تمرين: كتاب مؤلف من 500 صفحة ويحتوي على 800 خطأ مطبعي موزعة بشكل عشوائي على صفحات الكتاب فإذا فتحنا الكتاب على صفحة ما فما هو احتمال

1) أن يكون في الصفحة ثلاثة أخطاء مطبعية
2) " تخلو الصفحة من الأخطاء
3) أن يكون في الصفحة خطأ واحد على الأقل

الحل: إذا دل X على عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة فإن لـ X التوزيع الحدي الثنائي بوسيطين $n=800$ ، $p=\frac{1}{500}$

وبما أن n كبيرة و p صغيرة و $np=\frac{800}{500}=1.6<5$

فيكون: $X \sim b\left(800, \frac{1}{500}\right) \simeq Poiss(\lambda = np = 1.6)$

فيكون لـ X :

$$f_X(x) = e^{-1.6} \cdot \frac{(1.6)^x}{x!} \; ; \; x = 0, 1, \dots$$

1) $P(X=3) = f(3) = e^{-1.6} \cdot \frac{(1.6)^3}{3!} = 0.1378$

2) $P(X=0) = f(0) = e^{-1.6} \cdot \frac{(1.6)^0}{0!} = e^{-1.6} = 0.2019$

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1)$

$= 1 - P(X=0) = 1 - 0.2019$

$= 0.7981$

$f_X(x) = P(X=x) = C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x}$: $q = 1 - p$

إذا اعدنا بالحساب الحالي

1) $P(X=3) = C_3^{800} \left(\frac{1}{500}\right)^3 \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{797}$

2) $P(X=0) = C_0^{800} \left(\frac{1}{300}\right)^0 \left(\frac{499}{300}\right)^{800}$

$= 0.1378$

$= \left(\frac{499}{500}\right)^{800} = 0.20137$

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.79843$

تمرين: ليكن X متغير عشوائي كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 < x < 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1) عين توقع وتباين X

2) " دالة التوزيع المتجمع $F_X(t)$

3) أوجد $P(X > 2)$

الحل: نلاحظ أنه لدالة الكثافة شكل التوزيع المنتظم المستمر حيث $a = 1$ و $b = 3$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = 2$$ (1

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(2

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & : x \le a \\ \frac{t-a}{b-a} & , a < x \le b \\ 1 & : b < x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ \frac{t-1}{2} & 1 < t < 3 \\ 1 & 3 \le t \end{cases}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$$ (3

$$= 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

التوزيع الطبيعي :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

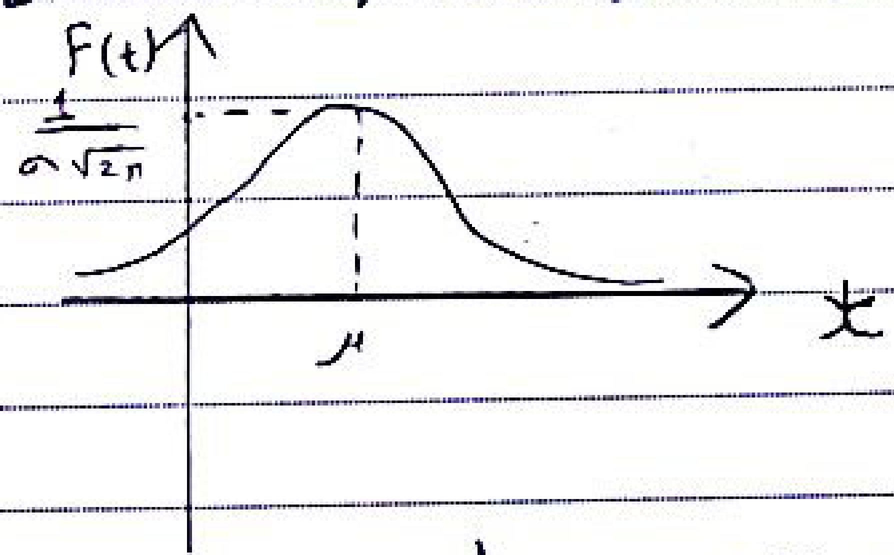
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$-\infty < x < +\infty$

$-\infty < \mu < +\infty$

$0 < \sigma < +\infty$

$$E(X-\mu)^2 = E X^2 - (E X)^2$$



$E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

خواص دالة الكثافة:

1- تبلغ قيمة المنحنى العظمى عندما $x = \mu$ وتساوي هذه القيمة $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

2) شكل المنحنى هو شكل الجرس

3) المنحنى متناظر بالنسبة لـ $x = \mu$

4) النقطتان $x = \mu \pm \sigma$ هما نقطتا انعطاف

5) عندما $x \to \pm\infty$ فإن $f \to 0$

6) $f(x) \geq 0$ ، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

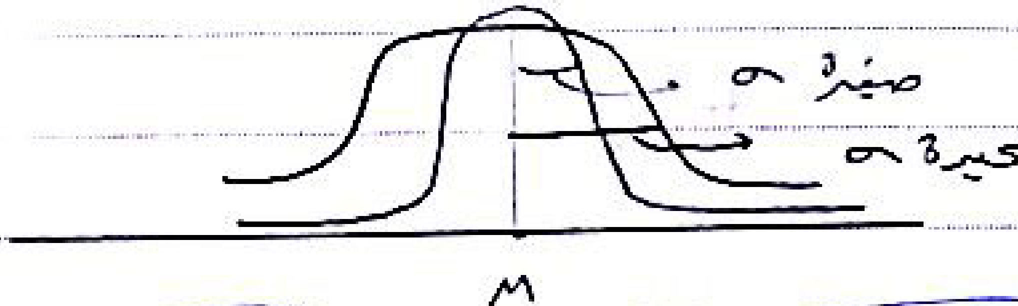
7) $E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

8) دالة التوزيع التجميعي

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

و) كلما صغرت σ كلما ارتفعت ذروة المنحنى f



$$\sigma^2 \simeq S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$ للمعاينة

التوزيع الطبيعي المعياري:

المتغير المعياري: إذا كان X متغيرا ما فإن المتغير المعياري له هو المتغير

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

حيث: $E(X) = \mu$

$var(X) = \sigma^2$

تعريف: نقول عن المتغير العشوائي Z التوزيع الطبيعي المعياري

ونرمز له ب $X \sim N(0,1)$

إذا كانت له دالة الكثافة:

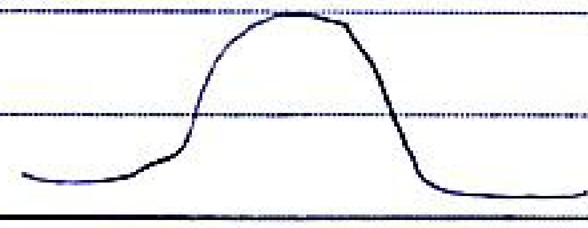
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < +\infty$$

وتكون دالة الكثافة المتجمعة له بالشكل:

(توزيع طبيعي معياري) $$\Phi_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\varphi(-3) = \varphi(3)$ نتيجة: (1

$\Phi_Z(-3) = 1 - \Phi_Z(3)$ (2



مبرهنة: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

وكان $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$

فإن:

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

نتيجة: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

برهان النتيجة: باستخدام المبرهنة:

$$a = \frac{1}{\sigma}, \quad b = \frac{-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Z \sim N\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right)\mu + \left(\frac{-\mu}{\sigma}\right), \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2\sigma^2\right)$$

$$= N(0,1)$$

ملاحظة: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن

$$F_X(t) = P(X \le t) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z \sim N(0,1)} \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \phi_z\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_X(t)}_{\text{تتبع } N(\mu,\sigma^2)} = \phi_z\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow \underline{N(0,1)}$$

نحسبها باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

z	0.00	0.01	0.02	... 0.06 ...	0.09
0.0	0.5				
⋮					
0.9					
1.0					
1.1					
1.5					
⋮					
3.4					

$\phi(1.12) = 0.8686$

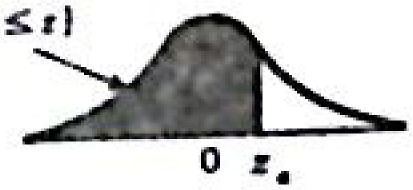
$P(Z \leq 1.56) = \phi_z($

1

$$\phi_z(z) = P(Z \leq z)$$

أ- الجدول (1)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري المتجمع



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

التوزيع الطبيعي المعياري:

$Z \sim N(0,1)$

$\mu = 0 \quad , \quad \sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\Phi_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	---	0.05	0.09
0.0	0.5					
0.1						
⋮						
0.9						
1.0						
1.1						
⋮						
1.3						
1.9						

$\Phi_Z(0.92) = P(Z \leq 0.92) = 0.8212$

$\Phi_Z(1.12) = P(Z \leq 1.12) = 0.8686$

إن هذا الجدول يعطي قيم دالة التوزيع $\Phi(z)$ ابتداءً من الصفر بفاصل 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها.

1) العمود a يسير تحويلياً z ابتداءً من الصفر وبفاصل 0.1
2) السطر الرأسي يحوي المنزلة العشرية الثانية لقيم z
3) قيم الدالة $\phi(z)$ هي ملتقى السطر مع العمود المقابل لـ z

مثال: أوجد قيم كل من الاحتمالات:

1) $P(Z \leq 1.35)$ ثم $P(Z \geq 1.35)$

2) $P(Z \geq -1.85)$ ثم $P(Z \leq -1.85)$

3) $P(-1.72 \leq Z \leq 80)$

4) ثم أوجد قيمة z_α بحيث أن

$$P(Z \leq z_\alpha) = 0.975$$

$\phi(\overset{\text{سطر}}{0.05} + \overset{\text{عمود}}{1.3})$ ← هذه الكتابة فقط للفهم لا تكتبها في الفحص

الحل: 1)

$$P(Z \leq 1.35) = \phi(1.35)$$
$$= 0.9115$$

$$\Longrightarrow P(Z \geq 1.35) = 1 - \phi(1.35)$$
$$= 1 - 0.9115 = 0.0885$$

$$P(Z \geq 1.35) = 1 - \underbrace{P(Z < 1.35)}_{\phi_z(1.35)}$$

2)

$$P(Z \geq -1.85)$$
$$= 1 - \phi(-1.85) = 1 - [1 - \phi(1.85)]$$
$$\phi(1.85) = \phi(0.05 + 1.8)$$

$= \phi(1.85) = 0.9678$

$\Rightarrow P(Z \leq -1.85) = 1 - \phi(1.85)$

$= 1 - 0.9678 = 0.0322$

3) $P(-1.72 \leq Z \leq 1.80)$

$= P(Z \leq 1.80) - P(Z \leq -1.72)$

$= \phi(1.80) - \phi(-1.72)$

$= \phi(1.80) - [1 - \phi(1.72)]$

$= 0.9641 - 1 + 0.9573$

$= 0.9214$

4) نلاحظ من الجدول أن القيمة المقابلة لـ 0.975 هي $Z_\alpha = 1.96$
حيث نبحث عن القيمة 0.975 داخل الجدول ثم نحدد السطر والعمود اللذين يلتقيان عند 0.975 ونجد أن
هذه القيمة تقع عند السطر 0.06 والعمود 1.9 وبجمعهما نحصل على 1.96

مثال: بفرض أن $X \sim N(5,4)$ أوجد $P(X<8)$

الحل: $X \sim N(5,4) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 5 \\ \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2 \end{array} \right.$ عليهم علامات بالامتحان

ولحساب الاحتمال المطلوب نعاير أي نحسب $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

أي الانتقال من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري

$$P(X<8) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} < \frac{8-5}{2}\Big)$$

$$= P(Z<1.5)$$

$$= \Phi(1.5) = 0.9332$$ باستخدام الجدول

مثال: إذا كان $X \sim N(50,25)$:

أوجد: $P(X>62)$ و $P(|X-50|<8)$ و $P(|X-40|>5)$

الحل: $X \sim N(50,25) \Longleftarrow \left.\begin{matrix}\mu = 50 \\ \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5\end{matrix}\right]$

وبالتالي:

$$P(X>62) \overset{\text{بالمعايرة}}{=} P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{62-50}{5}\Big)$$

$$= P(Z>2.4) = 1 - P(Z \leqq 2.4)$$

$$= 1 - \Phi(2.4)$$

$$= 1 - 0.9918$$

$$= 0.0082$$

$$P(|X-50|<8) = P(-8 < X-50 < 8)$$

بالمعايرة

$$= P\Big(\frac{-8}{5} < \frac{X-50}{\sigma} < \frac{8}{5}\Big)$$

$= P(-1.6 < Z < 1.6)$

$= \phi(1.6) - \phi(-1.6)$

$= \phi(1.6) - [1 - \phi(1.6)]$

$= 2\phi(1.6) - 1 = 2(0.9452) - 1$

$= 0.8904$

$P(|X - 40| > 5) = 1 - P(|X - 40| \leq 5)$

$= 1 - P(-5 \leq X - 40 \leq 5) = 1 - P(35 \leq X \leq 45)$

$= 1 - P\left(\frac{35-50}{5} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{45-50}{5}\right)$

$= 1 - [\phi(-1) - \phi(-3)]$

$= 1 - [(1 - \phi(1)) - (1 - \phi(3)))$

$= 1 + \phi(1) - \phi(3)$

$= 1 + 0.8413 - 0.9987 = 0.8426$

(مهم) سؤال دورة

تمرين: نفرض أن X تمثل أعمار المصابيح الكهربائية المستخدمة في كلية العلوم، ولنفرض أن له التوزيع الطبيعي

متوسطه 3500 ساعة وانحرافه المعياري 600 ساعة

والمطلوب:

1) ما هي نسبة المصابيح التي يجب ان تبدل بعد 3350 ساعة

2) بعد كم ساعة يجب أن نغير 0.10 من المصابيح

3) أوجد الاحتمال $P(3350 \le X \le 3560)$

$\sigma = 600 \Rightarrow \sigma^2 = 360000$

الحل:

$$X \sim N(\underbrace{3500}_{\mu}, \underbrace{360000}_{\sigma^2})$$

1) $P(X \le 3350)$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{3350-3500}{600}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{-150}{600}\right) = \Phi(-0.25)$$

$$= 1 - 0.5987 = 0.4013$$

أي أن نسبة المصابيح التي يجب ان تبدل بعد 3350 ساعة هو 40%

2) بفرض انه بعد X ساعة نبدل 0.10 من المصابيح وبالتالي

$$P(X \le x) = 0.10$$

غير موجودة في الجدول وبالتالي x سالبة

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-3500}{600}\right) = 0.10 = 1 - 0.90$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{X-3500}{600}\right) = 0.10 = 1-0.90$$

$$= 1 - \phi(1.285)$$

$$\phi\left(\frac{x-3500}{600}\right) = \phi(-1.285)$$

$$\Rightarrow \frac{x-3500}{600} = -1.285$$

$$\Rightarrow x = 3500 - 600(1.285)$$

$$\Rightarrow x = 2739$$

(3

$$P(3350 \le X \le 3560)$$

معايرة

$$= P\left(\frac{3350-3500}{600} \le \frac{X-\mu}{600} \le \frac{3560-3500}{600}\right)$$

$$= P(-0.25 \le Z < 0.10) = \phi(0.10) - \phi(-0.25)$$

$$= 0.5395 - [1 - \phi(0.25)]$$

$$= 0.5395 - 0.4013 = 0.1385$$

تمرين:

تقدم لامتحان مقرر الاحصاء 750 طالباً وبعد اعلان النتائج تبين ان درجاتهم التي نالوها تتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(60,100)$ لماذا تم تقسيم الطلاب الى ثلاث فئات بحيث تحوي الفئة A الطلاب الذين نالوا درجات تزيد عن 70 وتحوي الفئة B

الطلاب الذين نالوا درجات بين 50 و 70 وتحوي الفئة C الطلاب الذين نالوا أقل من 50 والمطلوب :

أ) تعيين عدد الطلاب في كل فئة

ب) ما هي أقل علامة نالها طالب من الشريحة A والأعلى

الحل :

نفرض X يدل على درجة الطالب فيكون :

$\mu = 60$, $\sigma^2 = 100$, $\sigma = 10$ $\Longleftarrow X \sim N(60, 100)$

أ) نسبة الطلاب الذين درجاتهم تزيد عن 70

$$P(X > 70) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{70-60}{10}\right)$$

$$= P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413$$
$$= 0.1587$$

فيكون عدد طلاب الفئة A هو :

$(750)(0.1587) = 119$ طالب

تكملة المسألة في المحاضرة 7

متابعة التمرين في المحاضرة السابقة

وجدنا أن : $X \sim N(60, 100)$

أ) $P(X > 70) = 0.1587$

وعددهم : $(750)(0.11587) = 119$ طالب

نسبة الطلاب الذين درجاتهم بين 50 و 70 درجة هو :

$P(50 \leq X \leq 70)$

بالمعايرة

$$= P\left(\frac{50-60}{10} \leq \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{70-60}{10}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)]$$

$$= 2\Phi(1) - 1$$ من الجدول

$$= 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

فيكون عدد هذه الفئة B هو :

$(750)(0.6826) = \boxed{512}$ طالب

نسبة الطلاب الذين درجاتهم أقل من 50 يساوي :

$$P(X < 50) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50-60}{10}\right)$$

المعايرة

$$P(Z < -1) = \Phi(-1)$$

$$= 1 - \Phi(1) = 1 - (0.8413) = 0.1587$$

ويكون عدد طلاب الفئة C هو:

$(750)(0.1587) = 119$ طالب

نلاحظ أن:

$$\underbrace{119}_{=A} + \underbrace{512}_{=B} + \underbrace{119}_{=C} = 750$$

ب) نسبة عدد الطلاب العشرة الاوائل بالنسبة لعدد الطلاب الكلي هو: $\frac{10}{750} = \frac{1}{75}$ ، فإذا فرضنا ان

$\boxed{X}$ اقل علامة نالها طالب من العشرة الاوائل فإن:

$$P(X \geq x) = \frac{1}{75}$$

بالمعايرة

$$\Longrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{x-60}{10}\right) = 0.0133$$

$$\Longrightarrow P\left(Z \geqslant \frac{x-60}{10}\right) = 0.0133$$

$$\Longrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-60}{10}\right) = 0.0133$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{x-60}{10}\right) = 0.9866$$

من الجدول

$$\Longrightarrow \Phi\left(\frac{x-60}{10}\right) = \Phi(2.22)$$

$$\Longrightarrow \frac{x-60}{10} = 2.22 \Longrightarrow x = 82$$ درجة

اقل درجة نالها طالب من العشرة الاوائل

- بعض خواص المتغيرات العشوائية الطبيعية المستقلة:

- تذكرة: نقول عن متغيرين عشوائيين X_1 و X_2 أنهما مستقلان عشوائيًا إذا تحقق:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

1- إذا كان: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ومستقلان عشوائيًا

فإن:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$$

حيث a_1 و a_2 ثابتان حقيقيان ويمكن تعميم النتيجة من أجل مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, \dots, X_n$

$$\sum a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)$$

2- إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة بمتوسط μ وتباين σ^2 أي أن $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ من أجل $1 \le i \le n$ فإن

$a_i = 1$, $\mu_i = \mu$, $\sigma_i = \sigma$ حيث

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

لأن $\mu_y = \sum a_i \mu = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n\mu$

و $\sigma_y^2 = \sum a_i^2 \sigma_i^2 = (a_1^2 + \dots + a_n^2)\sigma^2 = n\sigma^2$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

برهان الوسطين:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E(\sum X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{=\mu}$$

كافي ←

$$= \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

كافي ←

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_i)}_{=\sigma^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

تمرين: بفرض أن أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعداً معيناً يتبع التوزيع الطبيعي $N(80, 100)$ والحد المسموح به لحمولة المصعد هو 350 كغ

أ) بصورة عشوائية يجتمع أربعة أشخاص في المصعد ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى:

ب) بصورة عشوائية هناك شخصاً واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاث أمثال وزنه ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى:

برهان الوسطين :

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E X_i}_{\mu}$$

كافي ←

$$= \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

كافي ←

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

تمرين : بفرض أن أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعداً معيناً يتبع التوزيع الطبيعي $N(80, 100)$ والحد المسموح به لحمولة المصعد هو 350 كغ

أ) بصورة عشوائية يجتمع أربعة أشخاص في المصعد ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى :

ب) بصورة عشوائية هناك شخصا واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاث أمثال وزنه ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى :

$$\overset{\text{بالمعايرة}}{=} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{87.5-80}{10}\right) = 1 - \Phi(0.75)$$
$$= 1 - 0.7734$$
$$= 0.2266$$

مبرهنة النهاية المركزية :

إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعاً التوزيع نفسه بتوقع μ وتباين σ^2 محدودين ($\sigma^2 \neq 0$) فإن

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{مقارب تقريباً}}{\approx} N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

ملاحظة: يكون التقريب جيداً عندما : $n \geq 30$

تعريف : العينة العشوائية :

نقول عن مجموعة من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \dots X_n$

إنها عينة عشوائية لمتغير عشوائي $X \sim F_X(t)$

إذا حققت الشرطين :

1) $X_i \sim F_X(t)$

2) المتغيرات X_i مستقلة فيما بينها :

$$f_{X_1, X_2, \dots X_n}(x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

مثال: إذا كانت $X_1, \dots, X_n$

عينة عشوائية لمتغير عشوائي X

حيث: $X \sim Poiss(\lambda = 2)$

فإذا كان: $Y_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$

أوجد $P(190 < Y_{100} < 210)$

الحل: حسب مبرهنة النهاية المركزية وبما أن: $100 = n \geq 30$

فإن:

$$Y_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

حيث $n = 100$

$$\mu = E(X_i) = \lambda = 2$$

$$\sigma^2 = Var(X_i) = \lambda = 2$$

أي أنّ:

$$Y_{100} \simeq N((100)(2), (100)(2))$$

$$= N(200, 200)$$

$$\Rightarrow P(190 < Y_{100} < 210)$$

$$\overset{\text{التحويل Z}}{=} P\left(\frac{190 - 200}{10\sqrt{2}} < \underbrace{\frac{Y_{100} - \mu_y}{\sigma_y}}_{N(0,1)} < \frac{210 - 200}{10\sqrt{2}}\right)$$

$= P(-0.71 < Z < 0.71)$

$= \phi(0.71) - \phi(-0.71)$

$= \phi(0.71) - (1 - \phi(0.71))$

$= 2\phi(0.71) - 1$

مثال (هام) : إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين طبيعيين مستقلين وكان ،

$X_1 \sim N(3, 16)$

$X_2 \sim N(5, 9)$

فاحسب :

أ) $P(X_1 < X_2)$

ب) $P(3X_1 - 2X_2 > 1)$

الحل: أ) $P(X_1 < X_2) = P(X_1 - X_2 < 0)$

لكن

$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(3 - 5, 16 + 9)$

$\Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(-2, 25)$

$$\Rightarrow P(X_1 - X_2 < 0)$$

[illegible]

$$= P\left(\underbrace{\frac{(X_1 - X_2) - \mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} < \frac{0-(-2)}{5}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{2}{5}\right) = \Phi(0.4) = 0.6554$$

$$Y = 3X_1 - 2X_2$$

$$\sim N(3\mu_1 - 2\mu_2, 9\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow Y \sim N(3(3) - 2(5), 9(16) + 4(9))$$

$$\Rightarrow Y \sim N(-1, 180)$$

[illegible]

$$\Rightarrow P(Y > 1) = P\left(\frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} > \frac{1-(-1)}{\sqrt{180}}\right)$$

$$P(Z > 0.15)$$

$$= 1 - \Phi(0.15) = 1 - 0.5596$$

$$= 0.4404$$