

$$n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+, n_i \geq 1$$

$$; i=1:k$$

توجد: إذا كانت

$$\sum_{i=1}^k n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - (k-1) \left(2 \sum_{i=1}^k n_i - k \right)$$

أثبت صحة الترابية:

الإثبات:

نأخذ المجموع التالي

$$n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$(n_i - 1) \geq 0 \quad ; i=1:k$$

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1)$$

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{k \text{ مرة}}$$

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k$$

تربيع الطرفين في:

$$\left[\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \right]^2 = \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^k n_i + k^2$$

الملاحظة / نستفيد منها بالإثبات

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \quad *$$

لدينا:

$$\left[(n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \right]^2$$

$$\begin{aligned} \text{(ج. 4)} \quad \left[(n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) \right]^2 &= (n_1 - 1)^2 + \dots + (n_k - 1)^2 + \\ & 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k (n_i - 1)(n_j - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k (n_i - 1)^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^k (n_i - 1)(n_j - 1) = \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^k n_i + k^2$$

هنا $i \neq j$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^k (n_i - 1)(n_j - 1) \geq 0$$

و نضيف الى المربعين .

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^k n_i + k^2$$

في ما يلي:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k n_i + k \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^k n_i + k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^k n_i + k^2 + 2 \sum_{i=1}^k n_i - k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2(k-1) \sum_{i=1}^k n_i - k + k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2(k-1) \sum_{i=1}^k n_i + k(k-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - (k-1) \left(2 \sum_{i=1}^k n_i - k \right)$$

د. م. م.

سؤال
دوران
برهنة / ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V; E)$; $|V| = n$, اذا
كان البيان G مكون من k مرتبة عندئذ يكون

$$|E| \leq \frac{1}{2} (n-k)(n-k+1)$$

الاثبات : نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي

اذا كان $k=1$ عندئذ

$$|E| \leq \frac{1}{2} (n-1)(n-1+1)$$

$$|E| \leq \frac{1}{2} (n-1)n$$

العلاقة صحيحة ثم اثباتها سابقاً

البيان ليس بسيطاً فكونه مركباً واحدة فإن عدد الأضلاع على الأكثر $\frac{n(n-1)}{2}$

لنرضنا أن العلاقة صحيحة من أجل $K=m$

$$|E| \leq \frac{1}{2} (n-m)(n-m+1)$$

m عدد مركبات البيان G

دلتنا أنها صحيحة من أجل $K=m+1$

أي لنثبت أن العلاقة التالية صحيحة

$$|E| \leq \frac{1}{2} (n-m-1)(n-m)$$

كل مركبة من مركبات البيان هي بيان بسيط فحقق العلاقة

أي أن

$$\left\{ \begin{array}{l} |E_1| \leq \frac{1}{2} (n_1)(n_1-1) \\ |E_2| \leq \frac{1}{2} (n_2)(n_2-1) \\ \vdots \\ |E_m| \leq \frac{1}{2} (n_m)(n_m-1) \\ |E_{m+1}| \leq \frac{1}{2} (n_{m+1})(n_{m+1}-1) \end{array} \right.$$

لتعتبر ما يلي:

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m+1} = E = \bigcup_{i=1}^{m+1} E_i$$

$$|E_1| + |E_2| + \dots + |E_{m+1}| = |E|$$

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{m+1} = V$$

$$|V_1| + |V_2| + \dots + |V_{m+1}| = |V| = n$$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_{m+1} = n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} n_i = n$$

* بافتتاحية العلاقات

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m+1} (n_i)(n_i - 1)$$

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m+1} n_i^2 - \sum_{i=1}^{m+1} n_i \right)$$

بالتعويض نأخذ

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \leq \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{m+1} n_i \right)^2 - (m+1-1) \left(2 \sum_{i=1}^{m+1} n_i - m-1 \right) - \sum_{i=1}^{m+1} n_i \right]$$

بالتعويض نجد:

$$|E| = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i| \leq \frac{1}{2} \left[n^2 - m(2n - m - 1) - n \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[n^2 - 2nm + m^2 + m - n \right]$$

ونحتاج الحد بتحويلها كما نرى هنا النتيجة المطلوب، وهذا إلى

$$|E| \leq \frac{1}{2} (n - m - 1)(n - m)$$

* د. هـ. م

انتهت

املا حظوا/ يجب إثبات التفسيرية في حال تم استخدامهما في إثبات
المرحلة هنا ولو لم يذكر ذلك هو اضافة من هذا السؤال الامتاعي

تعريف: ليكن لدينا البيان $G=(V; E)$ بحيث $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;

تعريف للمار: Walk

هو عبارة عن متتالية من العقد والأضلاع ،

$$W = \langle v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_5, v_3, e_6, v_7, e_3, \dots \rangle$$

- مسموح ضمن المار بتكرار العقد والأضلاع

تعريف الطريق: Trail

هو متتالية من العقد والأضلاع لا يسمح فيه بتكرار الأضلاع .

$$T = \langle v_1, e_1, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2, e_6, \dots \rangle$$

* - يسمح فيه بتكرار العقد فقط ، الأضلاع مسموح بها أن تتكرر

أي عقده الشرح التالي :

$$\forall e_i, e_j \in T, i \neq j; e_i \neq e_j$$

تعريف المسار: Path

هو عبارة عن متتالية من العقد والأضلاع لا تتكرر فيه العقد .

$$P = \langle v_5, e_3, v_4, e_2, \dots \rangle$$

$$\forall v_i, v_j \in P, i \neq j; v_i \neq v_j$$

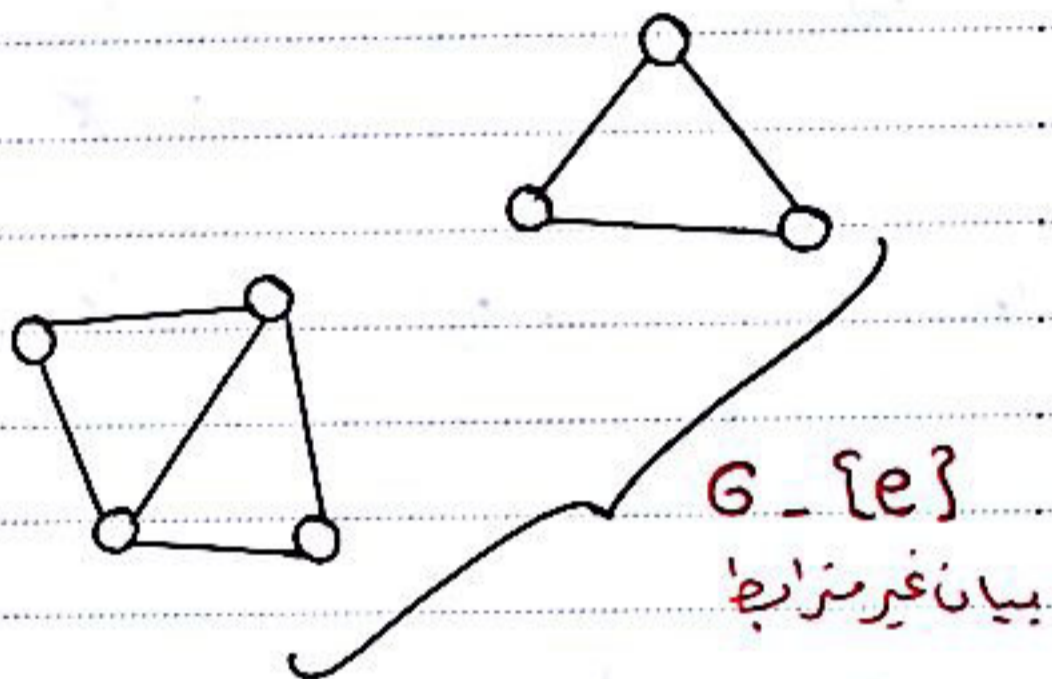
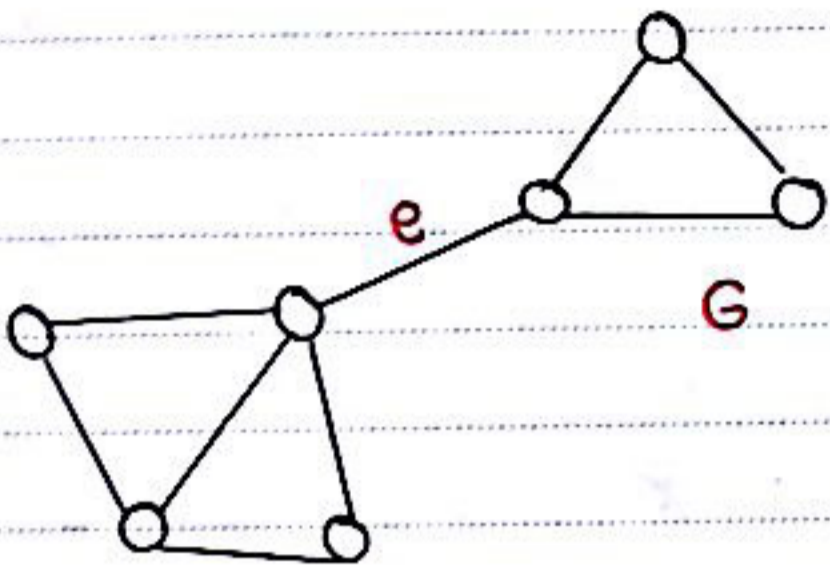
- 1- كل مسار هو طريق لكنه ليس بالضرورة أن يكون الطريق مسار ،
- 2- كل طريق هو مسار لكنه ليس بالضرورة أنه مسار أن يكون طريق ،
- 3- كل مسار هو مسار لكنه ليس بالضرورة أن يكون المسار مسار .

تعريف: ليكن لدينا البيان $G=(V; E)$ بيان بسيط مترابط ، وليكن

$e \in E$ شبر الضلع e حبر في البيان ، إذا تحقق أن

$$G - \{e\} = (V; E - \{e\}) \text{ بيان غير مترابط}$$

مثال على ذلك :



مبرهنة: ليكن $G = (V; E)$ بيان مترابط، وليكن $e \in E$ كذاً يكون

$$e \text{ حصر } \Leftrightarrow e \text{ لا ينتمي لدايرة محتواة من البيان } G$$

$$e \text{ حصر } \Leftrightarrow e \notin C \subseteq G$$

إثبات:

نفرمنا أن الضلع e حصر و لنثبت أن e لا ينتمي إلى الدائرة C

$$e \text{ حصر } \Rightarrow e \notin C$$

ليكن البيان $G - \{e\}$ بيان غير مترابط
لدينا ما يلي:

$$\exists x, y \in V ; e = (x, y)$$

إذا وجد حصر P_1 يربط بين x و y حيث $e \notin P_1$

إذاً البيان $G - \{e\}$ بيان مترابط وهذا يتناقض

$$e \in C \Leftrightarrow P_1 \cup e = C$$

ناقض، أي أن:

$$\forall c \in G \Rightarrow e \notin c$$

الآن الثاني

$$e \in c \subseteq G ; \forall c \Rightarrow e \in c$$

برهنت هذه الحالة سنقدم طريقة المكافئة العكسية
نقصد أن e ليس حبر من البيان G عندئذ:

$$\exists v_1, v_2 ; e = (v_1, v_2)$$

وَمَا أَنَّ e ليس حبراً فإن البيان $G - \{e\}$ بيان مترابط

إذاً يوجد لدينا حزمة v_1 إلى v_2 وليكن P_2

$$P_2 = \langle v_1, e_1, \dots, v_2 \rangle \neq e$$

عندئذ

$$P_2 \cup e = c = \langle v_1, e_1, \dots, e_2, v_2 \rangle$$

وهذا يناقض الفرض بأن e لا ينتمي لأي دائرة

إذاً e حبر

تعريف: ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V; E)$ عندئذ:

نعرّف البيان المعتم:

$$\forall x, y \in V, e = (x, y) \notin E$$

$$\Rightarrow e \in \bar{E}$$

نفسر للبيان المعتم $\bar{G} = (V; \bar{E})$ أي:

$$e \in E \Rightarrow e \notin \bar{E}$$

$$e \notin E \Rightarrow e \in \bar{E}$$

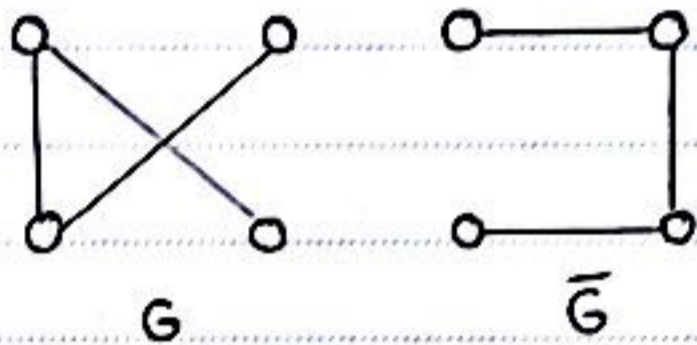
البيان المعتم
أي البيان

إثبات: تعريف: لكيه لدينا البيان البسيط $G = (V; E)$ و لكيه البيان المعقم له هو $\bar{G} = (V; \bar{E})$ ، فإذا كان البيان G مترابطاً فإن البيان المعقم \bar{G} يكون غير مترابطاً.

(إما البيان G مترابط أو البيان \bar{G} مترابط)

إثبات:

البيان مترابطان



على الأقل سيوجد واحد منهم مترابط إما G أو \bar{G}

إثبات: لنفرض أن البيان G هو بيان غير مترابط و لنثبت أن البيان \bar{G} مترابط.

لكيه لدينا البيان G بيان غير مترابط و تكون من المكونات التالية:

$$C_1 = (V_1; E_1), C_2 = (V_2; E_2), \dots, C_n = (V_n; E_n)$$

$$\forall v_1, v_2 \in \bar{G}$$

$$; v_1 \neq v_2$$

لنثبت أننا مرتبطين ، غير حاليين:

الحالة الأولى:

$$v_2 \in C_j \quad \wedge \quad v_1 \in C_i$$

حيث $i \neq j$

$$\Rightarrow e \in (v_1, v_2) \notin E$$

$$\Rightarrow e \in \bar{E}$$

الحالة الثانية: $v_1, v_2 \in C_i$

P.62 انظر الكتاب

$$\exists e = (v_1, v_2) \in E \Rightarrow e' \notin \bar{E}$$

وبالتالي

$$\exists z \in V, z \in C_j \quad ; \quad i \neq j$$

$$e_1 = (x, z)$$

$$e_2 = (y, z)$$

إذاً يوجد طريق

$$P = \langle x, e_1, z, e_2, y \rangle \in \bar{G}$$

$$e_1, e_2 \notin E \Rightarrow e_1, e_2 \in \bar{E}$$

وبالتالي \bar{G} قِرابٌ.

هههه

P.63

صل التمارين من الكتاب

ملاحظة: إذا كان المسار مغلق نسبيًا صارًا أو مغلقًا تكون فيه عقدة

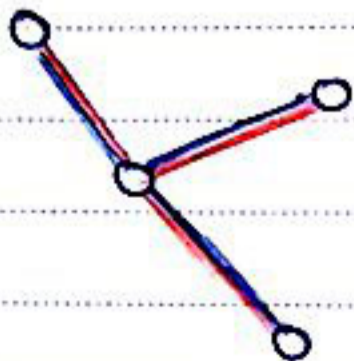
البدائية هي نفس عقدة البداية.

الطريق المغلق هو طريق تكون فيه عقدة البداية نفس عقدة النهاية.

مما يميز المسار هو تكرار العقد والأضلاع وبالتالي يمكن أن يوجد

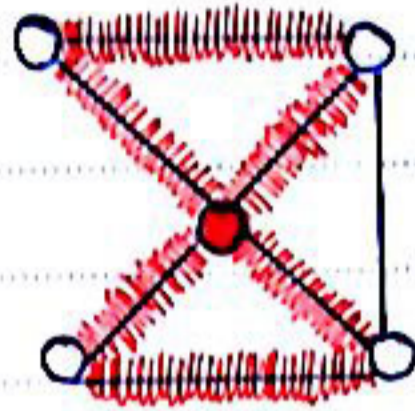
فيه دائرة ويمكن أن لا يوجد فيه دائرة.

مثال البيان التالي



الطريق المغلق يكون على الأقل دائرتين.

قناة: أنبج حاتم: "على الأقل يد يد دائرة" " دائرة



- السمر المغلق يحوي دائرة واحدة فقط .
- طول السمر إما عدد أضلاع السمر أو مجموع أوزان أضلاع السمر .
- طول الطريق هو عدد أضلاع الطريق (مانيه تكرار للأضلاع) أو مجموع أوزان أضلاع الطريق .

ادعوا كيف غيب طول سار غير سوزون ؟

انقست

تعرفنا المسارات، الطرق، السمات من البيانات العادية من المحاضرات السابقة.

تعرف المسارات والطرق والسمات من البيانات الموجهة بنفس الطريقة. جميع المصطلحات بالمرساة بنفس الطريقة.

تعريف: ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ زودت أضلاعه باتجاه فنقول ان البيان الموجه \vec{G} Digraph يكون هذا البيان قارباً بشدة (بقوة)

Strongly Con \vec{G}

إذا حقق ما يلي:

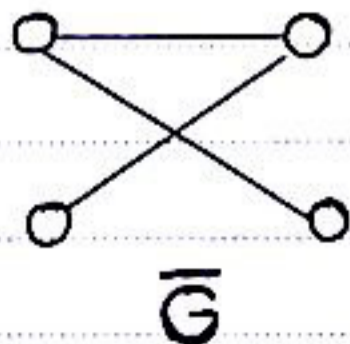
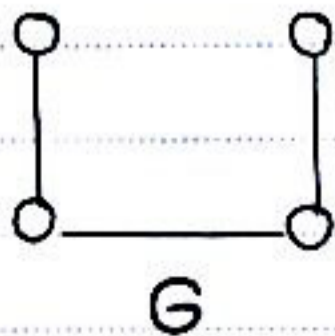
ممرسوجه $\exists \vec{P} : x \rightarrow y$; $\forall x, y \in V$
 فمبدأ ذلك يكون بيان موجه.

تعريف: ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ وليكن $\bar{G}=(V;\bar{E})$ نقول عن البيان G انه مقيم ذاتياً

self complementary graph

إذا كان G يتكامل \bar{G}

"البيان يتكامل نفسه \iff يكون بيان مقيم ذاتياً"



تاك G يتكامل \bar{G}

البيانات المنفصلة disjoint Graph

تعريف: ليكن لدينا البيان $G_1 = (V_1; E_1)$ و البيان $G_2 = (V_2; E_2)$; نقول
عن البيانين انهما منفصلين اذا كان

$$V_1 \cap V_2 = \phi$$

$$E_1 \cap E_2 = \phi \quad \wedge$$

ملاحظة: اذا كان لدينا بيانين منفصلين فإن تقاطع مجموعتهما الاضلاع
هي مجموعته خاليتين، لكنه العكس غير صحيح.

"قد يوجد لدينا بيانين تقاطع مجموعتهما اضلاعهم = المجموعه الخاليتين،
لكنه البيانين غير منفصلين".

اجتماع البيانات:

لكي لدينا البيان $G_1 = (V_1; E_1)$ و البيان $G_2 = (V_2; E_2)$

فان اجتماع البيانين $G = G_1 \cup G_2$; حيث:

$$V = V_1 \cup V_2 \quad \wedge \quad E = E_1 \cup E_2$$

نسميه بيان الاجتماع Union graph G

الاتصال:

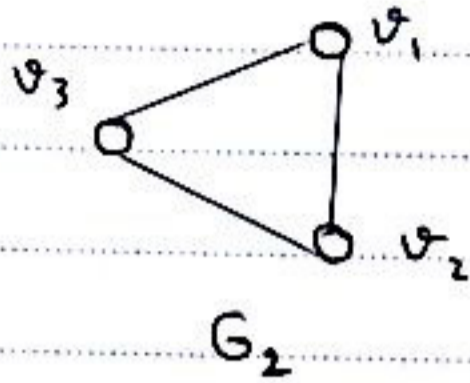
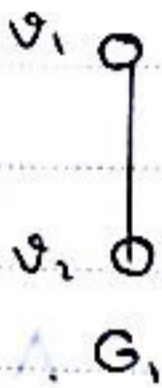
الاتصالات البيانات join Graph

ليكن لدينا البيانين $G_1 = (V_1; E_1)$ و $G_2 = (V_2; E_2)$ بيانين

بسطه و منفصلين، نسمي بيان الاتصال $G = G_1 + G_2$

الذي تكون مجموعته عقده هي $V = V_1 \cup V_2$ و مجموعته
اضلاعه

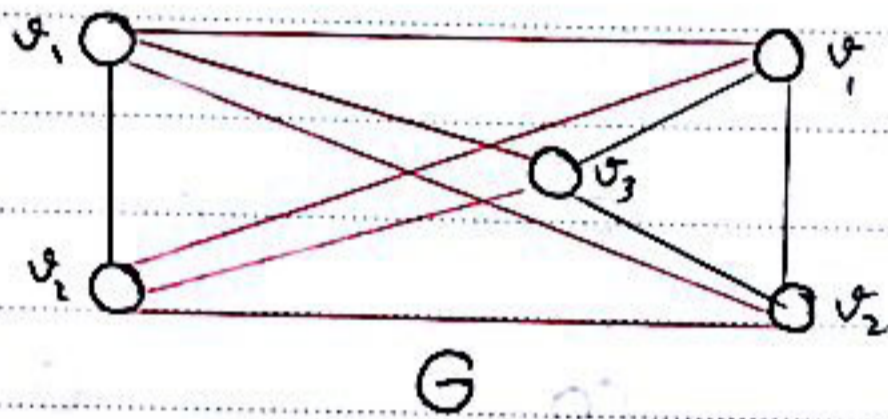
$$E = E_1 \cup E_2 \cup \{ \forall x \in V_1 ; \exists e = (x, y) : \forall y \in V_2 \}$$



تلك على ذلك :
 واضح أن البياني
 G_1 و G_2
 منفصلين

كل عقدة ارتباط
 لجميع عقد البيان الثاني

$$G = G_1 + G_2$$



G

الجداء الديكارتي للبيانات :

لكن لدينا البياني المنفصلين $G_1 = (V_1; E_1)$, $G_2 = (V_2; E_2)$
 (بياني بسيط و منفصلين)

نعرف بيان الجداء الديكارتي للبياني و نكتب $G = G_1 \times G_2$
 هو بيان مجموعة عقده $V = V_1 \times V_2$ و مجموعة الأضلاع E هي إحدى

الحالات :

$$E = \{ e : \{ u_1 \text{ تباد } u_2, \wedge v_1 = v_2 \} \vee \{ v_1 \text{ تباد } v_2, \wedge u_1 = u_2 \} \}$$

$$V_1 = \{ v_1, v_2, \dots \} , V_2 = \{ u_1, u_2, \dots \}$$

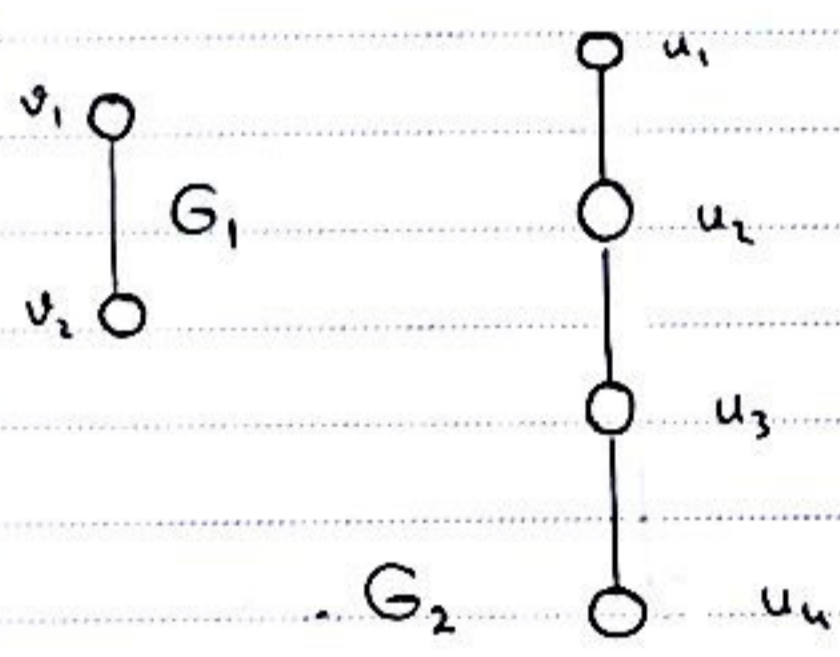
$$(v_1, u_1) , (v_2, u_2)$$

أي العقد متساويات

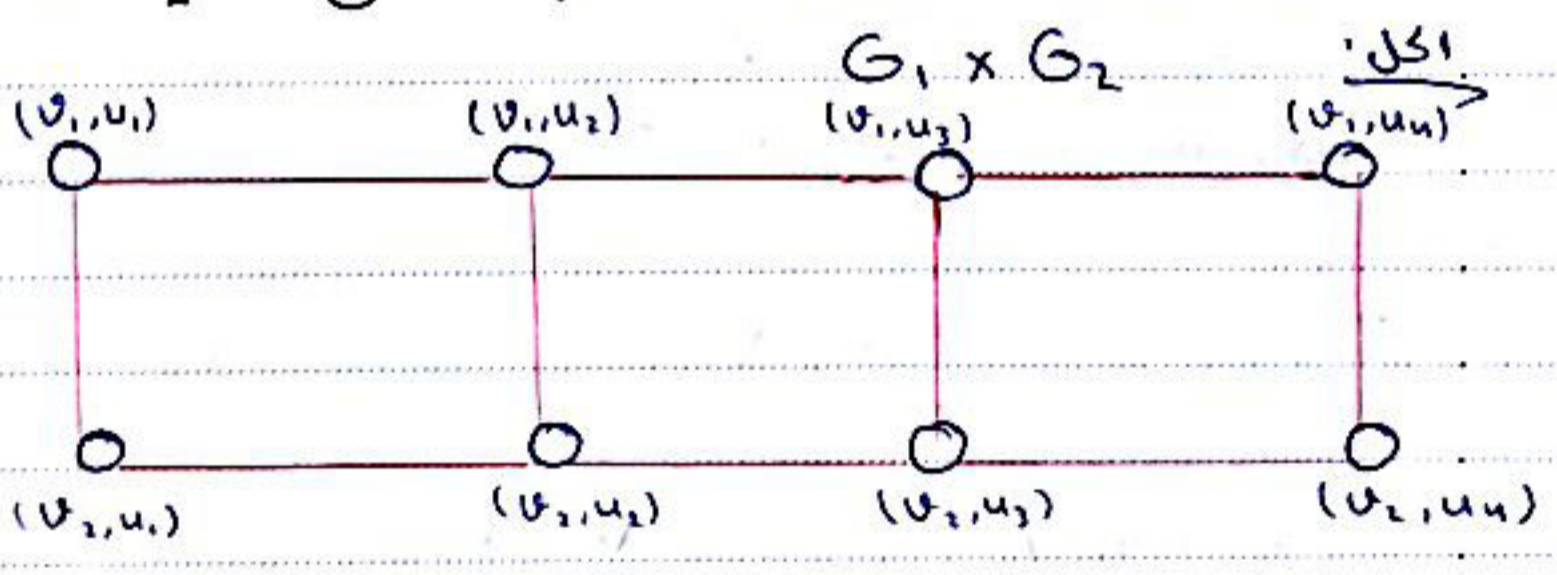
تركيب البيانات : Composition graph

لكن لدينا البيانية البسيطة $G_1 = (V_1; E_1)$, $G_2 = (V_2; E_2)$
 بيانية بسيطة منتظمة، فإن تركيب البيانات $G_1[G_2] = (V; E)$
 هو بيان مجموعته عقدته $V = V_1 \times V_2$ و مجموعته أضلاعه
 $E = \{ e: e = [(v_1, u_1), (v_2, u_2)] ; [u_2 \text{ جاور } u_1, \forall v_1, u_2] \cup [u_1 \text{ جاور } v_1, \forall v_1, u_1] \}$

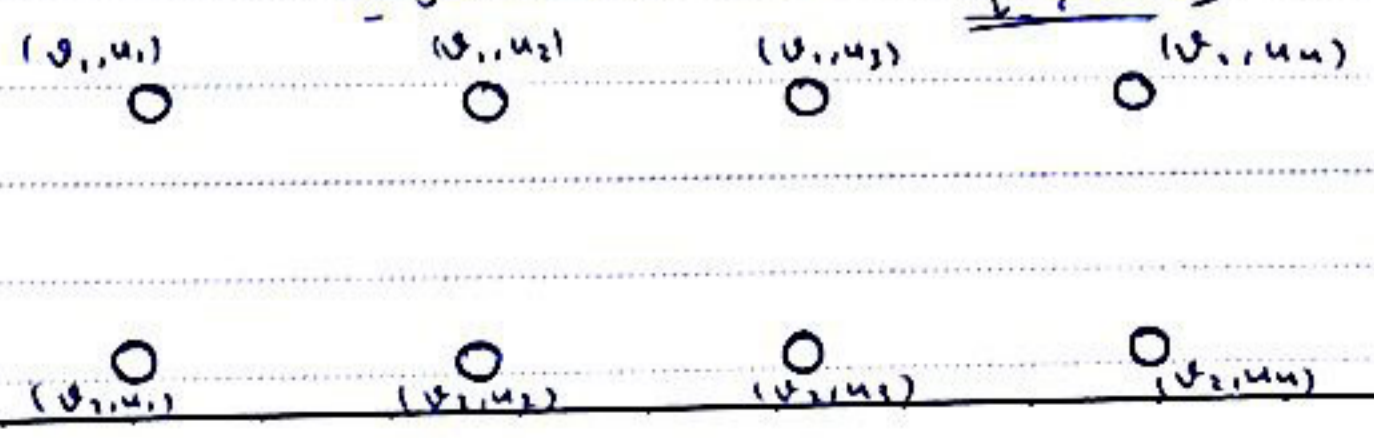
مثال على ما سبق:



لكن لدينا البيانية التالية:
 - واضح أن البيانية منتظمة
 المطلوب: أوجد $G_1 \times G_2$
 - أوجد $G_1[G_2]$



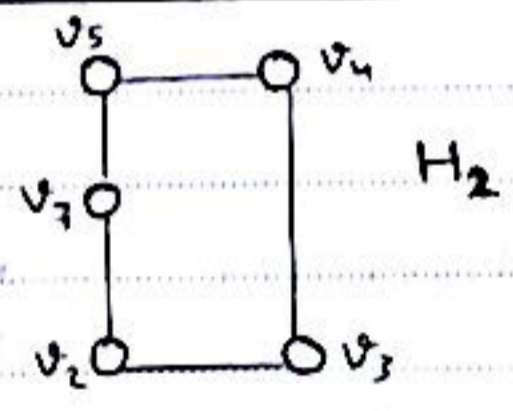
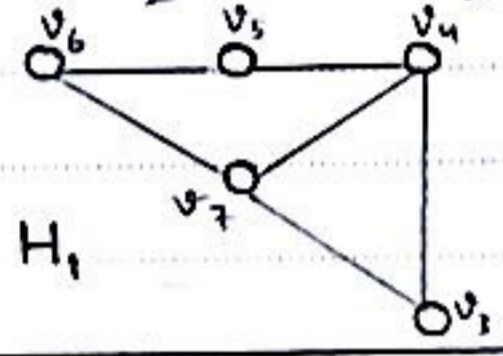
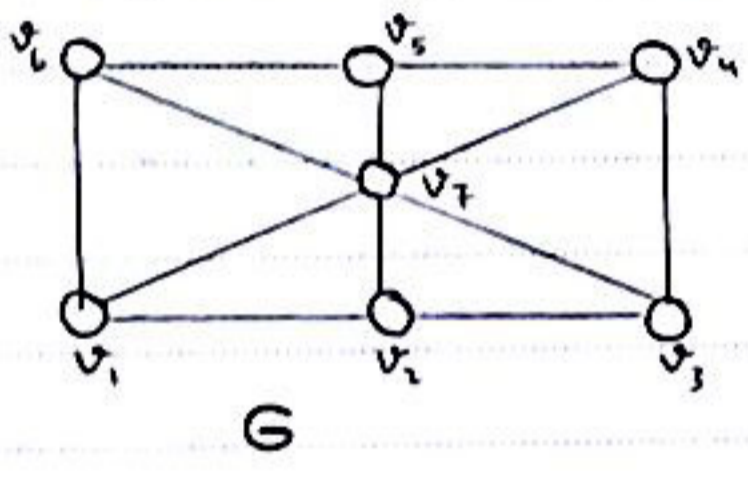
الطلب الثاني وطلبه: "لا تعتمد على التعريف"



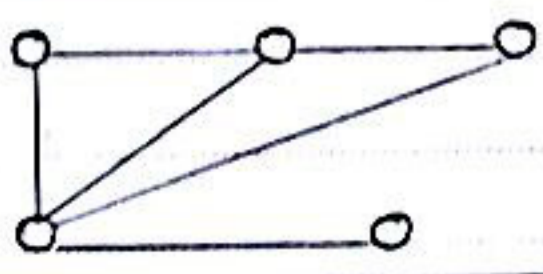
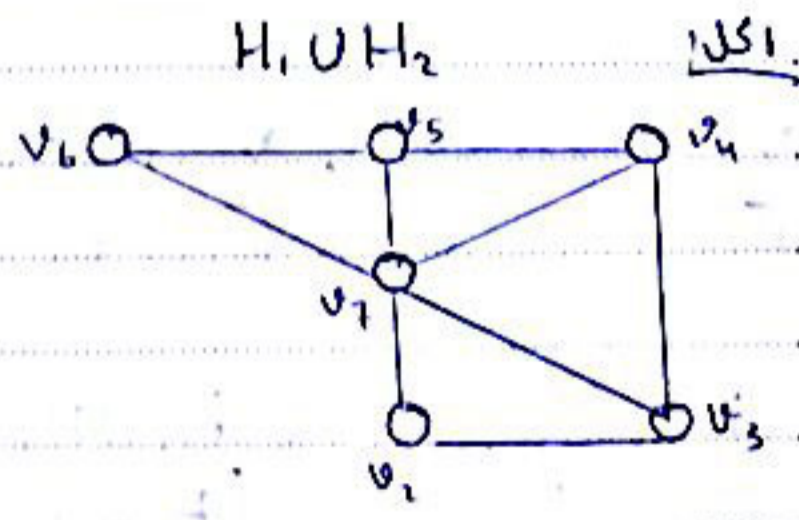
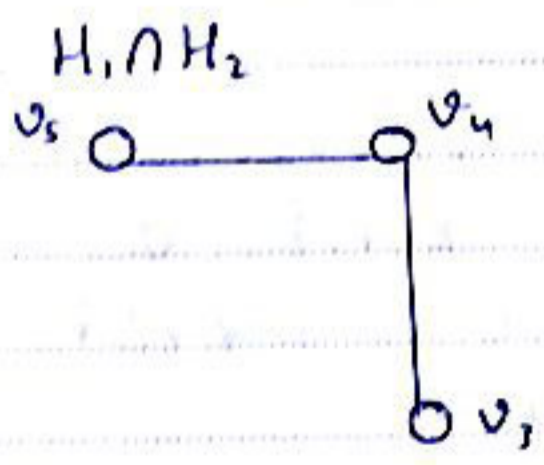
تقاطع البيانات Intersection Graph

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V; E)$ وليكن $H_1=(V_1; E_1)$ و $H_2=(V_2; E_2)$ حيث $H_1 \subseteq G$ و $H_2 \subseteq G$ عندئذ
 فإن بيان التقاطع $H' = H_1 \cap H_2 = (V'; E')$ حيث
 $V' = V_1 \cap V_2$ و $E' = E_1 \cap E_2$

تكون لدينا البيان التالي G ، $H_1 \subseteq G$ ، $H_2 \subseteq G$

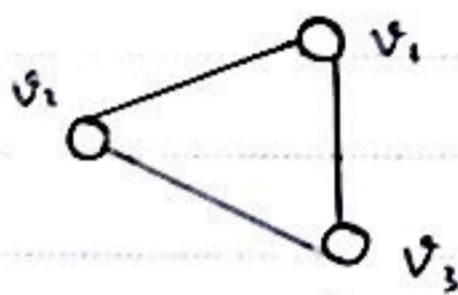
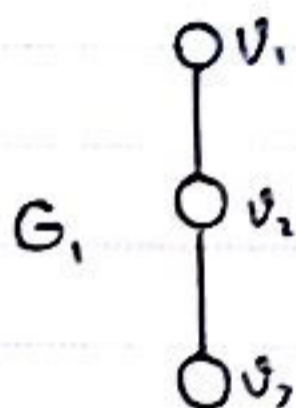


أدوم $H_1 \cup H_2$ و $H_1 \cap H_2$



تمارين / دلييل / :
 ليكن لدينا البيان التالي G ، أدوم
 البيانات الجزئية المختلفة التي عددتها = 5

أثبت صحة أو خطأ العلاقة التالية
 $G_1 + (G_2 \cup G_3) \stackrel{?}{=} (G_1 + G_2) \cup (G_1 + G_3)$

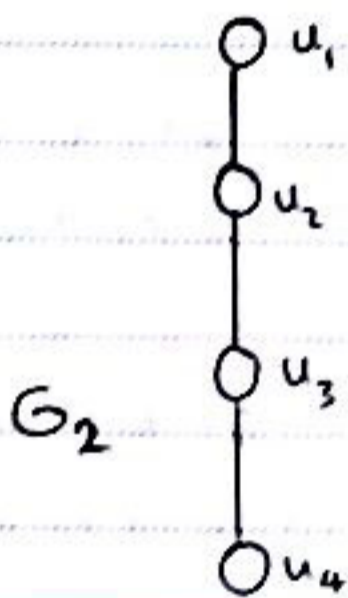
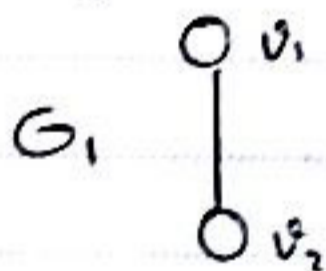


6. ليكن لدينا البياني التاليين

بيده ضمایماً إذا كان ~~...~~

$G_2 \times G_1$ يساوي $G_1 \times G_2$

7. ليكن لدينا البيان التالي G_1 و البيان G_2 بيانيين بسيطين ومفصلين



بيده ضمایماً إذا كان

$G_1 [G_2]$ يساوي

$G_2 [G_1]$

8. ليكن لدينا البيانيين المفضلين البسيطين G_1 و G_2 ، حيث أن

$$|V_2| = n_2 \quad \text{و} \quad |V_1| = n_1$$

$$|E_2| = m_2 \quad \text{و} \quad |E_1| = m_1$$

أدوم عدد عقد و اضلاع البيانيات التالية

$G_1 \times G_2$, $G_1 + G_2$, $G_1 \cup G_2$, $G_1 [G_2]$

بعض البيانات الخاصة :

نعلم أن البيان المنتظم هو بيان تكون قدرات عقده جميعها متساوية.

لديه لدينا البيان $G=(V; E)$ بيان منتظم من الدرجة r أي

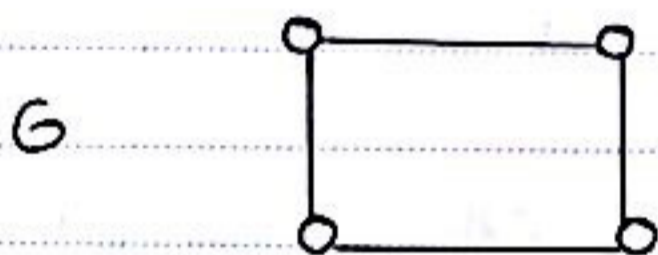
$$\forall v \in V : \text{deg}(v) = r$$

r . regular

ملحوظة: يتم البيان المنتظم من الدرجة r $\bar{G}=(V; \bar{E})$ هو بيان

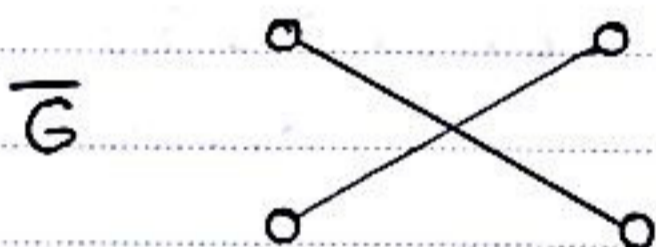
منتظم من الدرجة $(n-r-1)$ حيث n هو عدد العقد.

مثال : بيان منتظم من الدرجة الثانية



2. regular

المنتظم للبيان G هو بيان منتظم من الدرجة الأولى



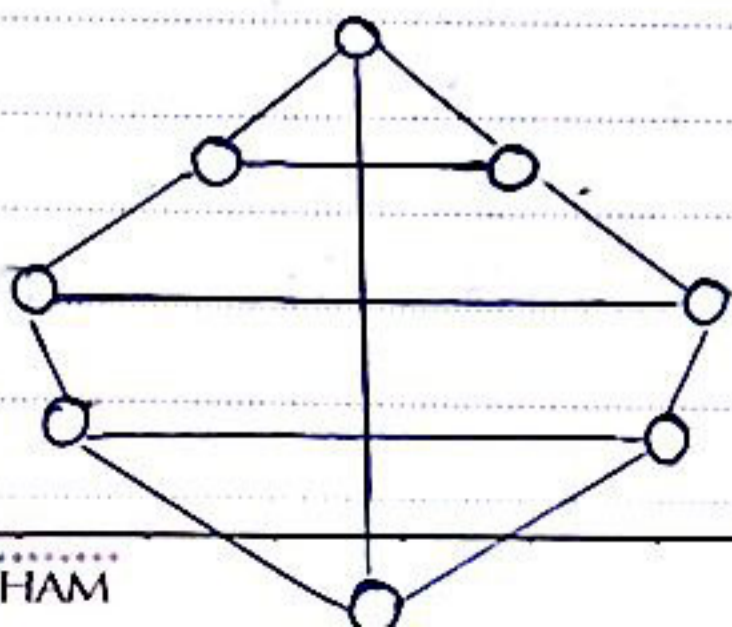
1. regular

$$(4-2-1) = 1$$

البيانات المكعبة الشهيرة

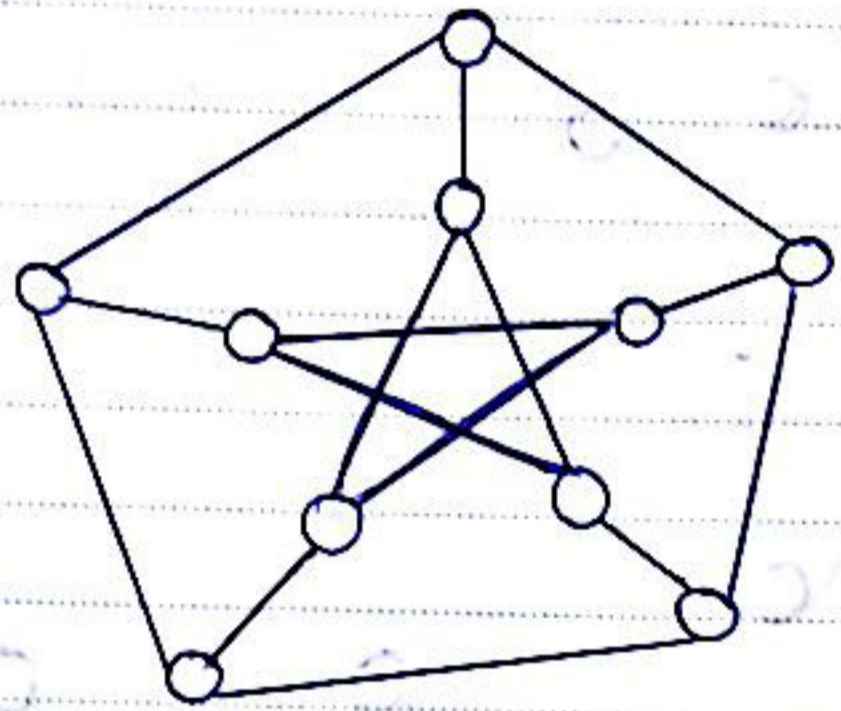
Cubic graph :

بيان منتظم من الدرجة الثالثة
3. regular



Petersen graph أنشوريان , هوبيان

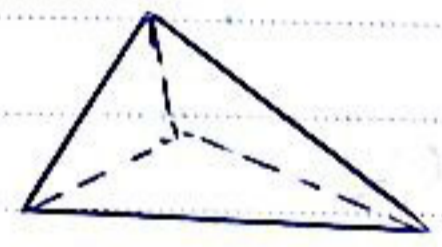
المات من الاتريتا
للفائدة



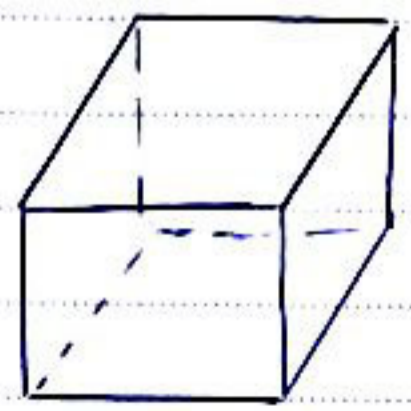
نوعه : Cubic graph

البيانات الأفلاطونية Platonic Graph

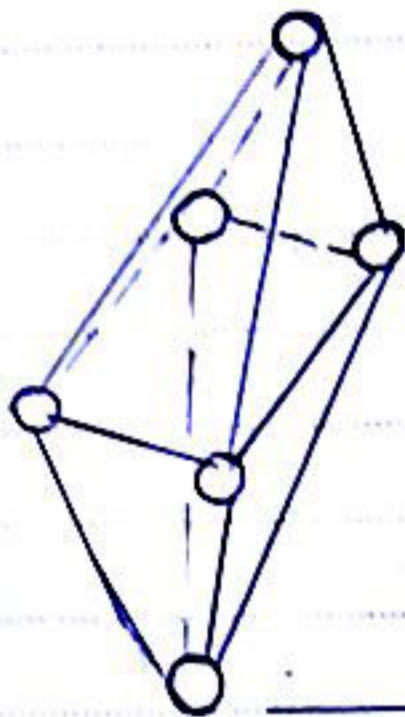
توهم مجموعة بيانات نسبه بيانات أفلاطونية.
سندسها أدرا تسطوح أي كوجوه ثم نرسها كبيانات موافقه



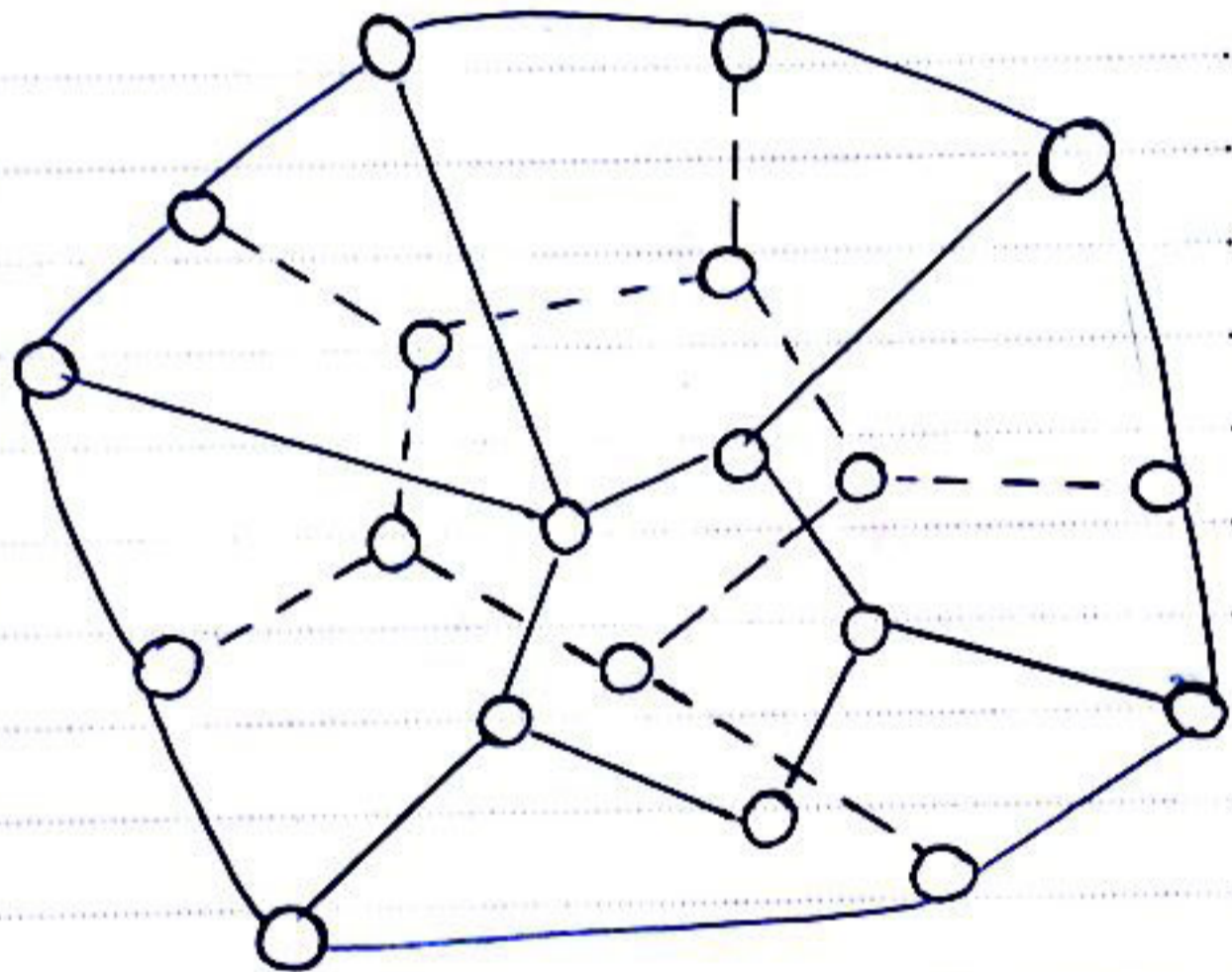
النوع الأول : رباعي السطوح
Tetrahedron



المكعب
Cubic
S.hedron



ثمانية الوجوه
octahedron

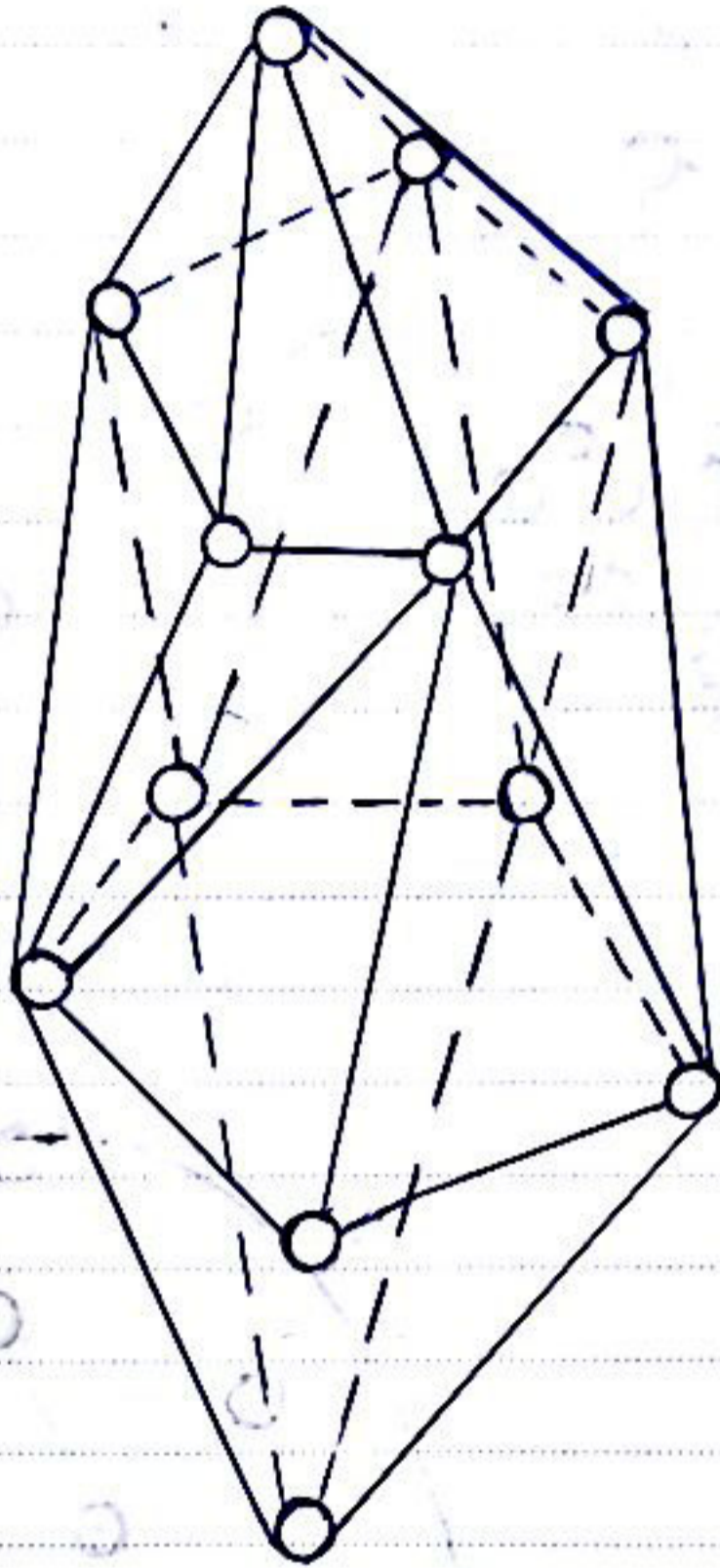


اثنا عشر وجه

dodecahedron

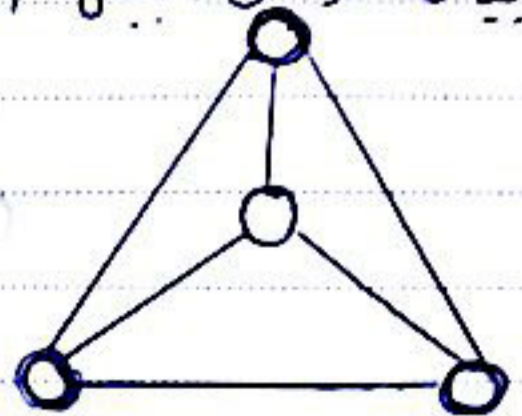
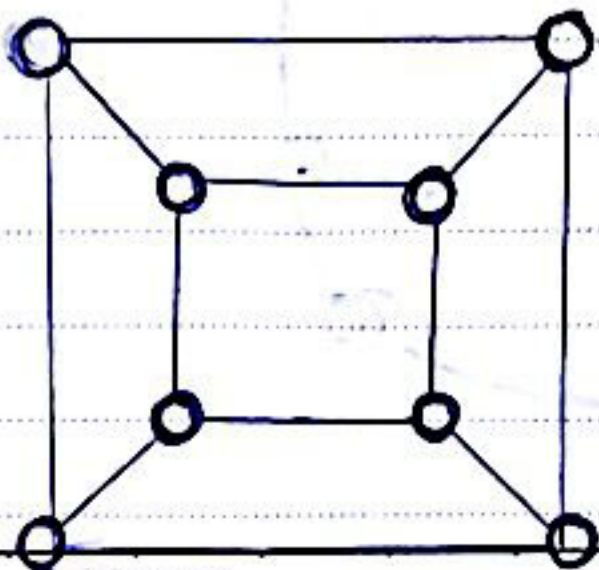
عشرون وجه

Icosahedron

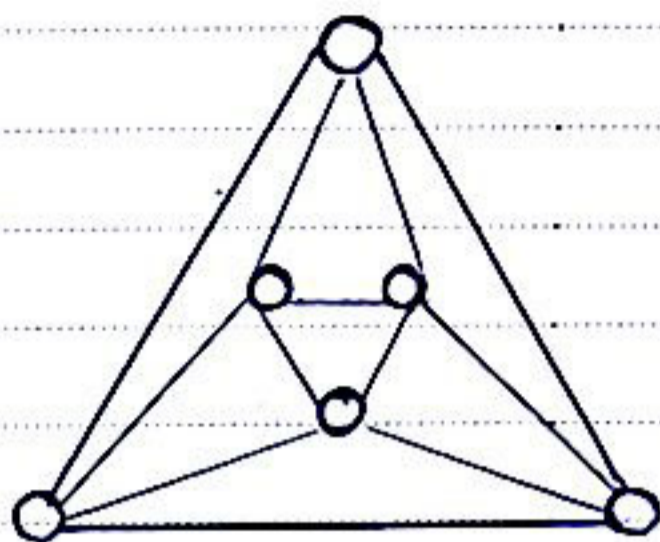
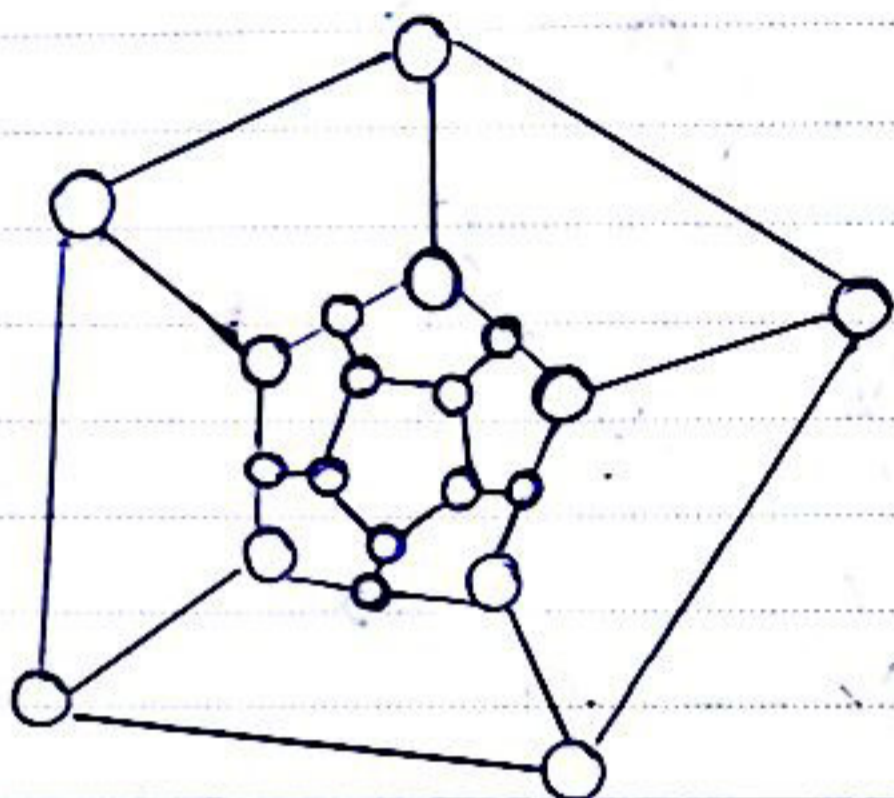


البيانات الموافقة لأشكال أفلاطون :

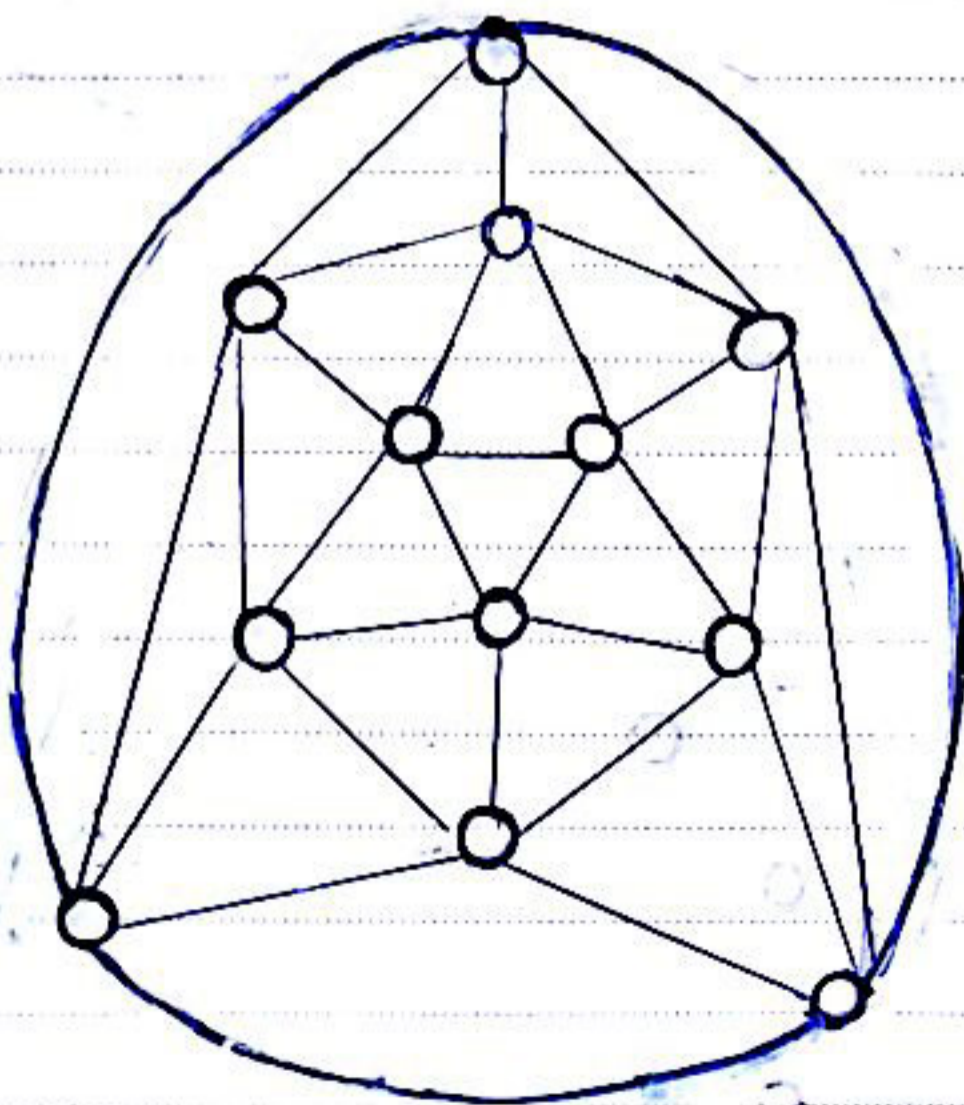
البيانات الموافقة للشكل الأول	البيانات الموافقة للشكل الثاني
-------------------------------	--------------------------------



البيان الموافق للشكل الثالث البيان الموافق للشكل الرابع



البيان الموافق للشكل الخامس



ارتون