{n}{n-1} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner