(التوزيع المنتظم المتقطع)

تعريف: نقول لمتغير عشوائي متقطع X أن له توزيعاً منتظماً إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{n} \quad ; \quad x = x_1, x_2, \dots, x_n$$

وبالتالي جدول التوزيع الاحتمالي له هو:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\sum$
$f_X(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$	1

التوقع والتباين:

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 . f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2}$$

مثال: إذا رمزنا بـ X لعدد النقاط الظاهرة كل حجر نرد متزن بعد رميه، يكون لـ X جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

فيكون:

$$E(X) = \sum_x x f_X(x)$$

$$= (1)\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right).$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 f_X(x) = (1)^2\left(\frac{1}{6}\right) + (2)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + (6)^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\Rightarrow Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$

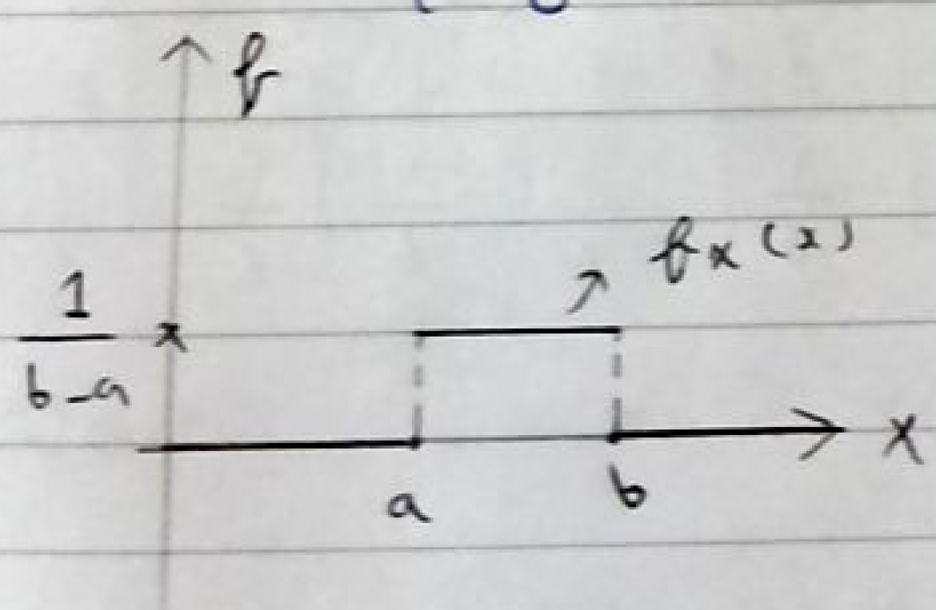
$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$$

بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

أ- التوزيع المنتظم المستمر:

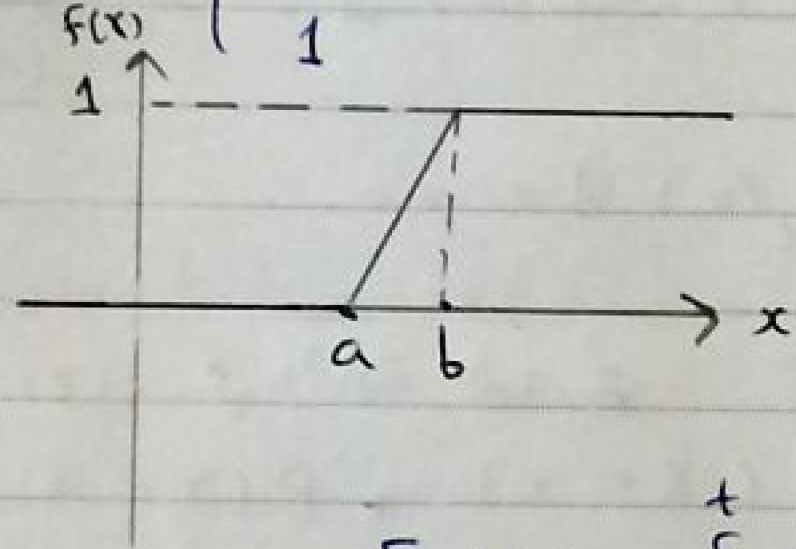
تعريف: يكون لـ X المستمر توزيعاً منتظماً إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \quad a \le x \le b \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$



دالة التوزيع المتجمع:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & : t \le a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & b \le T \end{cases}$$



البرهان:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

$\boxed{t < a}$

$$F_X(t) = 0$$

$$F_X(t) = \int_{a}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{a}^{t} \frac{1}{b-a}\,dx \qquad \boxed{a \le t \le b}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \frac{1}{b-a}\,[x]_a^t = \frac{t-a}{b-a}$$

$\boxed{b < t}$

$$F_X(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} (0)\,dx}_{=1} + \underbrace{\int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx}_{=1} + \underbrace{\int_{b}^{t} (0)\,dx}_{=0}$$

ملاحظة: ١) عندما X مستمر : $P(X = x) = 0$

برهان:

$$P(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x < X \le x + \Delta x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \int_{x}^{x+\Delta x} f_X(x)\, dx = 0$$

ملاحظة (2): في الحالة العامة:

$$P(X \le x) = P(X < x) + P(X = x) = 0$$

⇐ في حالة X مستمر:

$$P(X \le x) = P(X < x)$$

التوقع والتباين:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

$$\cancel{= \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \cancel{\frac{b^2 + a^2 + ab}{3}} = \frac{b+a}{2}$$

$$\cancel{\Rightarrow Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{b^2 + a^2 + ab}{3} - \frac{(b+a)^2}{4}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+a^2+ab}{3}$$

$$\Rightarrow Var(x) = E x^2 - (EX)^2 = \frac{b^2+a^2+ab}{3} - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$\Rightarrow Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

الدالة المولدة للعزوم:

$$Mx(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[t\, e^{tx}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t}\right) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

مثال:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 1 \le x \le 4 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1) عين توقع وتباين X

2) " دالة التوزيع $Fx(t)$

3) . أوجد ما يلي = $P(0<X<2)$; $P(X<3)$; $P(x)>2$.

4) . $M_X(t)$

الحل : 1)

$$E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+4}{2} = 2.5$$

$$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{3}{4}$$

2) .

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & : t \le a = 1 \\ \frac{t-a}{b-a} & a < t < b = 4 \\ 1 & b \le t \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & : t \le 1 \\ \frac{t-1}{3} & : 1 < t < 4 \\ 1 & 4 \le t \end{cases}$$

3) .

$$P(X<3) \overset{\text{متصل}}{=} P(X \le 3) = F(3)$$

$$= \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(0<X<2) = F(2) - f(0) = \left(\frac{2-1}{3}\right) - 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - F(2)$$
$$= 1 - \left(\frac{2-1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{4t} - e^{t}}{3t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$ (4

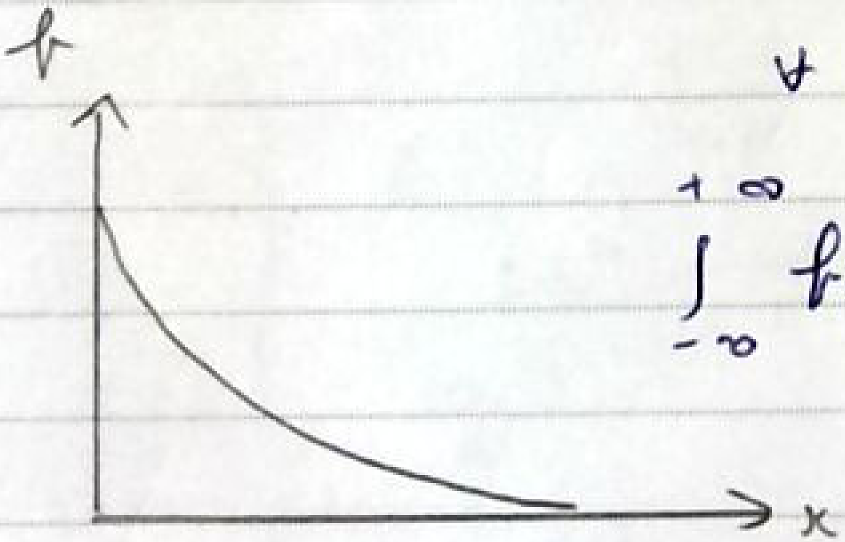
التوزيع الأسي :

تعريف : نقول عن X انه يتبع التوزيع الأسي بوسيط
(λ>0) ونرمز لذلك بـ $X \sim exp(\lambda)$

إذا كانت له دالة الكثافة :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $f(x)$ تحقق الشرطين

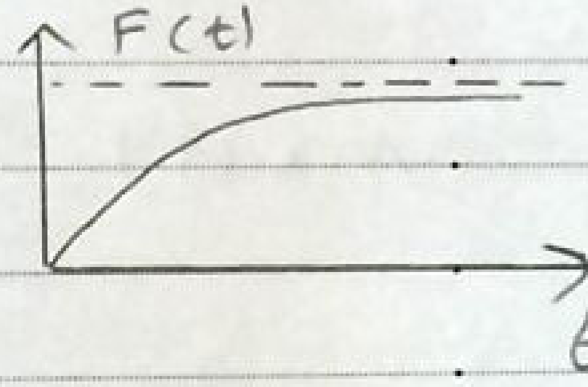


$f_X(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x$ (1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$ (2
$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{+\infty}$$
$$= (0) - (-1) = 1$$

دالة التوزيع المتجمع :

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t \leq 0 \end{cases}$$



التوقع والتباين :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x}\, dx$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{+\infty}$$

$\boxed{t-\lambda<0}$ شرط

$$= \lambda \left[0 - \frac{1}{t-\lambda} \right]$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad , \quad \boxed{t < \lambda}$$

مثال: إذا كان عمر صمام كهربائي (بالساعات) له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10000} e^{-\frac{x}{10000}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

المطلوب: 1) أوجد $F_X(t)$

2) أوجد العمر الوسط للصمام

3) أوجد احتمال ان يعمر الصمام على الاقل 8000 ساعة

الحل: نلاحظ أن X يتبع التوزيع الاسي بوسيط $\lambda = \frac{1}{10000}$ ومنه:

1)
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{10000}} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

2)
$$F(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{10000}}$$

$= 10000$ ساعة

٢)
$$P(X > 8000)$$
$$= 1 - P(X \le 8000) = 1 - F(8000)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{8000}{10000}}\right) = e^{-\frac{8}{10}} = e^{-0.8}$$
$$\simeq 0,43$$

التوزيع الطبيعي :

تعريف: نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنه يتبع التوزيع الطبيعي بوسيطين μ و σ^2 ونرمز له بـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < +\infty$$
$$-\infty < \mu < +\infty$$
$$0 < \sigma < +\infty$$