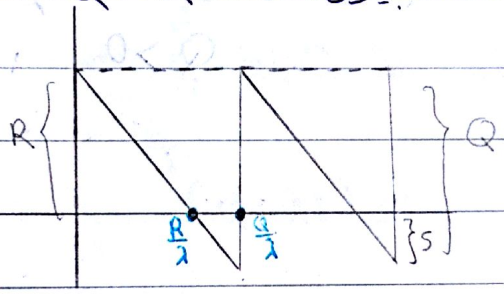
المحاضرة الحادية عشرة   نمذجة رياضية   2016/4/24

النموذج السكوني مع عجز ولمادة واحدة :

يستخدم هذا النموذج لتخزين بعض المواد القابلة للعطب أو الفساد (مثل الاسمنت، الحليب...)
يحدث العجز في المخزون عندما يكون حجم المخزون المتوفر من بداية الدوره التخزينية أقل من حجم الطلب على المادة المخزنة خلال تلك الدورة.

لذلك لمعالجة هذا النموذج نضيف إلى فرضيات النموذج السكوني بدون عجز فرضية جديدة هي أن مقدار العجز المسموح به من كل دوره تخزينية يساوي مقداراً ثابتاً S وإن تكلفة العجز تبلغ P لكل واحدة من الطلب غير المحقق خلال واحدة الزمن.
وهي تشمل غرامات التأخير وفقدان ثقة الزبائن وغير ذلك.

نرمز لحجم المخزون المتوفر من بداية الدوره التخزينية بالرمز R.
ونرمز لحجم الطلبية التي ترد إلى المستودع من نهاية كل دورة بالرمز Q
حيث أن $Q > R$
ومقدار العجز خلال كل دورة بالرمز S وعندها يكون : $S = Q - R$



هذا الشكل يوضح حركة حجم المخزون من المستودع خلال كل دورة تخزينية.

بفرض أن λ هي كالسابق تمثل معدل الطلب على المادة من واحدة الزمن فإننا هنا نلاحظ أن حجم المخزون المتوفر r مرتبط بالزمن بواسطة العلاقة: $r = R - \lambda t$
وإن مدة نفاذ المخزون تساوي $\frac{R}{\lambda}$
ومدة الدورة التخزينية تساوي $\frac{Q}{\lambda}$ وهي أكبر من $\frac{R}{\lambda}$

وبذلك نجزء المجال $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ إلى مجالين جزئيين الأول $[0, \frac{R}{\lambda}]$ والثاني $]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}]$
حيث أن الفترة $[0, \frac{R}{\lambda}]$ هي فترة العمل
أما الفترة $]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}]$ فهي فترة العجز
وحساب التكاليف على الفترة الأولى تكون كما في النموذج السابق (المحاضرة السابقة).
أي النموذج بدون عجز
أما تكاليف التخزين خلال الفترة من $]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}]$

فنحتاج إلى حسابات جديدة وبصورة عامة فإن إجمالي التكاليف

$$Tc(R,Q) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

حيث: $C_1 = K$ من الفرضيات.

$C_2 = CQ$ من الفرضيات.

$C_3 = \frac{hR^2}{2\lambda}$ ← من النموذج الساكوني بدون عجز نعلم أن تكلفة العجز C_3 تساوي هذا المقدار

$$C_4 = P\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}}(R-\lambda t)\,dt = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

وعليه فإن:

$$Tc(R,Q) = k + CQ + \frac{hR^2}{2\lambda} + \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

نقسم على مدة الدورة التخزينية $\frac{Q}{\lambda}$

$$C(Q,R) = \frac{\lambda k}{Q} + \lambda C + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

وعليه يصبح النموذج الرياضي:

أوجد القيمة الأصغرية للتابع $C(Q,R)$ ضمن القيود:

$$Q \geqslant R$$
$$Q \geqslant 0$$
$$R \geqslant 0$$

هذه المسألة هي مسألة بحث عن قيمة قصوى مع مراعاة القيود

نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q} = \frac{1}{Q^2}\left[-\lambda k - \frac{hR^2}{2} + P(Q-R)Q - \frac{1}{2}P(Q-R)^2\right]$$

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R} = 0 + 0 + \frac{2hR}{2Q} + \frac{2P(Q-R)(-1)}{2Q}$$

بالاختصار على Q^2 , $2Q$ نحصل على المعادلتين:

$$-\lambda k - \frac{hR^2}{2} + P(Q-R)Q - \frac{1}{2}P(Q-R)^2 = 0$$

$$\boxed{2hR - 2P(Q-R) = 0} \quad *$$

بحل جملة المعادلتين نحصل على:

القيمة المثالية $Q^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda K}{h}\right)\left(\frac{P+h}{P}\right)}$

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda K}{h}\right)\left(\frac{P}{P+h}\right)}$$

حيث أن Q^* , R^* هي قيمة مثالية (قصوى)
ولتحديد نوع هذه القيم إذا كانت عظمى أو صغرى نلجأ إلى مصفوفة هيسيان (مصفوفة مربعة متناظرة)
إذا كانت هذه المصفوفة معرفة موجبة فإن التابع يكون تابع محدب وبالتالي فإن القيمة هي قيمة أصغرية.

من العلاقة (*) نحصل على علاقة تربط بين R , Q:

$$Q^* = \frac{P+h}{P} R^*$$

حيث h تكلفة التخزين ، P تكلفة العجز.
$h>0$ هذا يعني أن: $\frac{P+h}{P} > 1$ ومنه نستطيع أن نستنتج أن:

$$Q^* > R^*$$

يأتي السؤال بالامتحان على الشكل الآتي:
من نماذج إدارة المخزون نموذج سكوني مع عجز ولمادة واحدة.
1) اكتب الفرضيات الأساسية لهذا النموذج
2) اكتب النموذج الرياضي
3) أوجد القيم القصوى

انتهت المحاضرة الحادية عشرة

هبة

Scanned by CamScanner