محاضرة رابعة

التاريخ : ٧ / ٤ / ١٢ - ٢٠

الخميس : /

تحليل "٥" ١/

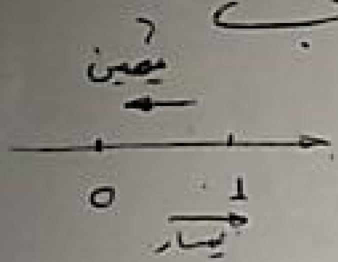
الموضوع : حل التمارين / د. ت. م /

---

<u>مثال (١)</u> : إذا كانت f دالة معرفة على $[0,1]$ كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

والمطلوب :




١) بين أن f مستمرة قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ .

٢) = = = = من اليمين عند 0 .

٣) = = = = من اليسار عند 1 .

٤) هل f د. ت. م أم لماذا ؟

---

<u>مثال (٢)</u> : إذا كانت f دالة معرفة على $[0,\frac{1}{2}]$ كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{\ln x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

والمطلوب .

١) بين أن f دالة مستمرة على $[0,\frac{1}{2}]$ .

٢) وضح أن f دالة متزايدة على $[0,\frac{1}{2}]$ .

٣) هل f د. ت. م ! لماذا ؟ ثم أوجد $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f$ .

٤) بين أن f دالة لا تحقق شرط ليبشتز .

---

<u>مثال (٣)</u> : هل الدالة $f(x)=x-x^2$ د. ت. م على $[0,1]$ , $[1,5]$ .

بين ذلك ثم أوجد $\overset{5}{\underset{0}{V}} f$ .

---

<u>مثال (٤)</u> : هل الدالة $f(x)=x^2-\frac{1}{1+x}$ د. ت. م على $[0,1]$ وما هو تغيرها الكلي.

---

<u>مثال (٥)</u> : هل الدالة $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ د. ت. م على $[2,+\infty[$ وما هو تغيرها الكلي

---

<u>مثال (٦)</u> : هل الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ د. ت. م على المجال $[0,b]$ ؟ ولماذا ؟

$$[0,1] \leftarrow f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

(1) f مستمرة على $]0,1[$ لأن:

(I) $x_0\in\,]0,1[$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x^2\sin\frac{\pi}{x}=x_0^2\sin\frac{\pi}{x_0}=f(x_0)$$

(II) $x\in\,]0,1[$

$$f'(x)=2x\sin\frac{\pi}{x}+x^2\cdot\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}$$

(III) ج)

$$f'(0+0)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^{\cancel{2}}\sin\frac{\pi}{x}-0}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0} x\sin\frac{\pi}{x} \quad : \begin{cases} \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq 1 \\ \lim_{x\overset{>}{\to}0} x=0 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(0+0)=0}$$

(٣ ب)

في x الأصل [illegible]

المشتقة x تبرهن

$$f'(1-0)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$\boxed{\sin\pi=0}$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-\cancel{\sin\pi}}{x-1} \;?\; : \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\boxed{f'(1-0)=\pi}$$

(٤ نبرهن أن

$$|f'(x)|=\left|2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}\right|$$

$$|f'(x)|\leq\left|2x\sin\frac{\pi}{x}\right|+\left|\pi\cos\frac{\pi}{x}\right|\leq 2+\pi \quad \forall x\in[0,1]$$

وهذا يعني أن f د. ت. ع م على $[0,1]$.

بين أن f د. لا تحقق شرط لبشتز

حل : $f \to [0, \frac{1}{2}]$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

① بين أن f دالة مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$ .

(I) $x_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln x_0} = f(x_0)$$

(II) $x_0 = 0$

$$f(0+0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -\frac{1}{\ln x} = 0 = f(0)$$

(III) $x_0 = 1/2$

$$f(\tfrac{1}{2}-0) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1/2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1/2} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = f(\tfrac{1}{2})$$

وبالتالي f د. مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$ .

---

② f د. متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$ . $x \in ]0, \frac{1}{2}[$

$$f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\tfrac{1}{2}) &= -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}}$$

| $x$ | $0$ | | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | + | + |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\frac{1}{\ln 2}$ |

---

③ بما أن f د. متزايدة (أي أنها مطردة) وبالتالي فهي د. ت. م

$$\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left| \frac{1}{\ln 2} - 0 \right| = \frac{1}{\ln 2}$$

والتغير الكلي

٤) بين أن f د. لا تحقق شرط ليبشتز.

شرط ليبشتز يقول أن

$\forall u, v \in [0, \frac{1}{2}]$

$\exists L > 0 \quad : \quad |f(u) - f(v)| \leq L|u - v|$

بما أننا نريد إثبات أن f لا تحقق شرط ليبشتز

أي أنه يوجد u و v بحيث لا يمكن إيجاد L يحقق

الشرط. أي أن $\dfrac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \not\leq L$

نأخذ $\begin{cases} u = x \xrightarrow{>} 0 \\ v = 0 \end{cases}$ بحيث $u, v \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} -\frac{1}{x \ln x} = -\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} : \frac{\infty}{\infty}$$

$$= -\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

وبالتالي لا يوجد $L > 0$ بحيث $\dfrac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} < L$

إذاً f د. لا تحقق شرط ليبشتز.

(٤) هل الدالة $f(x) = x - x^2$ د.ت.م على $[0,1]$ ، $[1,5]$

بين ذلك ؟ ثم أوجد $\overset{5}{\underset{0}{V}} f$ .

أولاً : $\boxed{1} \to [0,1]$ $\quad f(x) = x - x^2$

نلاحظ أن $f_1(x) = x$ دالة متزايدة على $[0,1]$ فهي د.ت.م

وأن $f_2(x) = x^2$ = = = $[0,1]$ = = = =

والفرق دالتين كل منهما ذات تغير محدود هي د.ت.م

وبالتالي $f(x) = x - x^2$ د.ت.م على $[0,1]$ .

---

$\boxed{2} \to [1, 5]$ $\quad f'(x) = 1 - 2x$

$$|f'(x)| = |1 - 2x| \leq 1 + 2|x| \leq 1 + 10 = 11$$

$$|f'(x)| \leq 11 \quad : x \in [1,5]$$

وبالتالي $f(x)$ د.ت.م على $[1,5]$

---

$\boxed{3}$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0$

$$x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ $\;0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $\frac{1}{4}$ ↘ | $0$ ↘ | $-20$ ↘ | $-\infty$ |

طريقة ١

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f + \overset{5}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f = |f(\tfrac{1}{2}) - f(0)| + |f(\tfrac{1}{2}) - f(5)|$$

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = |\tfrac{1}{4} - 0| + |\tfrac{1}{4} + 20| = 20 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{41}{2}$$

طريقة ٢

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{5}{\underset{1}{V}} f \;:\; \overset{1}{\underset{0}{V}} f = \int_0^1 |2x - 1|\, dx \quad \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\, dx = [x - x^2]_0^{\frac{1}{2}} + [x^2 - x]_{1/2}^1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\overset{5}{\underset{1}{V}} f = \int_1^5 |2x - 1|\, dx = \int_1^5 (2x-1)\, dx = [x^2 - x]_1^5 = 25 - 5 = 20$$

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = 20 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{41}{2} .$$

(٤) : هل الدالة $f(x) = x^2 - \frac{1}{1+x}$ د. ت. م على $[0,1]$
وما هو $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$ .

الحل: $f'(x) = 2x - \frac{-1}{(1+x)^2} = 2x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ على $[0,1]$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ ، الدالة $f$ متزايدة على $[0,1]$.

وبالتالي هي د. ت. م على $[0,1]$ (حسب نظرية).

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = |f(1) - f(0)| = \left|1 - \frac{1}{2} - (0-1)\right| = \frac{3}{2}.$$

---

مثال (٥) : هل الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ د. ت. م على $[2,+\infty[$ ، ولماذا
ثم أوجد $\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f$ .

الحل:

$$f'(x) = -\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ ..... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + + + | | 0 | — | — | — | — |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | | $+\infty$ | ↘ | | | |

أي أن الدالة $f$ متناقصة على $[2,+\infty[$

وبالتالي $f$ د. ت. م على $[2,A]$ .

$$\overset{+\infty}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A \to +\infty} |f(A) - f(2)| = \lim_{A \to +\infty} \left| \underbrace{\cancel{\frac{1}{(A+1)^2}}}_{\text{صفر}} - \frac{1}{9} \right|$$

$$= \frac{1}{9}$$

و. هـ. م.

(٦) : بيّن أن الدالة $f$ المرنة على $[0,b]$ كما يلي

د. ت. م $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

الحل :

$0 < b < +\infty$

$x > 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$|f'(x)| = \left|2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right| \leq \left|2x \sin \frac{1}{x}\right| + \left|\cos \frac{1}{x}\right|$$

$0 < x < b \qquad \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$

$$|f'(x)| \leq 2b + 1$$

نفرض أن

$$|f'(x)| \leq 2b + 1$$

وذلك $\forall x \in [0,b]$

وبالتالي $f$ د. ت. م على $[0,b]$

~~كما يمكن القول أن $f$ د. ت. م على $[0,+\infty[$ لأنها دالة ذات تغير محدود على مجال جزئي مغلق منه.~~

المحاضرة الخامسة

السبت : ٣١/٣/٢٠١٢م

الموضوع : حل تمارين د. ت. م.

---

**مثال (١)** : أوجد التكامل للدالة f المعرفة على [0,1] كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1-x & 0<x<1\\ 5 & x=1\end{cases}$$

ج ١/٢ .

---

**مثال (٢)** : أوجد التكامل للدالة f على [0,2] المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 5 & x=1\\ x+3 & 1<x\le 2\end{cases}$$

ج ١/٣

---

**مثال (٣)** : إذا كانت f د. ت. م على [a,b] فإن |f| د. ت. م على [a,b]

ولكن العكس ليس بالضرورة . وضح ذلك بمثال

إذا كانت f معرفة على [0,1] كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ -1 & x\notin Q\end{cases}$$

بين أن |f| د. ت. م على [0,1] .

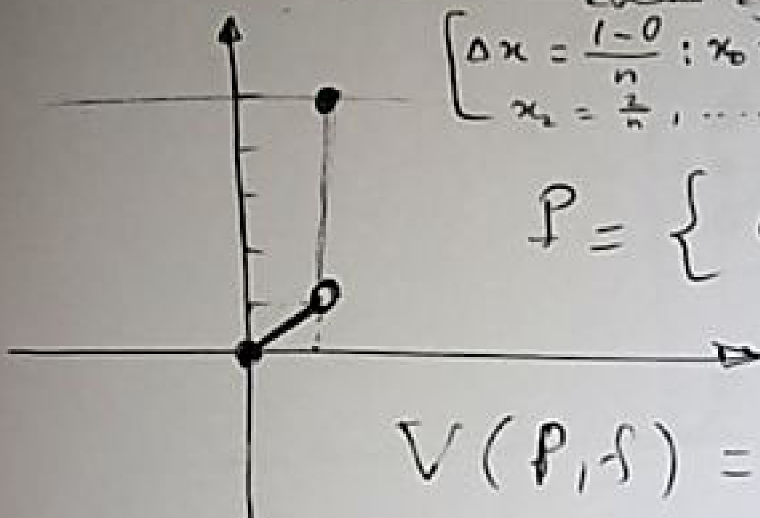
ولكن f ليست د. ت. م على [0,1] .

4/

<u>(١)</u> : أوجد التغير الكلي للدالة $f$ المعرفة على $[0,1]$ كما يلي :

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$



تجزئة نونية منتظمة

الحل ⟸ نأخذ التجزئة $\left[\Delta x = \frac{1-0}{n} ; x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \dots \ x_n = n\cdot\frac{1}{n}\right]$

$$P = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots x_{n-1} < x_n = 1 \}$$

$$V(P,f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |1 - x_1 - 0| + |(1 - x_2) - (1 - x_1)| + \cdots |1 - x_{n-1} - (1 - x_{n-2})| + |5 - (1 - x_{n-1})|$$

$$= |1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots |x_{n-2} - x_{n-1}| \cdots + |4 + x_{n-1}|$$

بناءً على التجزئة P نكتب

$$= 1 - x_1 + \cancel{x_2} - x_1 + x_3 - \cancel{x_2} + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + 4 + x_{n-1}$$

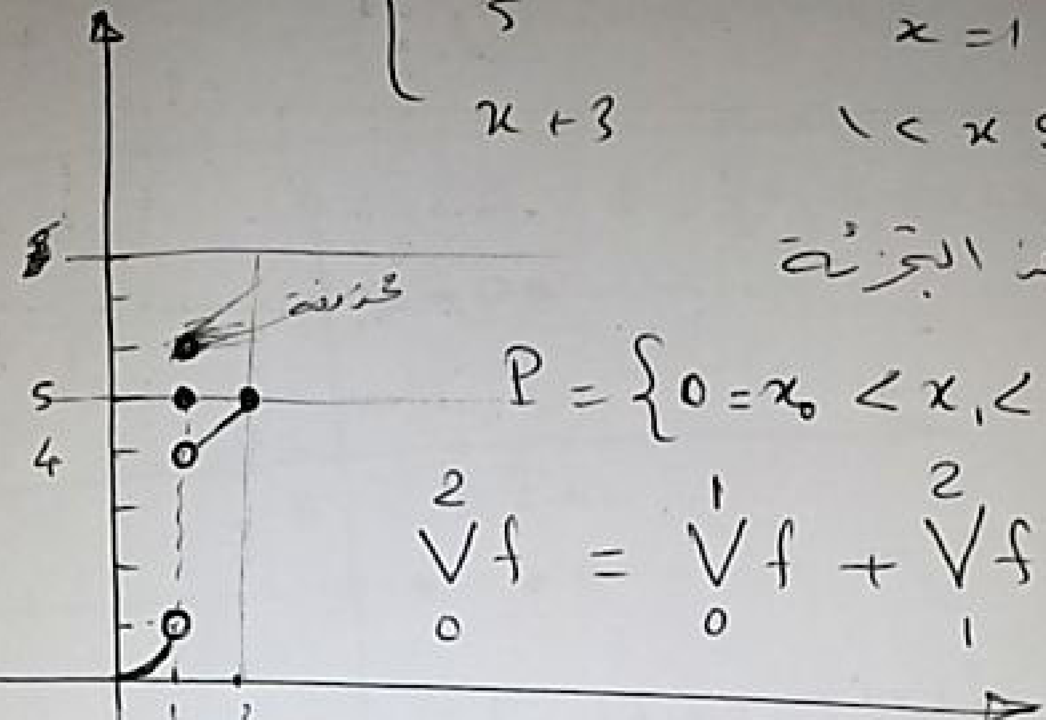
$$V(f,P) = 5 - 2x_1 + 2x_{n-1} = 5 + 2(x_{n-1} - x_1)$$

$\boxed{1}$ طريقة $\overset{5}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P} (V(f,P)) = 7$

$\boxed{2}$ طريقة $\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n \to \infty} \left[5 + 2\left((n-1)\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{2n-3}{n}\right] = 5 + 2 = 7$

س٦: أوجد التغير الكلي للدالة $f$ على $[0,2]$ المعرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x < 1 \\ 5 & x=1 \\ x+3 & 1<x\le 2\end{cases}$$




الحل: نأخذ التجزئة

$P=\{0=x_0<x_1<x_2\cdots x_{n-1}<x_n\}$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f=\overset{1}{\underset{0}{V}} f+\overset{2}{\underset{1}{V}} f$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f=\sup_P V(P,f)$$

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$V(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$V(f,P)=|x_1^2-0|+|x_2^2-x_1^2|+\cdots|5-x_{n-1}^2|$$

$$V(f,P)=\cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}-\cancel{x_1^2}+x_3^2-\cancel{x_2^2}+\cdots\cancel{x_{n-1}^2}-x_{n-2}^2+5-\cancel{x_{n-1}^2}$$

$$V(f,P)=5 \Longrightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}} f=5$$

---

$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f=\sup_P V(f,P) \quad : P=\{1=x_0<x_1<x_2\cdots x_{n-1}<x_n=2$$
$$1<1+\tfrac{1}{n}<\cdots \qquad <1+\tfrac{n-1}{n}<1+\tfrac{n}{n}$$

$$V(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|x_1+3-5|+|x_2+\cancel{3}-(x_1+3)|+\cdots|x_n+\cancel{3}-(x_{n-1}+3)|$$

$$=2-x_1+\cancel{x_2}-x_1+x_3-\cancel{x_2}+\cdots \overset{2}{x_n}-x_{n-1}$$

$$=4-2x_1 \quad \xrightarrow{\text{طريقة}} \overset{2}{\underset{1}{V}} f=\sup_P(4-2x_1)=2$$

طريقة ثانية $\overset{2}{\underset{1}{V}} f=\lim_{n\to\infty}\left(4-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=2 \Rightarrow \overset{2}{\underset{0}{V}} f=5+2=7$

٤

(س٣): لو كانت f دالة معرفة على $[0,1]$ كالتالي

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

بين أن $|f|$ د. ت. م بينما $f$ ليست دالة ذات تغير محدود

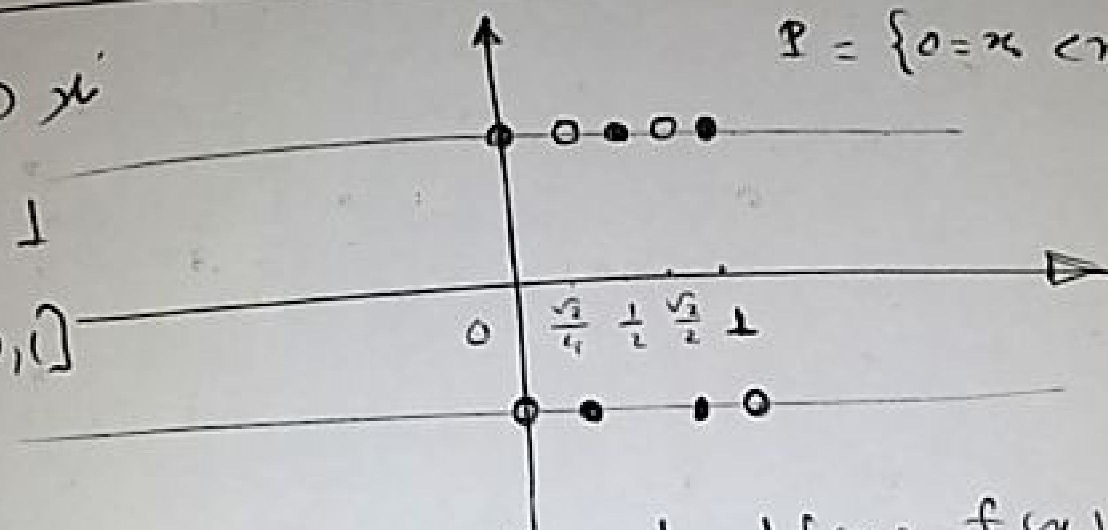
---

$P=\{0=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=1\}$

نفرض $x$

$|f(x)|=1$

$\forall x\in[0,1]$




$$V(|f|,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|1-1|+|1-1|+\cdots+|1-1|=0$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}|f|=0$$

---

$$P=\{0=x_0<x_1<x_2\cdots x_{n-1}<x_n=1\}$$

$$x_0\in\mathbb{Q},\ x_1\in\mathbb{Q}',\ x_2\in\mathbb{Q},\ \ldots,\ x_{n-1}\in\mathbb{Q}',\ x_n\in\mathbb{Q}$$

$$V(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|-1-1|+|1-(-1)|+\cdots+|1-(-1)|$$

$$=2+2+\cdots+2=2n$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}f=\lim_{n\to\infty}(2n)=+\infty$$

ومنها يكون $f$ ليست د. ت. م.

## تمارين الفصل الثاني ١٢

① نثبت أن ١١١

$$I_1 = (s)\int_0^2 x^2\, d(\ln(x+1)) = \ln 3$$

$g(x) = \ln(x+1)$ $\qquad x+1>0$

نفرض أن $g(x)$ قابل للإشتقاق م $\qquad x > -1$

على $]-1,+\infty[$

$$I_1 = \int_0^2 x^2 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^2-1+1}{x+1}\, dx = \int_0^2 (x-1)\,dx + \int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$

$$I_1 = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 + \Big[\ln|x+1|\Big]_0^2$$

$$I_1 = [2 - \cancel{2} \cancel{- 0}] + \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

---

$$I_2 = (s)\int_0^{\pi/2} x\, d(\sin x) = \frac{\pi}{2} - 1$$

نفرض أن $g(x) = \sin x$ قابل للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $+$ | $\cos x$ |
| $1$ | $-$ | $\sin x$ |
| $0$ | | $-\cos x$ |

$$= \Big[x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}(1) - 0\right] + [0 - 1] = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = (S)\int_{-1}^{1} x \, d(\arctan x) = 0$$

نلاحظ أن $g(x) = \arctan x$ قابل للاشتقاق على $]-1,1[$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{x^2+1} dx$$

نلاحظ أن $\frac{x}{x^2+1}$ تابع فردي ومتناظر

على $[-1,1]$ : $I_3 = 0$

---

ج / ١١١ بفرض أن

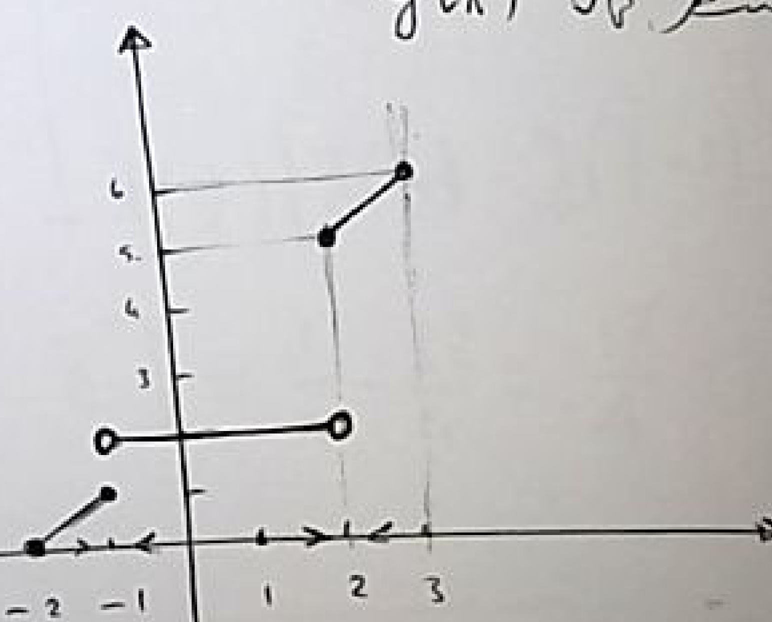
$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 2 \\ x+3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

فأثبت أن :

حيث أن $f(x) = x$

ارسم لك $g(x)$

$$I = (S)\int_{-2}^{3} x \, d(g(x)) = +6$$




$$I = \int_{-2}^{-1} x(1)\,dx + \int_{-1}^{2} x(0)\,dx$$

$$+ \int_{2}^{3} x(1)\,dx +$$

$$f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$$

$$f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{2}^{3} + (-1)(2-1) + (2)(5-2)$$

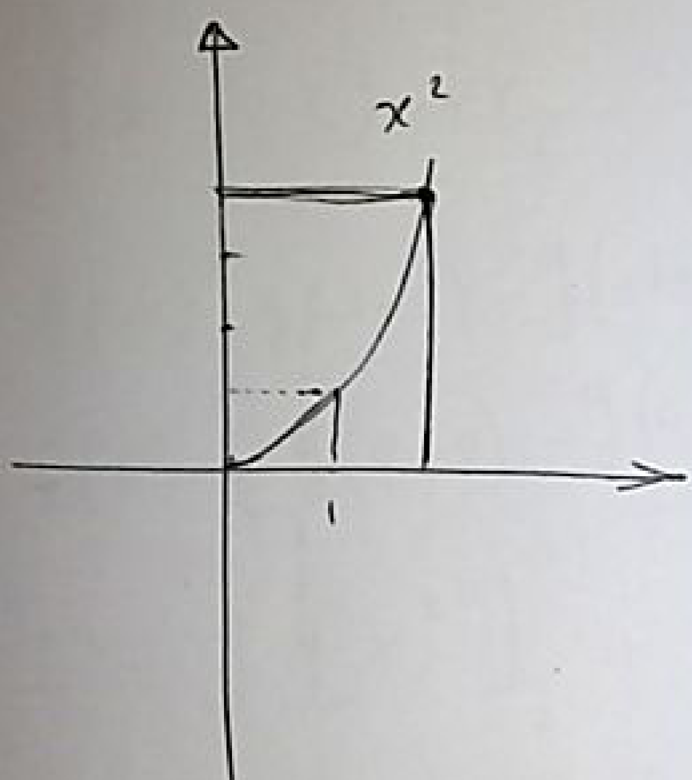
$$= \frac{1}{2}\left[1-4\right] + \frac{1}{2}\left[9-4\right] - 1 + 6 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 5 = 6$$

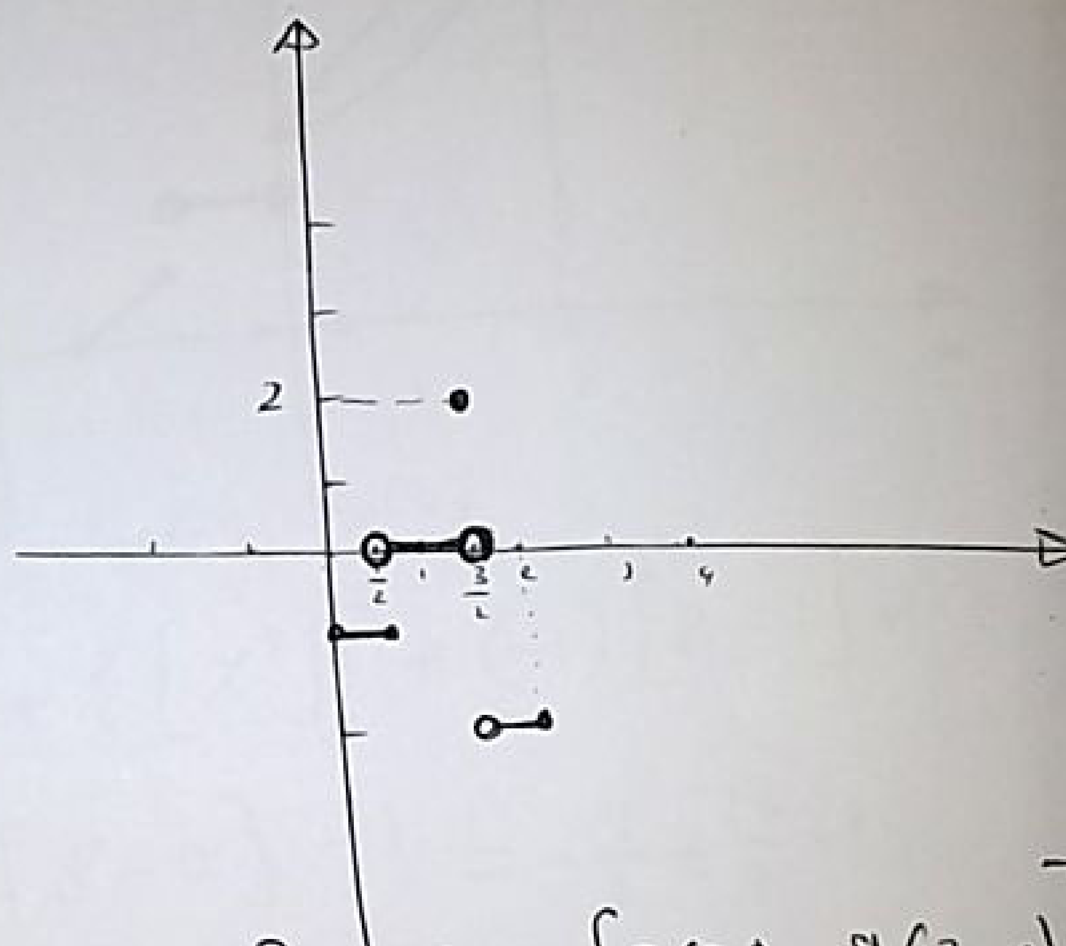
$$g(x)=\begin{cases} -1 & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \\ 2 & x=\frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2}<x\le 2 \end{cases}$$ اذا كان

٢ / ٢١٢

$f(x) = x^2$

$$I = (S)\int_0^2 x^2\, d(g(x)) = \frac{-17}{4}$$ فاثبت ان



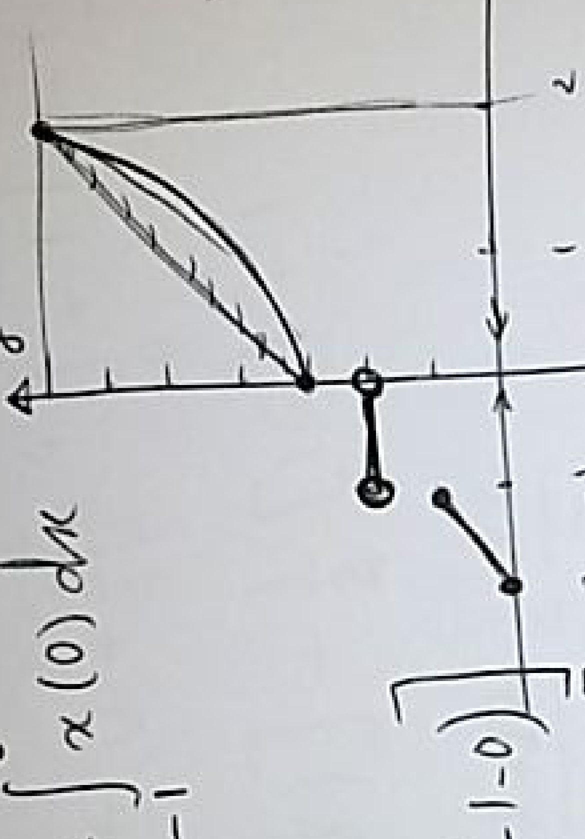

$$I = f\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[g\left(\tfrac{1}{2}+0\right)-g\left(\tfrac{1}{2}-0\right)\right]+f\left(\tfrac{3}{2}\right)\left[g\left(\tfrac{3}{2}+0\right)-g\left(\tfrac{3}{2}-0\right)\right].$$

$$I = \frac{1}{4}\left[0-(-1)\right]+\frac{9}{4}\left[-2-0\right] = \frac{1}{4}-\frac{18}{4} = \frac{-17}{4}$$

$f(x) = x \qquad g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x \le -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2+3 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

$I = (S)\int_{-2}^{2} x \, d(g(x)) = \frac{17}{6}$ . أثبت أن

(a) $I = \int_{-2}^{-1} x(1)\,dx + \int_{-1}^{0} x(0)\,dx$




$+ \int_{0}^{2} x(2x)\,dx$

$+ f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$

$+ f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$

$I = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^2 + (-1)\left[2-1\right] + 0$

$I = \frac{1}{2}\left[1-4\right] + \frac{2}{3}\left[8-0\right] - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{16}{3} - 1$

$= -\frac{5}{2} + \frac{16}{3} = \frac{-15+32}{6} = \frac{17}{6}$ .

---

أثبت أن

(b) $J = (S)\int_{-2}^{2} x^2 \, d(g(x)) = \frac{34}{3}$

(c) $K = (S)\int_{-2}^{2} (x^2+1)\, d(g(x)) = \frac{56}{3}$

5

$$\overbrace{\phantom{x}}^{f(x)\,-\,x}$$

$$J = \int_{-2}^{-1} x^2(1)\,dx + \int_{-1}^{0} x^2(0)\,dx +$$

$$\int_{0}^{2} x^2(2x)\,dx + f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$$

$$+ f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$$

$$J = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{2}{4}\left[x^4\right]_{0}^{2} + 1\left[2-1\right] + 0$$

$$J = \frac{1}{3}\left[-1-(-8)\right] + \frac{1}{2}\left[16\right] + 1$$

$$J = \frac{7}{3} + \frac{9}{1} = \frac{7+27}{3} = \frac{34}{3}$$

$1 \quad 3$

$f(x) = x^2 + 1$

$$K = \int_{-2}^{-1} (x^2+1)(1)\,dx + \int_{-1}^{0} \cancel{(x^2+1)}(0)\,dx$$

$$+ \int_{0}^{2} (x^2+1)(2x)\,dx + f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$$

$$+ f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$$

$$K = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_{0}^{2} + 2\left[2-1\right]$$

$$+ (1)\left[3-2\right]$$

$$K = \left[\left(\frac{-1}{3} - 1\right) - \cancel{\left(\frac{-8}{3} - 2\right)}\right] + \left[(8+4) - (0)\right] + 2 + 1$$

$$K = \cancel{\frac{4}{3}} + 12 + 3 = \cancel{\phantom{xxx}} = 16 + \frac{7}{3} = \frac{55}{3}$$

$$\frac{7}{3} + 1$$

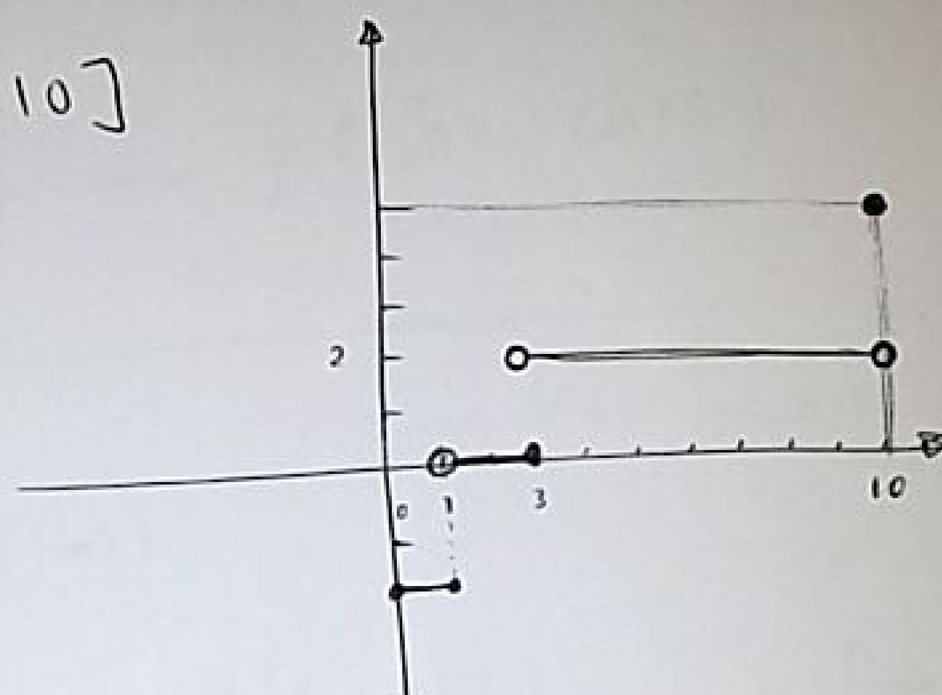
$$\frac{\frac{16}{3}}{43}$$

6

بفرض ان

$$g(x) = \begin{cases} -2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 1 < x \le 3 \\ 2 & 3 < x < 10 \\ 5 & x = 10 \end{cases}$$

$f(x) = x^2 \to [0, 10]$




$$I = (S)\int_0^{10} x^2 \, d\,g(x)$$

$$= f(1)\left[g(1+0) - g(1-0)\right] + f(3)\left[g(3+0) - g(3-0)\right] + f(10)\left[g(10) - g(10-0)\right]$$

$$I = 1\left[0 - (-2)\right] + 9\left[2 - 0\right] + 100\left[5 - 2\right]$$

$$I = 2 + 18 + 300 = 320$$

---

$$J = \int_0^{10} g(x)\, d(f(x)) = \left[f(x)\, g(x)\right]_0^{10} - \int_0^{10} f(x)\, d(g(x))$$

$$= \left[f(10)\, g(10) - f(0)\, g(0)\right] - 320$$

$$= (100)(5) - 0 - 320 = 500 - 320 = 180$$

احسب تكاملات

$$I_1 = \int_0^1 x \, d\left(\ln(x^2+1)\right) \longrightarrow 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin 2x \, d(x^2) \longrightarrow -\pi$$

$$I_3 = \int_{-1}^{5} \operatorname{arctg} x \, d(6x) \longrightarrow 30 \operatorname{arctg} 5 - \frac{3\pi}{2} - 3\ln 1$$

$$I_4 = \int_{-8}^{2} \frac{1}{2} \, d\left[\operatorname{ch} 2x\right] \longrightarrow \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 4 - \operatorname{ch} 16)$$

---

احسب التكاملات

$$I = (S)\int_{-5}^{1} f(x)\, d(g(x))$$

$$J = (S)\int_{-5}^{1} g(x)\, d(f(x))$$

حيث أن $f(x) = |x|$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -5 \le x \le -1 \\ x^2 & -1 < x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ \ln(x+2) & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

---

بين أن التكامل $\int_{-1}^{5} f(x)\, d\,g(x)$ غير موجود إذا علمت أن

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -2 & x = 0 \end{cases}$$

$-3\ln 13$

8/

$$I_1 = (S)\int_0^1 x \, d\ln(x^2+1) = (R)\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$= (R)\int_0^1 \frac{2(x^2+1)-2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - 2\,\frac{1}{x^2+1}\right]dx = 2\left[x\right]_0^1 - 2\left[\arctan x\right]_0^1$$

$$= 2 - 2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = 2 - \frac{\pi}{2}$$

---

$$I_2 = (S)\int_0^{\pi} \sin 2x \, d(x^2) \quad : \quad d(x^2) = 2x\,dx$$

$$= (R)\, 2\int_0^{\pi} x\sin 2x \, dx$$

$$\begin{array}{ccc} x & & \sin 2x \\ & \oplus & \\ 1 & & -\frac{1}{2}\cos 2x \\ & \ominus & \\ 0 & & -\frac{1}{4}\sin 2x \end{array}$$

$$I_2 = 2\left\{-\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{2}\left[\pi - 0\right] + \frac{1}{4}\left[0 - 0\right]\right\} = -\pi$$

---

$$I_3 = \int_{-1}^{5} \arctan x \, d(6x) = 6\int_{-1}^{5} \underbrace{\arctan x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv}$$

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

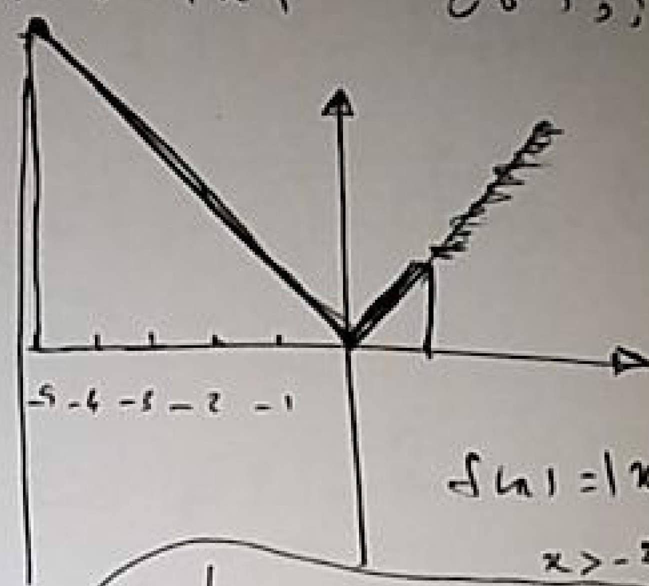
$$I_3 = 6\left[x\arctan x\right]_{-1}^{5} - 3\int_{-1}^{5} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 6\left[5\arctan 5 + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] - 3\left[\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{5}$$

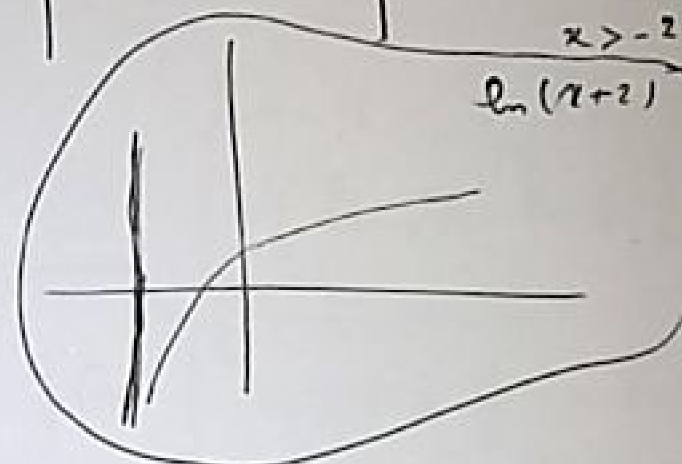
$$= 30\arctan 5 + \frac{3\pi}{2} - 3\left[\ln 26 - \ln 2\right] = 30\arctan 5 - 3\ldots - 3\ln 13$$

(s) $\int_{-5}^{1} g(x)\, d f(x)$ (s) $\int_{-5}^{1} f(x)\, d g(x)$ احسب

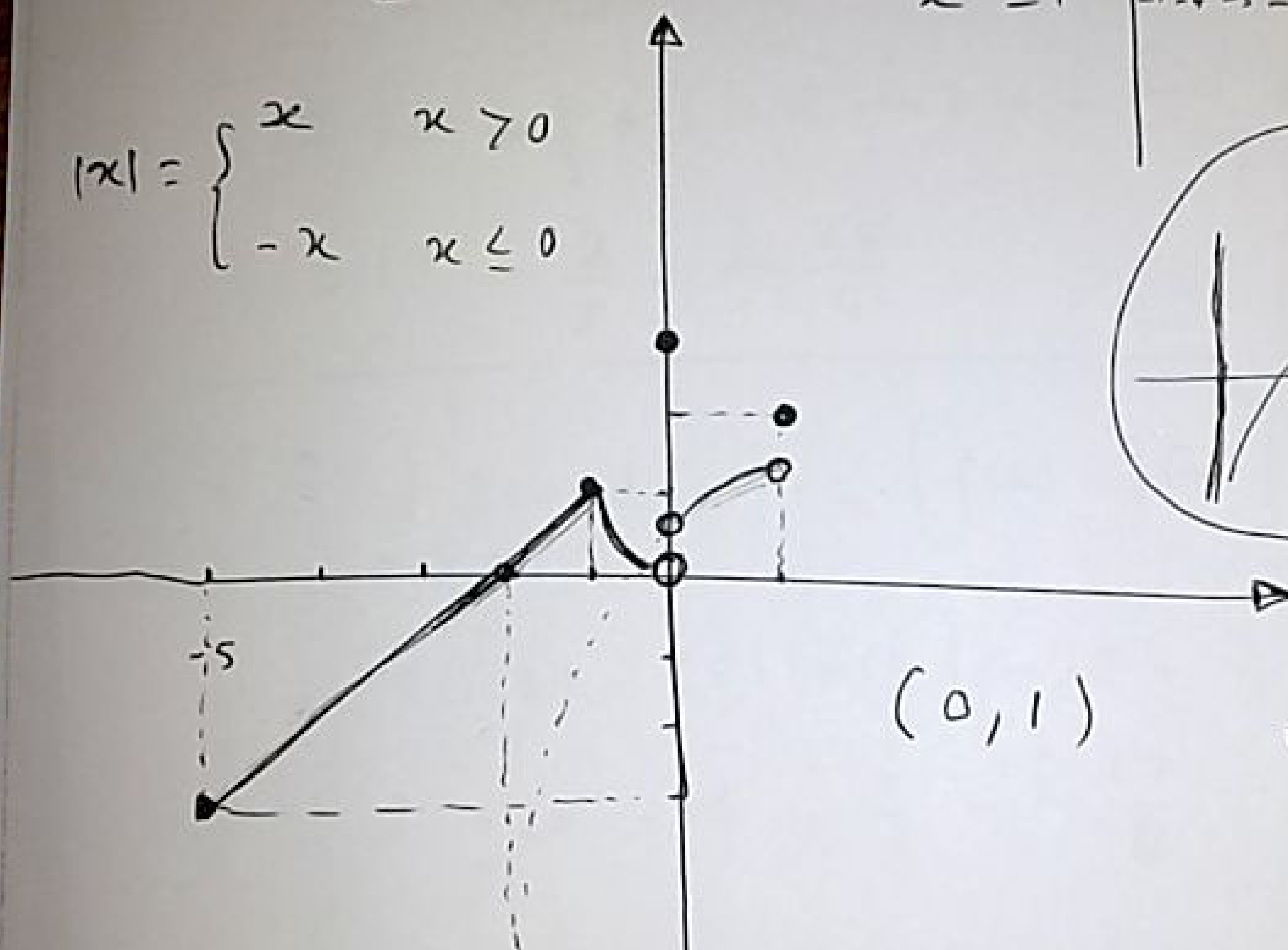
$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -5 \le x \le -1 \\ x^2 & -1 < x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ \ln(x+2) & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \quad , \quad f(x) = |x|$$




$f(x) = |x|$




$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$$




$(0, 1)$ نقاط الانفصال

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & -5 < x < -1 \\ 2x & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

كمول

محدود

س

$[-5, 1]$

$$(s)\int_{-5}^{1} f(x)\, d g(x) = \int_{-5}^{-1} -x\,(1)\, dx + \int_{-1}^{0} \cancel{x}(2x)\, dx$$

$$+ \int_{0}^{1} x \cdot \frac{1}{x+2}\, dx + \underbrace{f(0)}_{\text{صفر}}\left[g(0+0) - g(0-0)\right] + f(1)\left[g(1) - g(1-0)\right]$$

10/ $I = \int_{-5}^{1} f(x)\, dg(x) = -\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-5}^{-1} - \frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{0}$

$+ \left[x\right]_0^1 - 2\left[\ln(x+2)\right]_0^1 + 0 + 1\left[2 - \ln(3)\right]$

$I = -\frac{1}{2}\left[1 - 25\right] - \frac{2}{3}\left[0+1\right] + \left[1-0\right] - 2\left[\ln 3 - \ln 2\right]$

$+ 2 - \ln 3$

$= 12 - \frac{2}{3} + 1 - 2\ln 3 + 2\ln 2 + 2 - \ln 3$

$= 15 - \frac{2}{3} - \ln\frac{27}{4}$

$\boxed{\begin{array}{l}\ln 4 - \ln 27 \\ -(\ln 27 - \ln 4)\end{array}}$

---

$J = \int_{-5}^{1} g(x)\, df(x) = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_{-5}^{1} - 15 + \frac{2}{3} + \ln\frac{27}{4}$

$= \left[(1)(2) - (5)(-3)\right] - 15 + \frac{2}{3} + \ln\frac{27}{4}$

$= 2 + \cancel{15} - \cancel{15} + \frac{2}{3} + \ln\frac{27}{4} = \frac{8}{3} + \ln(27/4)$

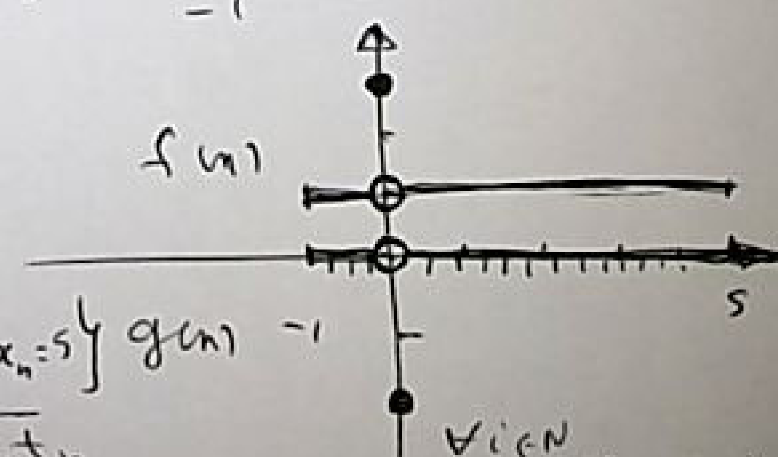
تمرين :

---

بين أن التكامل $\int_{-1}^{5} f\,dg$ غير موجود حيث

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -2 & x = 0 \end{cases}$




نأخذ تجزئة

$P = \{ -1 = x_0 \underset{t_1}{<} x_1 \underset{t_2}{<} x_2 \cdots < x_{i-1} \underset{t_i}{<} \overset{0}{x_i} \underset{t_{i+1}}{<} x_{i+1} < \cdots \underset{t_n}{<} x_n = 5 \}$

$\forall i \in N$

$S(P, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$

① $x_i \neq 0 \Rightarrow S(P, f, g) = 0$

② $x_i = 0 \Rightarrow t_i < 0$, $t_{i+1} > 0$

$= 0 + 0 \cdots + 0 + f(t_i)\left[g(0) - g(x_{i-1})\right]$

$+ f(t_{i+1})\left[g(x_{i+1}) - g(0)\right] + 0 + 0 \cdots$

$= f(t_i)\left[-2 - 0\right] + f(t_{i+1})\left[0 - (-2)\right] = 2\left[f(t_{i+1}) - f(t_i)\right] = 2\begin{cases} 0 & t_{i+1} \neq 0,\ t_i \neq 0 \\ 1-3 & t_i = \\ 3-1 & t_i \neq \end{cases}$

٢/

تمارين محلولة

1/ : بيّن أن الدالة $f(x) = \ln x$ متزايدة على $]0,+\infty[$

وأن الدالة $g(x) = 1 - e^{2x}$ متناقصة .

الحل: التابع معرف ومستمر $1)\ f(x) = \ln x$

على $]0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ f متزايدة

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+ \quad + \quad +$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

صح

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$$

---

$2)\ g(x) = 1 - e^{2x}$

التابع معرف ومستمر على $]-\infty,+\infty[ = \mathbb{R}$

$g'(x) = -2e^{2x} < 0 \Rightarrow$ g متناقصة

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $- \quad - \quad - \quad -$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - e^{2x}) = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{2x}) = 1 - (+\infty) = -\infty$$

6

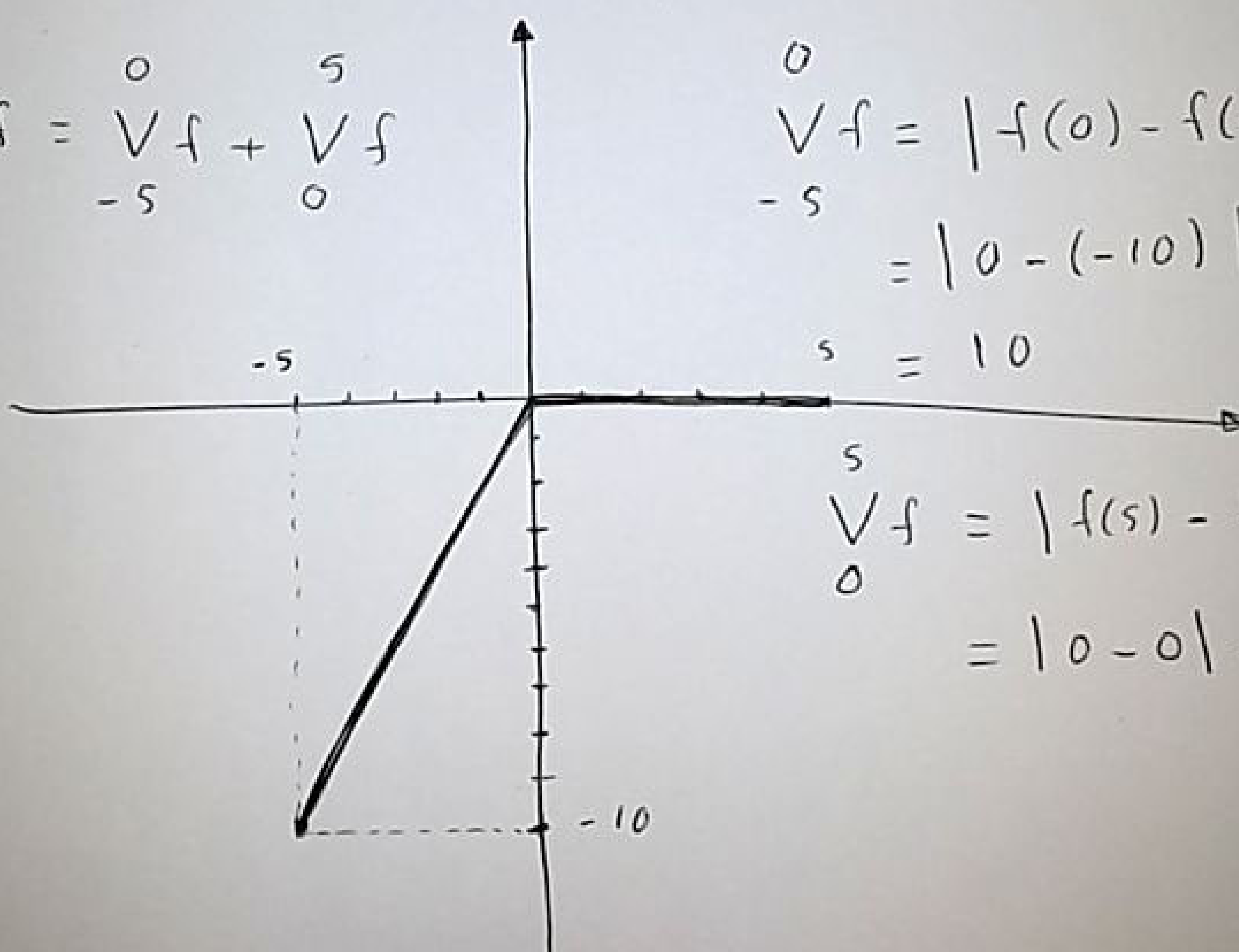
٥ / ج٥ : بين أية من الدوال ذات تغير محدود ، وأوجد طا التغير الكلي في كل من الحالات التالية $f(x) = x - |x|$ حيث $x \in [-5, 5]$

$$|x| = \begin{cases} x & 5 \geq x \geq 0 \\ -x & -5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - x & 0 \leq x \leq 5 \\ x - (-x) & -5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 5 & \text{متزايدة} \\ 2x & -5 \leq x \leq 0 & \text{متزايدة} \end{cases}$$

$$\overset{5}{\underset{-5}{V}} f = \overset{0}{\underset{-5}{V}} f + \overset{5}{\underset{0}{V}} f$$




$$\overset{0}{\underset{-5}{V}} f = |f(0) - f(-5)|$$
$$= |0 - (-10)|$$
$$= 10$$

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = |f(5) - f(0)|$$
$$= |0 - 0| = 0$$

$$\overset{5}{\underset{-5}{V}} f = \overset{0}{\underset{-5}{V}} f + \overset{5}{\underset{0}{V}} f = 10 + 0 = 10 < \infty$$

f د.ت.م ، التغير الكلي 10 .

٢

٥ / ٥٢

بين أن f د. ت. م على [0,1] حيث

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$$

$$= x^2 - \left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

نلاحظ أن $x^2$ دالة متزايدة على $[0,1]$ . $\left[f'(x) = 2x \geq 0\right]$

= = $-\frac{1}{x+1}$ = = على $[0,1]$ . $\left[f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0\right]$ .

وبالتالي $f(x)$ تمثل على شكل فرق دالتين متزايدتين .

وبالتالي f د. ت. م على $[0,1]$ .

٤) بيّن أن $f$ ذ. ت. م على $(a,b)$ حيث $a<0,\ b>0$ ($\frac{5}{5}$

$$f(x) = x - e^x$$

$$f'(x) = 1 - e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$$

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | $0$ | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | $0$ | — | — |
| $f(x)$ | $-\infty$ | متزايدة ↗ | $-1$ | متناقصة ↘ | $-\infty$ |

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x - e^x) = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - e^x) = \underbrace{+\infty}_{\text{بطيء}} - \underbrace{\infty}_{\text{سرعة كبيرة}} = -\infty$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{0}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{0}{V}} f = |f(0) - f(a)| + |f(0) - f(b)|$$

$$= |-1 - (a - e^a)| + |-1 - (b - e^b)|$$

$$= e^a - a - 1 + e^b - b - 1 = e^a + e^b - (a+b+2)$$

طريقة أخرى

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_a^b |1 - e^x|\,dx = \int_a^0 (1 - e^x)\,dx - \int_0^b (1 - e^x)\,dx$$

$$= [x - e^x]_a^0 - [x - e^x]_0^b$$

$$= [(-1) - (a - e^a)] - [(b - e^b) - (-1)] = e^a - a - 1 - (b + 1 - e^b)$$

$$= e^a + e^b - (a+b+2)$$

و.هـ.م

٥/

٥ / ٥٢ : هل f د.ت.م على $[0,2\pi]$ حيث .

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{\pi}{x} & 0 < x \le 2\pi \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

---

لنبين أن f دالة ليست د.ت.م على $[0,2]$ وبالتالي ليست د.ت.م على $[0,2\pi]$ .

وذلك بأخذ التجزئة التالية .

$$x_0 = 0 < \frac{2}{2n+1} < \frac{2}{2n-1} < \cdots \frac{2}{5} < \frac{2}{3} < \frac{2}{1} = x_n$$

$$V(f,P) = \left| f\left(\frac{2}{2n+1}\right) - f(0) \right| + \left| f\left(\frac{2}{2n-1}\right) - f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \right| + \cdots$$

$$\cdots + \left| f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{2}{5}\right) \right| + \left| f(2) - f\left(\frac{2}{3}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{2}{2n+1} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) - 0 \right| + \left| \frac{2}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2}\pi - \frac{2}{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2}\pi \right|$$

$$\cdots + \left| \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{5} \sin \frac{5}{2}\pi \right| + \left| 2 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}\pi \right|$$

$$= \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} + \cdots \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{2n+1} + \frac{4}{2n-1} + \cdots \frac{4}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{2n+1} \right) - 2$$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n \to \infty} \left[ \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{2n+1} \right) - 2 \right] = \infty$$

وبالتالي $\overset{2}{\underset{0}{V}} f = +\infty$ , الدالة f ليست ذات تغير محدود

---

7

$$f(x) = \cos^2 x \qquad x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = 1 - \sin^2 x$$

$f_1(x) = 1$ ثابتة على $[0,\pi]$

$$f_2(x) = \sin^2 x$$

$$f_2'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$f_2'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} k \quad \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k = 2 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_2(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

طريقة ١ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 - \sin^2 x & : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos^2 x - 0 & : x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

طريقة ٢ $\quad f(x) = x - (x - \cos^2 x) \qquad x \in [0, \pi]$

---

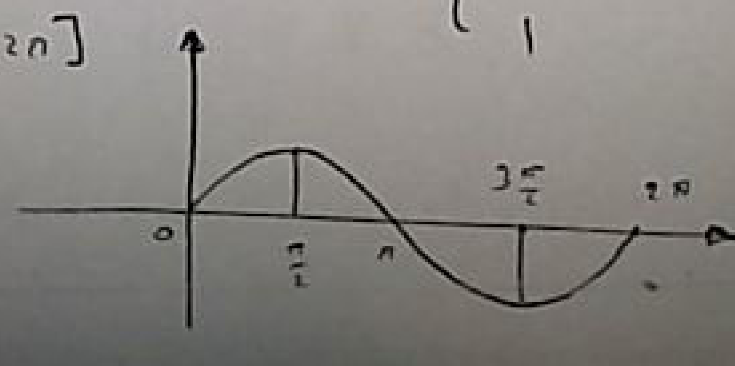
طريقة ١٠ $\quad f(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = x - (x - \sin x)$

$$x \in [0, 2\pi]$$

---

طريقة ٢ $\quad f(x) = \sin x = \varphi(x) - \psi(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \\ \sin x + 1 & [3\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\sin x & x \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \\ 1 & x \in [3\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

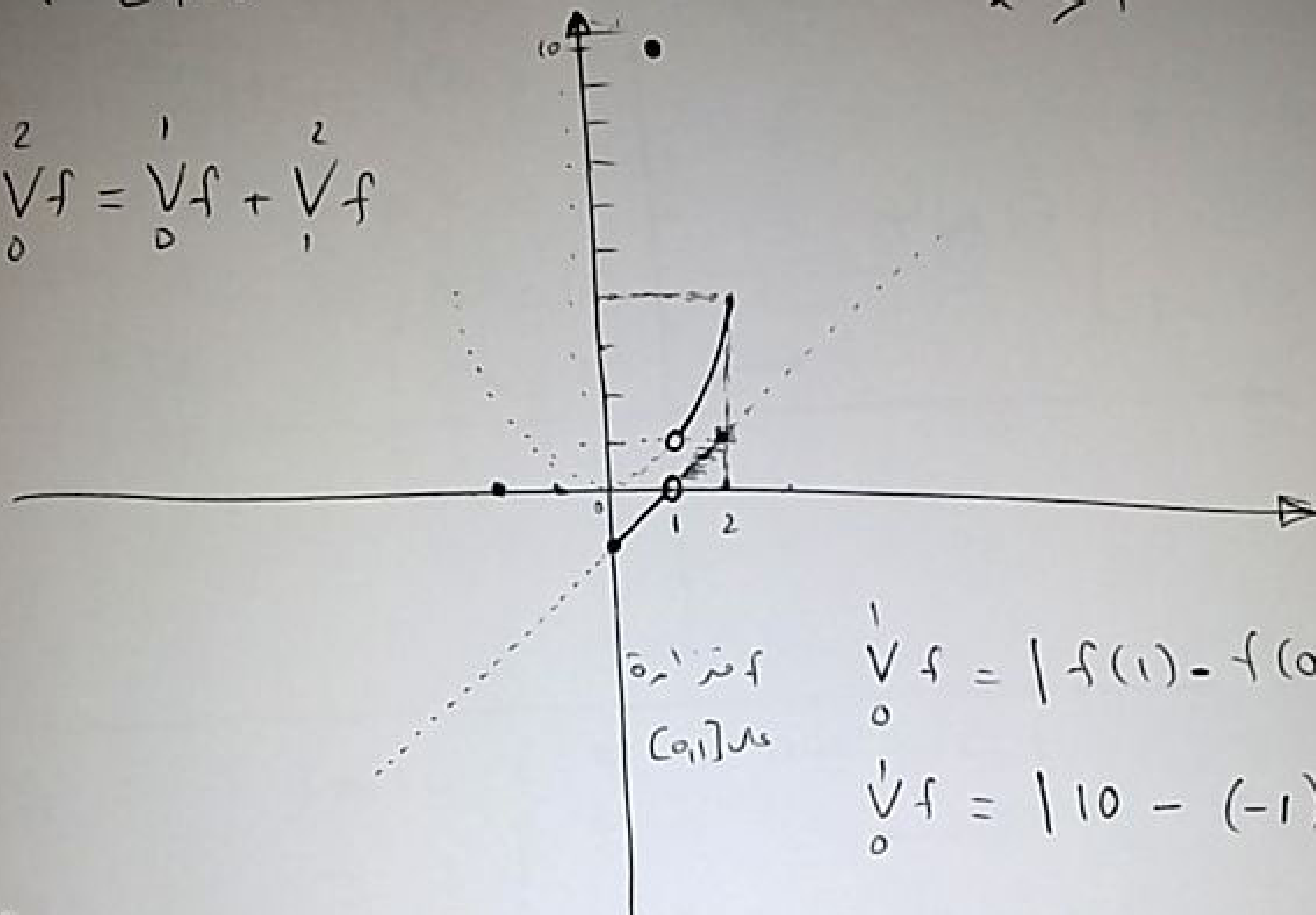



$y = \sin x$

٧ / ٥٤

بيّن أن التغير الكلي للدالة هو 25 على $[0,2]$.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x<1 \\ 10 & x=1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$$




$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f$$

f متزايدة على $[0,1]$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = |f(1) - f(0)|$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = |10 - (-1)| = 11$$

$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,2]} V(f,P) \qquad P = \{1 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = 2\}$$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots \; |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1^2 - 10| + |x_1^2 - x_2^2| + \cdots \; |x_n^2 - x_{n-1}^2|$$

$$= 10 - \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} - \cancel{x_1^2} + \cancel{x_3^2} - \cancel{x_2^2} + \cancel{\cdots} + \underbrace{x_n^2}_{4} - \cancel{x_{n-1}^2}$$

$$V(f,P) = 10 - 2x_1^2 + 4 = 14 - 2x_1^2 \Rightarrow$$

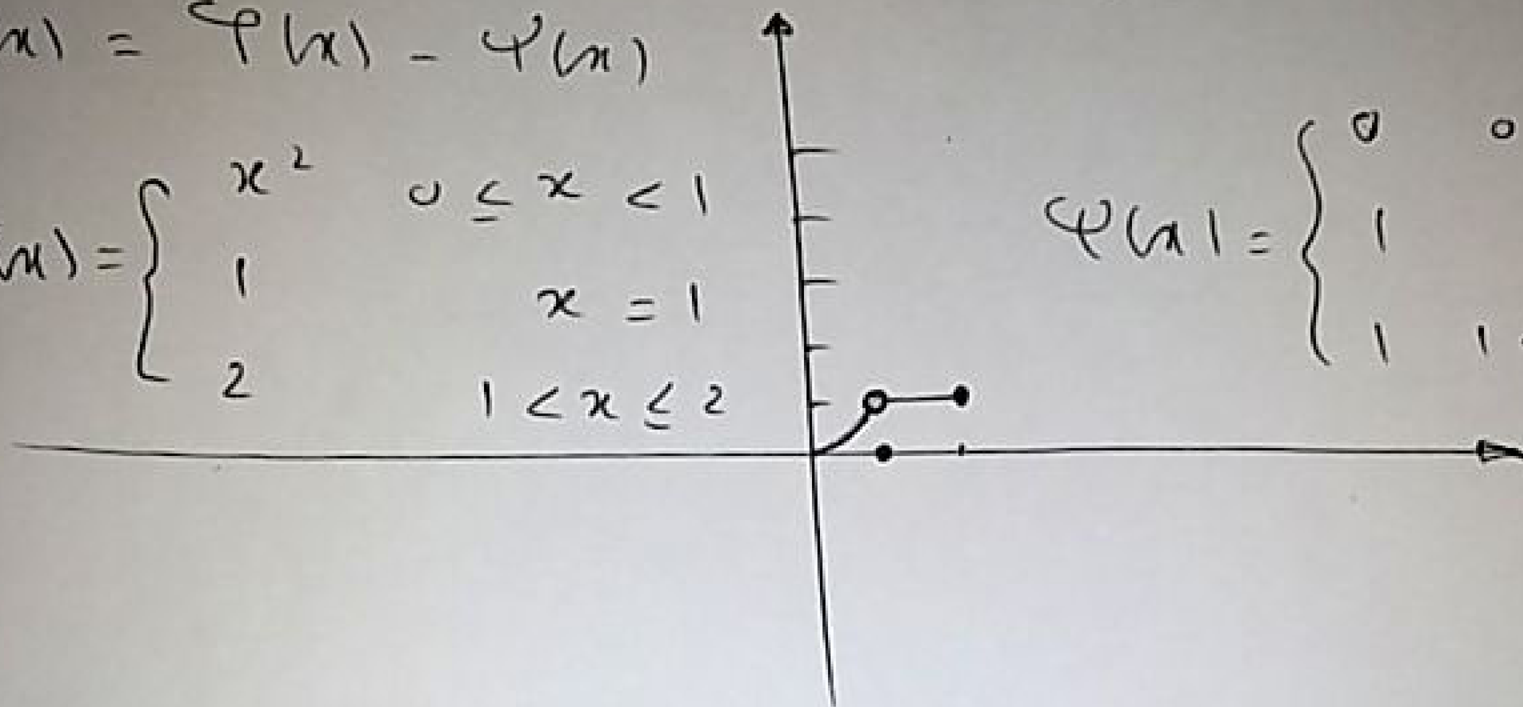
$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = 12$$

$$\Longrightarrow \overset{2}{\underset{0}{V}} f = 11 + 12 = 23.$$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$\frac{9}{10}$

$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$



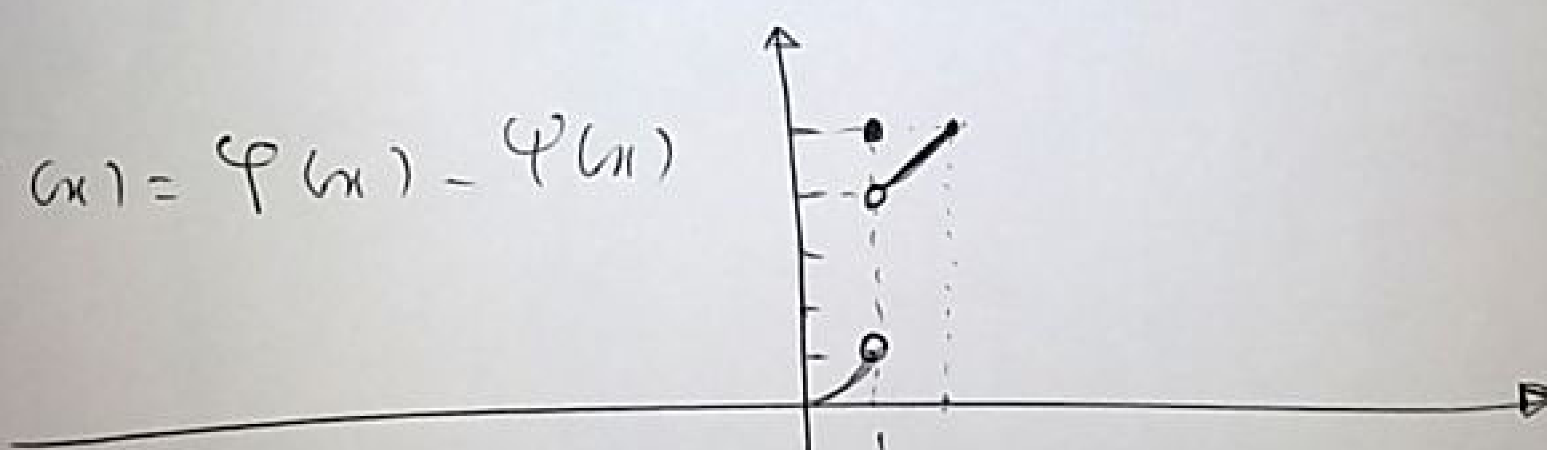
$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$\psi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

---

D) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x+3 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$



$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x+5 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$\psi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

المحاضرة الخامسة عشرة

الإثنين : ٣٠ / ٤ / ٢٠١٣ م

الموضوع : حل تمارين

① هل التابع $f(x) = x^2 - \frac{1}{1+x}$ د. ت. م على $[0,1]$ وما هو تغيره الكلي.

**الحل:** $f'(x) = 2x + \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ على $[0,1]$

وبالتالي f متزايد على $[0,1]$ وبالتالي f د. ت. م.

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = |f(1) - f(0)| = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{3}{2}$$

② بين أن التابع $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ د. ت. م على $[2,+\infty[$ وأوجد تغيره الكلي $\overset{\infty}{\underset{0}{V}} f$

**الحل:** $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}$ لدراسة إشارة $f'$

المقام موجب ننظر إلى البسط

$-2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ $\searrow$ | $\frac{1}{9}$ | $\searrow$ $0$ |

نلاحظ أن f متناقصة على $[2, A]$ حيث A أي عدد مطلق.

$$\overset{A}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A \to +\infty} [f(2) - f(A)] = \lim_{A \to \infty}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{(A+1)^2}\right]$$

$$\overset{A}{\underset{2}{V}} f = \frac{1}{9}.$$

٣ بيّن أن $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ د.ت.م على $[0,+\infty[$

$[0,b]$

إذا أخذنا $b$ كيفي $0 \le b < \infty$

**الحل:** نأخذ المشتق.

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) \qquad x > 0$$

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$|f'(x)| = \left|2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right|$$

$$|f'(x)| \le \left|2x\sin\frac{1}{x}\right| + \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 2b+1$$

$$f'(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ونحن نهتم عندما $x \overset{>}{\to} 0$ فقط

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^{\cancel{2}}\sin\frac{1}{x} - 0}{\cancel{x} - 0} = 0$$

لأن $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ , $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0$ .

والمشتق محدود عند أي مجال مغلق $[0,b]$ .

---

٩/ ٥٣

A) $f(x) = \cos^2 x \qquad x \in [0, \pi]$

$f(x) = 1 - \sin^2 x$

$\psi(x) = 1$ تزايدية $\forall x_1, x_2 \in [0, \pi]$

$\varphi(x) = \sin^2 x \qquad \Rightarrow \psi(x_1) \le \psi(x_2)$

$\varphi(x) = \sin^2 x \qquad \varphi'(x) = 2\sin x \cos x$

$\varphi'(x) = \sin 2x$

$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k$

$x = \frac{\pi}{2}k \qquad k = 0,\ x = 0$

$k = 1,\ x = \frac{\pi}{2}$

$k = 1,\ x = \pi$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $\varphi(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

$$
\begin{cases}
f(x) = \begin{cases} 1-\sin^2 x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos^2 x - 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \\
\hline
f(x) = x - (x - \cos^2 x) \qquad x \in [0, \pi]
\end{cases}
$$

---

$$f(x) = \sin x \xRightarrow{x \in [0, 2\pi]} f(x) = x - (x - \sin x)$$

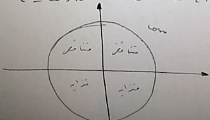

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

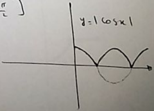
$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \sin x + 1 & [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ 1 & x \in [\frac{3\pi}{2}, 2 \end{cases}$$

---

$$y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \cos x \leq 0 \end{cases}$$

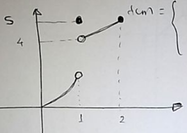
$$= \begin{cases} \cos x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [3\frac{\pi}{2}, 2\pi] \\ -\cos x & x \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



ε

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 1-\cos x & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\\ 2 & x\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]\\ 2+\cos x & x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}-\cos x & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 1 & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\\ \cos x+2 & x\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]\\ 2 & x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]\end{cases}$$

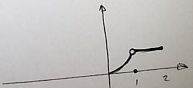



$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 5 & x=1\\ x+3 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 1\\ 5 & x=1\\ x+5 & 1<x\le 2\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ 0 & x=1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 0 & x=1\\ 1 & 1<x\le 2\end{cases}$$

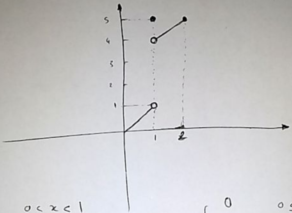
$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$




$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\\ 1 & 1<x\le 1\end{cases}$$

0

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$




$$\varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$