Subject :

/ /

المحاضرة الحادية عشر - الأربعاء
في 20/4/2016

- حل التمرين من المحاضرة السابقة

أثبت أن:
$$\int_\Gamma z\,dz = \frac{z_f^2}{2} - \frac{z_I^2}{2}$$

حيث Γ أي مسار أملس.

بما أن Γ أملس فباستخدام المبرهنة

$$\int_\Gamma z\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(\gamma^2(t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\gamma^2(t)\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\left[\gamma^2(b) - \gamma^2(a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^2(b) - \frac{1}{2}\gamma^2(a)$$

$$= \frac{1}{2}z_f^2 - \frac{1}{2}z_I^2$$

مبرهنة: إذا كان f مستمراً على منطقة G (مترابطة و مفتوحة ، منطقة) وكان Γ طريقاً في G وكان لـ f أصلي F في G ($F'(z) = f(z)\ \forall z \in G$) فإن

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(z_f) - F(z_I).$$

حيث z_I هي بداية Γ و z_f نهايته

ملاحظة:

إذا تحقق شروط المبرهنة السابقة فإن التكامل سيكون مستقل عن الطريق في G وسيكون متعلقاً فقط ببداية ونهاية...

تمرين: "التمرين السابق على أي طريق"

أثبت بأن
$$\int_\Gamma z\,dz = \frac{1}{2}(z_f^2 - z_I^2)$$

حيث Γ أي طريق بدايته z_I ونهايته z_f

- $f(z) = z$ تابع مستمر على منطقة $\mathbb{C}$ وهي $\mathbb{C}$ "منطقة لأنها مترابطة ومفتوحة"

- $F(z) = \frac{z^2}{2}$ تابع أصلي لـ f على $\mathbb{C}$

$$F'(z) = f(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

ومنه شروط المبرهنة محققة أي

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(z_f) - F(z_I)$$
$$= \frac{1}{2}(z_f^2 - z_I^2)$$

و.هـ.م

ملاحظة هامة جداً

في حال تحقق شروط المبرهنة السابقة نستطيع ترميز التكامل بالشكل

$$\int_{z_I}^{z_f} z\,dz = \frac{1}{2}(z_f^2 - z_I^2)$$

أي بعض المراجع تستخدم الترميز السابق للدلالة عن التكامل الذي يحقق تلك الشروط

AL SAMRAH

Scanned by CamScanner

* هل تحليلية تابع كفي في منطقة تؤدي الى وجود تابع اصلي

الجواب: لا والمثال على ذلك

$f(z) = \frac{1}{z}$

هو تحليلي في $\mathbb{C}^*$

لو كان للتابع f تابع اصلي في $\mathbb{C}^*$

لوجب أن يكون التكامل $\int_C \frac{1}{z}$ معدوماً

في أي منحني مغلق في $\mathbb{C}^*$ ولكن نحن نعلم أن

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0$$

وأن

$$C^+_{(0,1)} \subseteq \mathbb{C}$$

ومنه لا يوجد تابع اصلي لـ $\frac{1}{z}$ في $\mathbb{C}^*$ او بالعكس

لا يوجد تابع اصلي لـ $\frac{1}{z}$ في أي منطقة تحوي المبدأ بشكل كامل

تمرين: عين المنطقة من المستوي المركب التي يعرف عليها تابع الفرع للتابع

$g(z) = \log(z^2+4)$

ثم اوجد منطقة تحليلية التابع

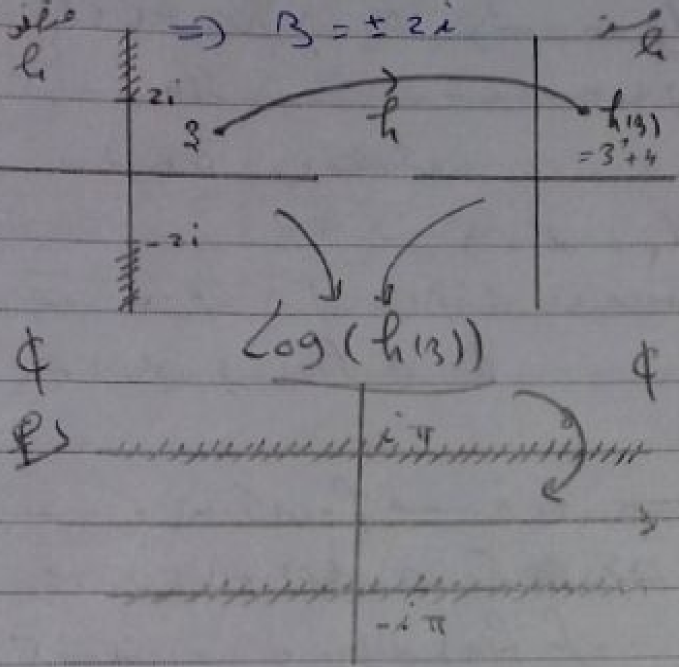
$f(z) = \mathrm{Log}(z^2+4)$

$\mathrm{Log}(h(z))$ تابع فرع التابع

هو اصفار التابع $h(z)$

$h(z) = z^2+4 = 0$

$\Rightarrow z = \pm 2i$



$h(z) = z^2+4 \in Ox^-$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4 + 2xyi \in \mathbb{R}^-$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4 \leq 0 \ \wedge\ xy = 0$

$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee\ y = 0$

if $y = 0 \Rightarrow x^2+y^2+4 \leq 0$

$\Rightarrow x^2+4 \leq 0$

وهذا مستحيل ومنه $y=0$ مرفوض

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow 4 - y^2 \leq 0$

$\Rightarrow y^2 \geq 4 \Rightarrow |y| \geq 2$

إما $y \geq 2$ أو $y \leq -2$

$z = iy\ ,\ |y| \geq 2 \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{R}^-$

h تحليلي في $\mathbb{C}$ ومنه f تحليلي في

$G: \mathbb{C} \setminus D$?

$D = \{iy\ ;\ |y| \geq 2\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_x = x^2+y^2 \\ U_y = 0 \end{cases} \quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$$

مشتقة بالنسبة لـ y معدومة أي التابع تابع لـ x فقط

$U_y = 0 \Rightarrow$ U تابع فقط لـ x

وبالتالي مشتقته سيكون تابعاً لـ x فقط وهذا يناقض كون

$U_x = x^2+y^2$ (أي تابع لـ x و y)

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي إنه لا يوجد تابع أصلي لـ $f(z)$ في $\mathbb{C}$...

ملاحظة: إذا كان f مستمراً في منطقة G وكان له تابع أصلي في G فإن

$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$ ؛ Γ مغلق

أياً كانت الطريق المسلوكة المغلقة

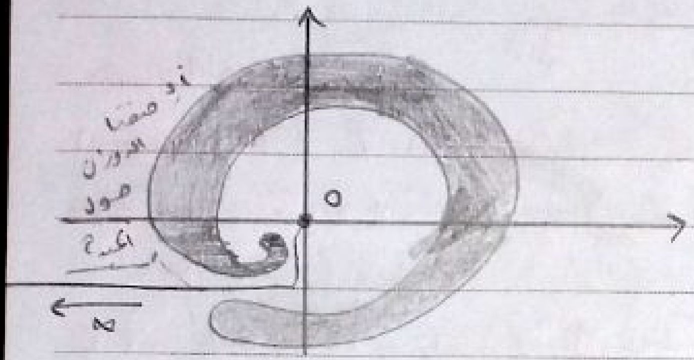
أي إذا كان التابع مستمر في منطقة وكان هذا التابع يملك تابع أصلي في هذه المنطقة فإن تكامله على أي طريق مغلق سيكون (0)

عندما قلنا إن التابع أصلي أي إنه تحليلي ويمكن تقريبه أي يستطيع ... السابق.

وإلا حسب الملاحظة السابقة سيكون التكامل هو التكامل في نقطة الزاوية ناقص التكامل في نقطة البداية و هنا نقطة الزاوية نفس نقطة البداية

وبهذا سيكون التكامل معدوماً

مثال: احسب $\oint_\Gamma \frac{1}{z}\,dz$ حيث Γ أي طريق مغلق لا يحوي الصفر بداخله ولا يمر منه



$f(z) = \frac{1}{z}$ تابع تحليلي في $\mathbb{C}^*$ فهو مستمر في $\mathbb{C}^*$ .. بما أن المنحني لا يحوي (0) بداخله ولا يمر فيه فنستطيع إيجاد فرع للتابع اللوغاريتمي تحليلية في $G : \mathbb{C} \setminus \{$أي نصف مستقيم ينطلق من المبدأ و يذهب إلى اللانهاية$\}$

بحيث هذه المنطقة تحوي المنحني وداخله فهو مستمر في G .. كما أن أي فرع تحليلي للتابع اللوغاريتمي في G هو تابع أصلي لـ f

وبما أن Γ طريق مغلق سيكون التكامل

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$$

أياً كانت Γ طريق مغلق..

نتيجة: إن التكامل لـ $\frac{1}{z}$ على أي طريق مغلق لا يحوي بداخله الصفر فهو معدوم

* هل تحليلية تابع كسري في منطقة تؤدي الى وجود تابع اصلي

الجواب: لا والمثال على ذلك

$f(z) = \frac{1}{z}$.

هو تحليلي في $\mathbb{C}^*$

لو كان للتابع f تابع اصلي في $\mathbb{C}^*$

لوجب أن يكون التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z}$ معدوماً

في أي طريق مغلق في $\mathbb{C}^*$ ولكن

نحن نعلم ان

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$$

وان .

$$C^+_{(0,1)} \subseteq \mathbb{C}^*$$

ومنه لا يوجد تابع ل $\frac{1}{z}$ في $\mathbb{C}^*$

او بالعكس

لا يوجد تابع اصلي ل $\frac{1}{z}$ في أي

منطقة تحيط المبدأ بشكل كامل

تمرين: حدد المنطقة من المجالات السابقة

عين تمام الفرع للتابع

$g(z) = \log(z^2+4)$.

ثم اوجد منطقة تحليلية التابع

$f(z) = \operatorname{Log}(z^2+4)$.

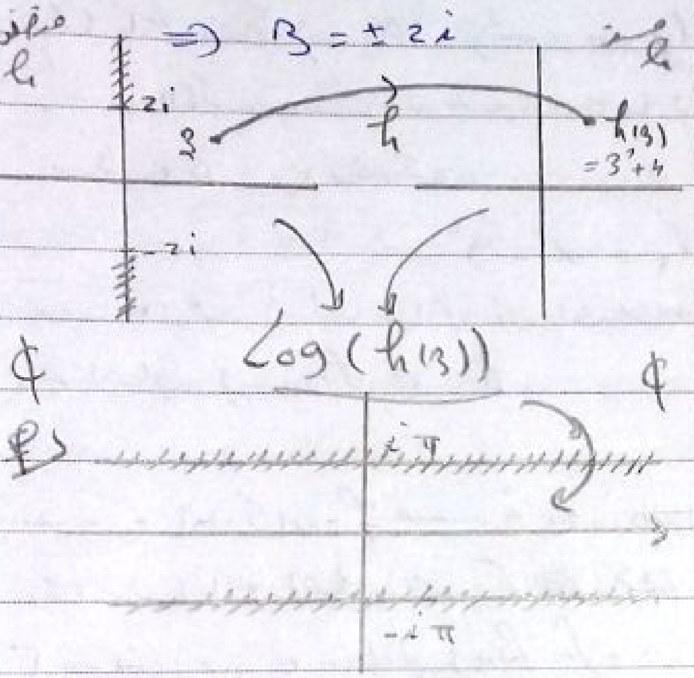
[illegible]

تمام فرع التابع $\log(h(z))$

هو اصفار التابع $h(z)$

$h(z) = z^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow z = \pm 2i$



$h(z) = z^2 + 4 \in \mathbb{R}^-$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4 + 2xyi \in \mathbb{R}^-$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4 \leq 0 \wedge xy = 0$

$\Leftrightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

if $y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 \leq 0$

$\Rightarrow x^2 + 4 \leq 0$

وهذا مستحيل ومنه $y=0$ مرفوض

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow 4 - y^2 \leq 0$

$\Rightarrow y^2 \geq 4 \Rightarrow |y| \geq 2$

اما $y \geq 2$ او $y \leq -2$

$z = iy \; ; |y| \geq 2 \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{R}^-$

h تحليلي في $\mathbb{C}$ ومنه f تحليلي

في $G: \mathbb{C} \setminus \{D\}$

$; D = \{iy \; ; |y| \geq 2\}$

Subject : / /

$h(G) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$

ولدينا Log تحليلي على

$\mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$

وحسب مبرهنة سابقة

$f(z) = Log(z^2+4)$

تحليلي على G حيث G منطقة

f تحليلية

و أن

$$f'(z) = \frac{2z}{z^2+4} \quad \forall z \in G.$$

انتهت المحاضرة

المحاضرة الثالثة عشر - الخميس
2016/4/21

f مستمر على منطقة G ولـ f تابع أصلي

على G. فإن التكامل لـ f مستقل عن الطريق

المسلوك في المنطقة G ويعتمد فقط على بداية

الطريق ونهايته ...

تمرين... حللناه سابقاً ولكننا سنحله

بالاعتماد على المبرهنة السابقة

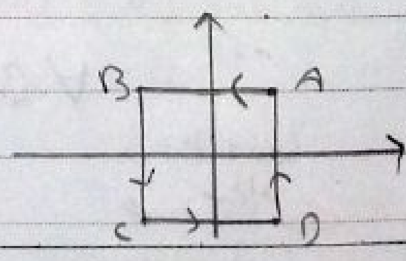
احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz$

حيث Γ هو المربع الذي رؤوسه

$A=(1+i)$, $B=(-1+i)$, $C=(-1-i)$

$D=(+1-i)$

نفرضه مقين



$\Gamma_1 = [CD]\oplus[DA]\oplus[AB]$

$\Gamma_2 = [BC]$

حيث $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_{\Gamma_1}\frac{1}{z}dz + \int_{\Gamma_2}\frac{1}{z}dz$$

$f(z)=\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$ وبالتالي مستمر

على المجموعة $\mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$ حيث يوجد $F(z)$

تابع أصلي لـ $f(z)=\frac{1}{z}$ على المجموعة $\mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$

حيث $F'(z) = \frac{1}{z} = f(z)$

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$.

واضح أن $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$

حسب المبرهنة السابقة

$$\int_{\Gamma_1}\frac{1}{z}dz = F(-1+i) - F(-1-i)$$
$$= Log(-1+i) - Log(-1-i)$$
$$= [\ln|-1+i| + i\,Arg(-1+i)] - [\ln|-1-i| + i\,Arg(-1-i)]$$
$$= [\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}] - [\ln\sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4}]$$

$$\int_{\Gamma_1}\frac{1}{z}dz = i\,\frac{3\pi}{2} \quad \ldots$$

ملاحظة

كل تكامل من الشكل $\int \frac{1}{z}dz$ على أي طريق بالمنطقة

$\mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$ وبدايته $(-1-i)$ ونهايته $(-1+i)$ سيكون

له نفس الناتج

الآن نلاحظ أن لا الفرع الرئيسي ولا أي فرع آخر

للوغاريتم معرف على منطقة فيها محور سالب الحقيقي

مع المنطقة $[BC]$ لأنه تقطع نقطة من محور ox

وبالتالي لا يوجد تابع أصلي لتكاملنا على الطريق الثاني

AL.SAMRAH

وحصلنا: $\int_{\Gamma_2}\frac{1}{z}dz$ على $\mathbb{C}\setminus\{0\cup\mathbb{R}^-\}$

Subject :

/ /

وهنا ينبغي ايجاد منطقة أخرى تحوي تابع اصلي لـ $\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$ ..

الحل .

$f(z)=\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$ كما أن هناك .

$$\mathcal{L}(z)=\ln|z|+i\theta \quad 0<\theta<2\pi.$$

باستعمال ما سبق لانه ليس الفرع الرئيسي

منطقة الـ (z) و الـ π لانهم سيكونوا داخلين ب $0x^+$

اما $\mathcal{L}(z)$ فرع تحليلي لـ $\log(z)$ على $\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$

حيث $\mathcal{L}'(z)=\frac{1}{z}$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$

وهنا $\mathcal{L}(z)$ تابع اصلي لـ $f(z)$ على $\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$,

وهنا $\Gamma_2\subseteq\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$.

$$\int \frac{1}{z}\,dz=\mathcal{L}(-1-i)-\mathcal{L}(-1+i)$$

$$=\ln|-1-i|+i\theta_{-1-i}-\left(\ln|-1+i|+i\theta_{-1+i}\right)$$

$$=\ln|-1-i|+i\frac{5\pi}{4}-\ln|-1+i|+i\frac{3\pi}{4}$$

$$=\ln\sqrt{2}+i\frac{5\pi}{4}-\ln\sqrt{2}+i\frac{3\pi}{4}$$

$$=i\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma}\frac{1}{z}\,dz=i\frac{3\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}=2\pi i$$

هل التكامل لـ $\frac{1}{z}$ مستقل عن الطريق المسلوك في المنطقة $\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$

جواب: طبعاً لأنه تحقق شروط المبرهنة السابقة

① مستمر على $\mathbb{C}\setminus\{0x^+\}$

② له تابع اصلي بهذه المنطقة وهو $\mathcal{L}og(z)$ "الفرع الرئيسي"

فائدة:

لإثبات ان التكامل غير مستقل عن الطريق المسلوك يجب اعطاء تابع واحد ونقطتين معينتين و طريقين مختلفين بحيث التكامل على الطريق الأول يختلف عن التكامل على الطريق الثاني ولتم مل شرين سابق عن الفكرة $\bar{z}$ "

مبرهنة:

ليكن f تابعاً تحليلياً على منطقة G بحيث $\bar{D}(a,r)\subseteq G$ وليكن

$$\gamma(s)=a+re^{is},\quad 0\le s\le 2\pi$$

وهو يمثل محيط القرص المركزه a ونصف قطره r مسحوب بالاتجاه الموجب

عندئذ:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\forall z\in D(a,r)$$

معادلة القرص

الانتقال

مطلوب

Subject : / /

ملاحظات حول المبرهنة:

+ معرفة قيم تابع تحليلي على محيط القرص كافية لمعرفة جميع القيم داخل القرص..

+ نستطيع باستخدام المبرهنة السابقة حساب التكاملات من الشكل:

$$\int \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

حيث يجب أن يكون: $f(z)$ تحليلي على محيط وداخل القرص. $D(a,r)$ و γ هو محيط القرص الممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب و

$$z_0 \in D(a,r) \overset{أي}{=} |z_0 - a| < r$$

مثال: احسب التكامل.

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$$

التابع شاذ من $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ ولكن هنا لا يكفي أن يكون له تابع أصلي ونستطيع المبرهنة السابقة لحسابه..

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz = \int_{|z-i|=1} \frac{\left(\frac{\sin z}{z+i}\right)}{z-i}\, dz$$

حيث $\frac{\sin z}{z+i} = f(z)$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ و

$$\overline{D}(i,1) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{-i\}$$

$$i \in D(i,1)$$

ومنه

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz = 2\pi i\, f(i)$$

$$= 2\pi i \frac{\sin i}{2i}$$

$$= \pi \sin i$$

إذا طلب إعادة بشكل الجبري نكتب

$$\pi \sin i = \pi \left(\frac{e^{i(i)} - e^{-i(i)}}{2i} \right)$$

$$= i\pi\, Sh(1)$$

وهم.

تمرين احسب التكامل

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$$

[illegible]

[illegible] لا يمكن [illegible] من [illegible] داخل الدائرة $D(0,2)$ والنقطتين لا يمكن حسابها مباشرة باستخدام [illegible] بأنه [illegible]

[illegible]