)■(الفصــل الثانــي)■(

تكامل ستيلجس

سوف نعتبر في هذا الفصل أن تكامل ريمان $\int_a^b f(x)dx$ معروف مع جميــع خواصه . ونريد تعميم هذا التكامل لنحصل على مايسمى تكامل ستيلجس .

وكما هو ملاحظ يكون في تكامل ريمان تابع واحد $f(x)$ معرف على مجـال $[a,b]$، أما في تكامل ستيلجس فيوجد تابعان $f(x)$ و $g(x)$ معرفان علـــى المجال $[a,b]$. ولتسهيل المقارنة سنذكّر بتعريف تكامل ريمان .

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا ومحدودا على المجال $[a,b]$ ولتكن :

$P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$

تجزئة لهذا المجال ، ونضع كالعادة .. $\lambda(p) := \max_k (x_k - x_{k-1})$.

في كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ نختار نقطة ξ_k حيث $k = 1,2,\dots,n$

ثم نشكل المجموع التالي (المسمى مجموع ريمان التكاملي) :

$$\sigma(f,P) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ (x_k - x_{k-1})$$

فاذا كانت النهاية $\lim_{\lambda(p)\to 0} \sigma(f,P)$ موجودة ومحدودة ومستقلة عن التجزئة P ، وعن طريقة اختيار النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ ، فنسمي تلك النهاية بتكامل ريمان المحدد للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ونرمز لها بالرمز : $(R) \int_a^b f(x)dx$ أو اختصارا بـ $\int_a^b f(x)dx$.

وفي هذه الحالة نقول أيضا ان التابع $f(x)$ كمول حسب ريمان علــى المجال $[a,b]$.

٢-١ تعريف وخواص تكامل ستيلجس :

٢-١-١ تعريف :

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعان معرفان ومحدودان على المجال $[a,b]$ ولتكن التجزئة : $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$.

في كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ نختار نقطة ξ_k حيث $k = 1,2,\dots,n$ ثم نشكل المجموع التالي (المسمى مجموع ستيلجس التكاملي للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ الموافق للتجزئة P) :

$$S(f,g,p) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

فاذا كانت النهاية : $\lim\limits_{\lambda(p)\to 0} S(f,g,p)$ موجودة ومحدودة ومستقلة عن التجزئة P ، وعن طريقة اختيار النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ ، فنسمي تلك النهاية تكامل ستيلجس للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ على المجال $[a,b]$ ونرمز لها بالرمز :

$$(s)\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

أو فقطبالرمز : $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ للاختصار .

في هذه الحالة نقول أيضا ان تكامل ستيلجس $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود.

٢-١-٢ ملاحظة :

من الواضح أنه اذا كان $g(x) = x$ فنحصل على تكامل ريمان الآنف الذكر.

لذا يعتبر تكامل ستيلجس تعميما لتكامل ريمان .

٢-١-٣ ملاحظة :

يمكن التعبير عن التعريف (٢-١-١) كما يلي :

نسمي العدد $I := \int_a^b f(x)dg(x)$ تكامل ستيلجس للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ على المجال $[a,b]$ ، اذا كان من أجل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$

يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ فان $|S(f,g,p) - I| < \varepsilon$ ،
وذلك كيفما أخذت تجزئة المجال $[a,b]$ وكيفما اختيرت النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1},x_k]$ حيث $k = 1,2,\ldots,n$.

فيما يلي نذكر بعض خواص تكامل ستيلجس .

٢ـ١ـ٤ مبرهنة :

يكون دوما : $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$

* البرهان : بأخذ $f(x) \equiv 1$ تنتج العلاقة مباشرة بحساب مجموع ستيلجس التكاملي .

٢ـ١ـ٥ مبرهنة :

اذا كان كل من التكاملين $\int_a^b f_1(x)\, dg(x)$ و $\int_a^b f_2(x)dg(x)$ موجودا فانه من أجل أى عددين α_1 و α_2 يكون التكامل :

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]\, dg(x)$$

موجود أيضا ، كما أن :

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

* البرهان : من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ نجد أن :

$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g, P) = \alpha_1 S(f_1, g, P) + \alpha_2 S(f_2, g, p)$

وبحسب الفرض فان نهاية الطرف الأيمن موجودة ـ وبالتالي نهاية الطرف الأيسر عندما $\lambda(p) \to 0$ ، وهذه النهايات هي تكاملات ستيلجس الموافقة للعلاقة المطلوبة .

٢ـ١ـ٦ مبرهنة :

اذا كان كل من التكاملين $\int_a^b f(x)dg_1(x)$ و $\int_a^b f(x)dg_2(x)$ موجودا

فانه من أجل أى عددين β_1 و β_2 يكون $\int_a^b f(x)d[\beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x)]$ موجود أيضا ، كما أن :

$$\int_a^b f(x)d[\beta_1 g_1(x)+\beta_2 g_2(x)] = \beta_1\int_a^b f(x)dg_1(x) + \beta_2\int_a^b f(x)dg_2(x)$$

* البرهان : من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ نجد أن :

$$S(f,\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, P) = \beta_1 S(f,g_1,P) + \beta_2 S(f,g_2,P)$$

وعندما $\lambda(P) \to 0$ فان نهاية الطرف الأيمن موجودة وبالتالي نهاية الطرف الأيسر ، وهذه النهايات هي تكاملات ستيلجس الموافقة للعلاقة المطلوبة .

يمكن تعميم المبرهنتين (٢ـ١ـ٥) و (٢ـ١ـ٦) لأجل أكثر من تابعين بشكل مشابه .

٢ـ١ـ٧ مبرهنة : (دستور التكامل بالتجزئة)

اذا كان أحد التكاملين : $\int_a^b f(x)dg(x)$ أو $\int_a^b g(x)df(x)$ موجودا فيكون الثاني موجود أيضا ، كما أن :

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

حيث أن :

$$f(x)g(x)\Big|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

* البرهان : نفرض أن التكامل $\int_a^b g(x)df(x)$ موجود .

اذا كانت $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ تجزئة للمجال $[a,b]$ و ξ_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ حيث $k = 1,2,\dots,n$ فيكون لدينا :

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \dots \le x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \le \xi_{i+1} \le x_{i+1} \le \dots \le$$

$$\le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b .$$

للبرهان أن التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود نحسب أولا مجموع ستيلجس التكاملي الموافق له وهو :

$$S(f,g,p) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

ويمكن كتابة هذا المجموع بالشكل التالي :

$$S(f,g,p) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})\ g(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k) =$$

$$= -\{g(a)f(\xi_1) + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)]$$

$$- g(b)\ f(\xi_n)\}$$

وبجمع وطرح المقدار $f(x)g(x)\Big|_a^b$ للطرف الأيمن نجد :

$$S(f,g,p) = f(x)\ g(x)\Big|_a^b - \{g(a)\ [f(\xi_1) - f(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] +$$

$$+ g(b)[f(b) - f(\xi_n)]\}$$

وبملاحظة أن الحدود داخل القوس الكبير تمثل مجموع ستيلجس التكاملي للتكامل

$\int_a^b g(x)\ df(x)$ ، حيث فرضنا سلفا أنه موجود ، وهذا المجموع موافق لتجزئة

p' للمجال $[a,b]$ ، نقاطها هي : $a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, b$ حيث :

$$a \le \xi_1 \le \xi_2 \le \dots \le \xi_{i-1} \le \xi_i \le \dots \le \xi_{n-1} \le b$$

وقد تم أخذ النقاط $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$ بمثابة النقاط الاختيارية من المجالات الجزئية :

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_{n-1}, \xi_n], [\xi_n, b]$$

على الترتيب . ويمكن أن نكتب الآن :

$$S(f,g,p) = f(x)g(x) \Big|_a^b - S(g,f,p')$$

وبملاحظة أن $\lambda(p) \to 0$ يقتضي $\lambda(p') \to 0$ وبالعكس ، نجد بأخذ النهاية في طرفي المساواة الأخيرة ، أن التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود ويكون :

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

وهي العلاقة التي تعطي دستور التكامل بالتجزئة في تكامل ستيلجس .

<u>٢-١-٨ مبرهنة :</u>

لتكن $a < c < b$ ،فاذا كان التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا ، فيكون كل من التكاملين $\int_a^c f(x)dg(x)$ و $\int_c^b f(x)dg(x)$ موجودا أيضا ، كما أن:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$$

■ البرهان : من وجود التكامل $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ وحسب الملاحظة (٢-١-٣) فانه من أجل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ ينتج : $|S(f,g,P) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ ،حيث أن P تجزئة للمجال $[a,b]$ ،والذى يعني في الوقت ذاته أن :

$$I = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f,g,p) \; .$$

من أجل هذه النهاية يصح مايسمى بمبدأ بولزانو - كوشي (أو اختبار كوشي) للتقارب . فاذا كانت P و P' تجزئتين للمجال $[a,b]$ بحيث $\lambda(P)<\delta$ و $\lambda(P')<\delta$ وكان $S(f,g,P)$ و $S(f,g,P')$ مجموعي ستيلجس التكاملين الموافقين لهما فنجد أن :

$$|S(f,g,P)-S(f,g,P')| \leq |S(f,g,P)-I|+|S(f,g,P')-I| < \varepsilon$$

نفرض الآن أن c احدى نقاط التجزئة P (وكذلك P') ، ونعتبر أن نقاط التجزئة

الواقعة في المجال $[c,b]$ هي نفسها في الحالتين ، عندئذ نجد أن الفرق :

$$S(f,g,P) - S(f,g,P')$$

يؤول لفرق من الشكل :

$$S(f,g,P_1) - S(f,g,P'_1)$$

حيث أن P_1 و P'_1 تجزئتان للمجال $[a,c]$ معينتان بالشكل :

$$P_1 = P \cap [a,c] \quad , \quad P'_1 = P' \cap [a,c] \,.$$

من أجل المجال $[a,c]$ وبتطبيق مبدأ بولزانوا ـ كوشي للتقارب على مجاميع ستيلجس التكاملية الموافقة ، نستنتج أن التكامل $I_1 = \int_a^c f(x)dg(x)$ موجود .

وبمناقشة مشابهة نبرهن على وجود التكامل : $I_2 = \int_c^b f(x)\,dg(x)$.

لتكن الآن P تجزئة ما للمجال $[a,b]$ بحيث $c \in P$ ، فيمكن تقسيمها الى تجزئتين P_1 و P_2 للمجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ على الترتيب ، حيث :

$$P_1 = P \cap [a,c] \;,\; P_2 = P \cap [c,b]$$

عندئذ مجاميع ستيلجس التكاملية تحقق العلاقة :

$$S(f,g,P) = S(f,g,P_1) + S(f,g,P_2)$$

بأخذ النهايات في هذه المساواة نجد :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) \,.$$

٢ـ١ـ٩ ملاحظة :

ان عكس المبرهنة (٢ـ١ـ٨) غير صحيح بشكل عام ، اذ أن وجود التكاملين $\int_a^c f(x)dg(x)$ و $\int_c^b f(x)dg(x)$ لايؤدي بالضرورة لوجود التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ (وذلك بخلاف تكامل ريمان) كما يبين لنا المثال التالي :

٢ـ١ـ١٠ مثال :

ليكن التابعان $f(x)$ و $g(x)$ المعرفان على المجال $[-1,1]$ بالشكل

التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} .$$

ولنبرهن أولا أن كلا التكاملين $\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)$ و $\int_{0}^{1} f(x)dg(x)$ موجود .

لتكن $P_1 = \{-1 = x_o, x_1, \ldots, x_n = 0\}$ تجزئة للمجال $[-1,0]$ فيكون:

$$S(f,g,P_1) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = 0$$

حيث أن ξ_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ و $k = 1,2,\ldots,n$

وبالتالي فان :

$$\lim_{\lambda(P_1)\to 0} S(f,g,P_1) = 0$$

وهذا يعني أن التكامل : $\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)$ موجود وقيمته 0 .

لتكن الآن التجزئة : $P_2 = \{0 = y_o, y_1, \ldots, y_m = 1\}$ للمجـــــال $[0,1]$ فيكون :

$$S(f,g,P_2) = \sum_{k=1}^{m} f(\theta_k)\,[g(y_k) - g(y_{k-1})] = 0$$

حيث أن θ_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[y_{k-1}, y_k]$ و $k = 1,2,\ldots,m$

وبالتالي فان :

$$\lim_{\lambda(P_2)\to 0} S(f,g,P_2) = 0$$

وهذا يعني أن التكامل : $\int_{0}^{1} f(x)dg(x)$ موجود وقيمته 0 .

نأخذ الآن التجزئة : $P = \{-1 = t_o, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_N = 1\}$

للمجال $[-1,1]$ بحيث أن النقطة 0 لاتنتمي لهذه التجزئة ، ولنفرض أنه من أجل

مة معينة i يكون : $t_{i-1} < 0 < t_i$

ملاحظة أن $g(t_k)-g(t_{k-1})=0$: عندما $i \neq k$ نجد :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{N} f(\zeta_k)[g(t_k)-g(t_{k-1})] = f(\zeta_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})].$$

$$= f(\zeta_i)[1-0] = f(\zeta_i) = \begin{cases} 0 \; ; & -1 \leq \zeta_i \leq 0 \\ 1 \; ; & 0 < \zeta_i \leq 1 \end{cases}$$

بالتالي لايوجد للمجموع $S(f,g,P)$ نهاية معينة عندما $\lambda(P) \to 0$ وهذا يعني

ن ألتكامل : $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ غير موجود ، بالرغم من وجود التكاملين :

$\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)$ ، $\int_{0}^{1} f(x)dg(x)$

ان التكامل $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ غير موجود لأن كلا التابعين $f(x)$ و $g(x)$ غير مستمر في النقطة $x=0$ (انظر تمرين ٣ من التمارين المحلولة) . بهـــذا الخصوص لدينا المبرهنة التالية :

٢-١-١١ مبرهنة :

اذا كان التكاملان $\int_{a}^{c} f(x)dg(x)$ ، $\int_{c}^{b} f(x)dg(x)$

موجودين حيث $a < c < b$ ، وكان أحد التابعين $f(x)$ أو $g(x)$ مستمرا فـــي النقطة $x = c$ ، والآخر محدودا في جوارها . عندئذ يكون $\int_{a}^{b} f(x)dg(x)$ موجودا . كما أن :

$$\int_{a}^{b} f(x)dg(x) = \int_{a}^{c} f(x)dg(x) + \int_{c}^{b} f(x)dg(x)$$

■ البرهان : اذا كانت P_1 و P_2 تجزئتين اختياريتين للمجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ على الترتيب.فيكون لدينا حسب الغرض :

$$\lim_{\lambda(P_1) \to 0} S(f,g,P_1) = \int_{a}^{c} f(x)dg(x)$$

وكذلك :

$$\lim_{\lambda(P_2)\to 0} S(f,g,P_2) = \int_c^b f(x)dg(x) ،$$

اذا كانت P أية تجزئة للمجال $[a,b]$ بحيث $c \in P$ ، فيمكن الحصول منها على تجزئتين P_1 و P_2 للمجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ على الترتيب ، حيث :

$$P_1 = P\cap[a,c] \quad , \quad P_2 = P\cap[c,b]$$

ومن أجل مجموع ستيلجس التكاملي الموافق يكون :

$$S(f,g,P) = S(f,g,P_1) + S(f,g,P_2)$$

منهذا نستنتج أن :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,g,P) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$$

حيث أن وجود الطرف الأيسر ناتج من وجود الطرف الأيمن .

لتكن الآن التجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$ للمجال $[a,b]$ بحيث $c \notin P$ ، فيكون مجموع ستيلجس التكاملي الموافق :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=i}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

حيث أن ξ_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1},x_k]$، $k = 1,2,\ldots,n$.
لنأخذ التجزئة : $P' := P\cup\{c\}$. عندئذ وبما أن $c \in P'$ فنجد حسب ماتقدم أن $\lim_{\lambda(P')\to 0} S(f,g,P')$ موجودة و تساوى $\int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$.

اذن للبرهان على وجود التكامل ماعلينا سوى اثبات أن :

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} [S(f,g,P) - S(f,g,P')] = 0 ،$$

لهذا نفرض أن $x_{i-1} < c < x_i$ من أجل قيمة معينة $k = i$.عندئذ اذا اخترنا وبشكل كيفي $\xi' \in [x_{i-1},c]$ و $\xi'' \in [c,x_i]$ وبقيت النقاط الأخرى $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ نفسها كما في المجموع $S(f,g,P)$ ، يكون لدينا :

$$S(f,g,P') = \sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] + f(\xi')[g(c) - g(x_{i-1})]$$
$$+ f(\xi'')[g(x_i) - g(c)] + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] .$$

بالسهولة نأخذ : $c = \xi'' = \xi' = \xi_i$، وهذا ممكن طبعا ، فنجد :

$$S(f,g,P) - S(f,g,P') = [f(\xi_i) - f(c)][g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

ولكن بحسب الفرضيات حول $f(x)$ و $g(x)$ وعندما $\lambda(P) \to 0$ فان أحد القوسين في الطرف الأيمن ينتهي للصفر ، بينما يبقى الآخر محدودا ، وهذا يعني أن :

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} [S(f,g,P) - S(f,g,P')] = 0$$

أى أن المجموعين $S(f,g,P)$ و $S(f,g,P')$ لهما نفس النهاية وهي طبعا $\int_a^b f(x)dg(x)$. بهذا نكون قد برهنا على وجود التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$

وبالتالي أيضا صحة العلاقة :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) .$$

<u>٢-١-١٢ ملاحظة</u> : يمكن تعميم المبرهنة (٢-١-٨) كما يلي :

اذا كان $a < c_1 < c_2 < \dots < c_m < b$. وكان التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا فيكون كل من التكاملات $\int_a^{c_1} f(x)dg(x)$ و $\int_{c_1}^{c_2} f(x)dg(x)$ و ..... $\int_{c_m}^b f(x)dg(x), \dots$ موجودا . ويكون أيضا :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^{c_1} f(x)dg(x) + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dg(x) + \dots + \int_{c}^{b} f(x)dg(x)$$

٢-١-١٢ ملاحظة :

عندما يكون $a < b$ وبشكل مشابه لتكامل ريمان نضع :

$$\int_a^b f(x)dg(x) := -\int_b^a f(x)dg(x)$$

كما نضع أيضا : $\int_a^a f(x)dg(x) := 0$

٢-٢ وجود تكامل ستيلجس :

نبحث الآن عن الشروط التي يجب أن يحققها التابعان $f(x)$ و $g(x)$ ليكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

في البداية سنأخذ $g(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$ ، عندئذ من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$. يكون $g(x_k) - g(x_{k-1}) \geq 0$ وسوف نستخدم الرموز التالية :

$$M_k(f) := \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

$$m_k(f) := \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x} f(x)$$

عندئذ نحصل على العلاقات التالية ، التي تلزم في بعض البراهين :

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x, y \leq x_k} \{f(x) - f(y)\}$$

و

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x, y \leq x_k} |f(x) - f(y)|$$

٢-٢-١ تعريف :

نسمي المجموعين $U(f,g,P)$ و $L(f,g,P)$ التاليين :

$$U(f,g,P) := \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$$L(f,g,P) := \sum_{k=1}^{n} m_k(f)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

مجموعي ستيلجس ـ داربو الأعلى والأدنى ، على الترتيب ، للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ الموافقين للتجزئة P (حيث $g(x)$ تابع متزايد) .

٢-٢-٢ ملاحظة :

لدينا هنا مايلي (ويمكن البرهان عليها بسهولة) :

آ - من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ يكون :

$$L(f,g,P) \leq S(f,g,P) \leq U(f,g,P)$$

ب - من أجل أية تجزئتين P و P' للمجال $[a,b]$ بحيث $P \subset P'$ يكون :

$$U(f,g,P') \leq U(f,g,P)$$

وكذلك :

$$L(f,g,P') \geq L(f,g,P)$$

جـ - من أجل أية تجزئتين P' و P'' للمجال $[a,b]$ يكون :

$$L(f,g,P') \leq U(f,g,P'')$$

٢-٢-٣ تعريف :

نسمي العددين I_U و I_L المعرفين بالشكل :

$$I_U := \inf_{P \in \mathbb{P}[a,b]} U(f,g,P)$$

$$I_L := \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} L(f,g,P)$$

تكاملي ستيلجس ـ داربو الأعلى والادنى ، على الترتيب ، للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ على المجال $[a,b]$ (حيث هنا $g(x)$ تابع متزايد) .

٢-٢-٤ نتيجة :

مما سبق نجد فورا :

$$L(f,g,P) \leq I_L \leq I_U \leq U(f,g,P)$$

وبالتالي فان :

$$U(f,g,P) - L(f,g,P) \geq 0$$

بامكاننا الآن تحديد الشروط التي من أجلها يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

٢-٢-٥ مبرهنة :

ليكن $g(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$ ، عندئذ تكون العبارات التالية متكافئة فيما بينها :

(١) التكامل $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ موجود .

(٢) من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ فان : $0 \leq [U(f,g,P) - L(f,g,P)] < \varepsilon$

(٣) $I_U = I_L$

■ البرهان : نبرهن أن (١) $\Longrightarrow$ (٢) $\Longrightarrow$ (٣) $\Longrightarrow$ (١) .

آ - نفرض أن التكامل $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ موجود ، ولنأخذ $g(a) < g(b)$

لأنه لو كان $g(a) = g(b)$ ، لكان $g(x)$ تابعا ثابتا على المجال $[a,b]$ وبالتالي تكون (٢) محققة وضوحا .

لتكن التجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ ، وبما أن التكامل موجود فهو مستقل عن طريقة اختيار النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ حيث $k = 1,2,\ldots,n$ ولنشكل المجموعين التكامليين التاليين :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \quad ; \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$S'(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \quad ; \quad \xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

عندئذ من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث اذا كان $\lambda(P) < \delta$ فان :

$$|S(f,g,P) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|S'(f,g,P) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ومنه نجد :

$$|S(f,g,P) - S'(f,g,P)| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

وبحسب العلاقة :

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1} \le x, y \le x_k} \{f(x) - f(y)\}$$

نستنتج أنه من أجل أى عدد $\eta > 0$ يمكن اختيار ξ_k و ξ'_k بحيث يكون :

$$M_k(f) - m_k(f) < [f(\xi_k) - f(\xi'_k)] + \eta$$

ولنختر الآن η بحيث :

$$0 < \eta < \frac{\varepsilon}{3[g(b) - g(a)]}$$

لدينا الآن من أجل $\lambda(p) < \delta$:

$$U(f,g,P) - L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)][g(x_k) - g(x_{k-1})] <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) - f(\xi'_k) + \eta][g(x_k) - g(x_{k-1})] =$$

$$[S(f,g,P) - S'(f,g,P)] + \eta\,[g(b) - g(a)] <$$

$$\frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

اذن العبارة (٢) محققة .

ب - نفرض الآن أن العبارة (٢) محققة ، عندئذ من أجل أى عدد مفروض $0 < \varepsilon$ يكون :

$$U(f,g,P) < L(f,g,P) + \varepsilon$$

وذلك من أجل التجزئة P للمجال $[a,b]$ حيث $\lambda(P) < \delta$.

لدينا الآن :

$$I_U \le U(f,g,P) < L(f,g,P) + \varepsilon \le I_L + \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارى فيكون : $I_U \le I_L$

ولكن حسب النتيجة (٢-٢-٤) فان : $I_L \le I_U$

وبالتالي : $I_U = I_L$ ، اذن العبارة (٣) محققة .

جـ- نفرض الآن أن العبارة (٣) محققة ، ولنضع $I_U = I_L := I'$

من تعريف I_U و I_L ينتج أنه من أجل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يمكن ايجاد تجزئتين P_1 و P_2 للمجال $[a,b]$ بحيث يكون :

$$U(f,g,P_1) < I_U + \varepsilon$$

و

$$L(f,g,P_2) > I_L - \varepsilon$$

ولنأخذ التجزئة $P := P_1 \cup P_2$ ، عندئذ اذا أخذنا بعين الاعتبار الملاحظة (٢-٢-٢) نجد :

$$I_L - \varepsilon < L(f,g,P) \le S(f,g,P) \le U(f,g,P) < I_U + \varepsilon$$

اذن

$$I' - \varepsilon < S(f,g,P) < I' + \varepsilon$$

أى أن :

$$|S(f,g,P) - I'| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن النهاية $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,g,P)$ موجودة وتساوى I' .وذلك حسب الملاحظة (٢-١-٣) .

أصبح الآن :

$$I' = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,g,P) = \int_a^b f(x)\,dg(x) = I$$

اذن العبارة (١) محققة .

<u>٢-٢-٦ ملاحظة :</u>

ان العبارة (٢) في المبرهنة السابقة تكافىء العلاقة :

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} [U(f,g,P) - L(f,g,P)] = 0$$

وينتج أن :

$$I_U = \lim_{\lambda(P)\to 0} U(f,g,P)$$

$$I_L = \lim_{\lambda(P)\to 0} L(f,g,P) \cdot$$

قبل البدء بعرض الاختبارات لوجود تكامل ستيلجس ، نذكر شيئا يتعلـــق بالتابع المكامَل $f(x)$.

۲-۲-۷ مبرهنة :

اذا كان التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا فيكون كل من التكاملين :

$\int_a^b |f(x)|dg(x)$ و $\int_a^b f^2(x)dg(x)$ موجود أيضا (حيث $g(x)$ تابع متزايد).

* البرهان : معلوم أن :

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1}\le x,y\le x_k} |f(x) - f(y)|$$

حيث أن $P = \{ a = x_o, x_1, \dots, x_n = b \}$ تجزئة للمجال $[a,b]$. ومـــن العلاقة المعروفة :

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)|$$

نجد بأخذ الـ sup للطرفين عندما $x_{k-1} \le x,y \le x_k$ أن :

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \le M_k(f) - m_k(f)$$

وبضرب طرفي هذه المتراجحة بالمقدار الموجب $[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ والتجميع من 1 الى n نجد :

$$U(|f|,g,P) - L(|f|,g,P) \le U(f,g,P) - L(f,g,P) \cdot$$

وبما أن التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود فانه حسب المبرهنة (۲-۲-٥) من أجـل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث انه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ فان :

$$U(f,g,P) - L(f,g,P) < \varepsilon$$

وبالتالي يكون : $U(|f|,g,P) - L(|f|,g,P) < \varepsilon$ من أجل $\lambda(P) < \delta$

وحسب المبرهنة المذكورة آنفا فان التكامل $\int_a^b |f(x)|dg(x)$ موجود .

أما من أجل $f^2(x)$ فنجد :

$$M_k(f^2) = M_k(|f|^2) \le [M_k(|f|)]^2$$

$$m_k(f^2) = m_k(|f|^2) \ge [m_k(|f|)]^2$$

واذا وضعنا $M := \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ نجد :

$$M_k(f^2) - m_k(f^2) \le [M_k(|f|)]^2 - [m_k(|f|)]^2 \le 2M[M_k(|f|) - m_k(|f|)]$$

وبالضرب بـ $[g(x_k)-g(x_{k-1})]$ والتجميع من 1 الى n نجد من أجل $\lambda(P)<\delta$ أن :

$$U(f^2,g,P) - L(f^2,g,P) \le 2M[U(|f|,g,P) - L(|f|,g,P)] < 2M\varepsilon$$

وبما أن العدد $\varepsilon > 0$ اختيارى فيكون التكامل $\int_a^b f^2(x)dg(x)$ موجودا وذلك حسب المبرهنة (٢ـ٢ـ٥) .

٢ـ٢ـ٨ ملاحظة :

حسب المبرهنة السابقة فان وجود التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ يؤدى لوجود التكامل $\int_a^b |f(x)|dg(x)$ حيث $g(x)$ تابع متزايد . ونضيف لهذا أن العلاقة التالية صحيحة :

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|dg(x)$$

لأنه في الواقع من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ لدينا :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \; ; \; \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

وبالتالي يكون :

$$|S(f,g,P)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|[g(x_k)-g(x_{k-1})] = S(|f|,g,P)\ .$$

وبأخذ النهايات عندما $\lambda(P) \longrightarrow 0$ نحصل على :

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|dg(x)\ .$$

فيما يلي نعرض بعض الاختبارات لوجود تكامل ستيلجس .

__٢-٢-٩ مبرهنة :__

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا وكان التابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

* البرهان : نفرض في البداية أن التابع $g(x)$ متزايد على المجال $[a,b]$ وبحيث يكون $g(a) < g(b)$.

بما أن التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على المجال $[a,b]$ ، فانه من أجل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $|x' - x''| < \delta$ فان $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

لتكن الآن التجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ بحيث $\lambda(P) < \delta$ عندئذ يكون :

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x,y \leq x_k} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$$

وبالتالي :

$$U(f,g,P) - L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)][g(x_k)-g(x_{k-1})] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \varepsilon$$

وحسب المبرهنة (٢-٢-٥) يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

أما اذا كان التابع $g(x)$ ذ ت م وليس بالضرورة متزايدا فيمكن كتابته بالشكل :

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

حيث أن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ تابعان متزايدان على المجال $[a,b]$.

وحسب ماتقدم يكون كل من التكاملين $\int_a^b f(x)dg_1(x)$ و $\int_a^b f(x)dg_2(x)$ موجودا وحسب المبرهنة (٢-١-٦) يكون التكامل :

$\int_a^b f(x)d[g_1(x)-g_2(x)]$ موجودا أيضا، اذن $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود.

<u>٢-٢-١٠ مبرهنة :</u>

اذا كان التابع $f(x)$ كمولا حسب ريمان على المجال $[a,b]$، والتابع $g(x)$ يحقق (شرط ليبشتز) :

$$|g(x') - g(x'')| \le K(x' - x'') \quad ; \quad a \le x'' < x' \le b$$

حيث K ثابتة موجبة، فيكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

* البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ يكون :

$$V(g,P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} K(x_k - x_{k-1}) = K(b - a)$$

ومنه نستنتج أن $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. كما أن وجود تكامل ريمان $\int_a^b f(x)dx$ يعني أنه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ فان :

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{K}$$

حيث هنا $U(f,P)$ و $L(f,P)$ مجموعي ريمان - داربو الأعلى والأدنى على الترتيب .

نفرض أولا أن التابع $g(x)$ متزايد على المجال $[a,b]$. عندئذ من أجل

، تجزئة P للمجال $[a,b]$ بحيث $\lambda(P) < \delta$ يكون :

$$U(f,g,P) - L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)][g(x_k) - g(x_{k-1})] \leq$$

$$K \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)](x_k - x_{k-1}) =$$

$$K\,[U(f,P) - L(f,P)] < \varepsilon$$

ن هذا وحسب المبرهنة (٢ـ٢ـ٥) يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

ما اذا لم يكن التابع $g(x)$ متزايدا على المجال $[a,b]$ ، لكنه ذ ت م ، فيمكن كتابته بالشكل :

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

حيث أن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ تابعان متزايدان على المجال $[a,b]$. وحسب ماتقدم فان التكاملين $\int_a^b f(x)dg_1(x)$ و $\int_a^b f(x)dg_2(x)$ موجود . وبالتالي حسب المبرهنة (٢ـ١ـ٦) فان التكامل $\int_a^b f(x)d[g_1(x)-g_2(x)]$ موجود أيضا .

اذن $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود .

٢ـ٢ـ١١ ملاحظة :

في المبرهنة (٢ـ٢ـ١٠) اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ والتابع $g(x)$ يحقق الشرط :

$$|g(x') - g(x'')| \leq K(x' - x'') \quad ; \quad a \leq x'' < x' \leq b$$

وبالتالي $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ كما رأينا في البرهان السابق، عندئذ يمكن تطبيق المبرهنة (٢ـ٢ـ٩) للبرهان على وجود التكامل

$$\int_a^b f(x)dg(x) .$$

٢-٢-١٢ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ كمولا حسب ريمان على المجال $[a,b]$ ، والتابع $g(x)$ يكتب بالشكل :

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

حيث أن $\int_a^b |\varphi(t)|dt$ موجود ومحدود . عندئذ يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا .

■ البرهان : نفرض أولا أن $\varphi(t) \geq 0$ وبالتالي يكون التابع $g(x)$ متزايدا . ولنفرض أيضا أنه من أجل كل $t \in [a,b]$ يكون $|\varphi(t)| \leq K$ حيث K ثابتة موجبة،عندئذ من أجل $a \leq x'' < x' \leq b$ يكون لدينا :

$$|g(x') - g(x'')| = \left|\int_{x''}^{x'} \varphi(t)dt\right| \leq \int_{x''}^{x'} |\varphi(t)|dt \leq K(x' - x'')$$

من هذا وحسب المبرهنة (٢-٢-١٠) يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا . أما اذا لم يكن $\varphi(t) \geq 0$ فنشكل التابعين المساعدين :

$$\varphi_1(t) := \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2} \quad , \quad \varphi_2(t) := \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2}$$

لنجد أن : $\varphi_1(t) \geq 0$ وكذلك : $\varphi_2(t) \geq 0$. كما أن :

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

وبالتالي :

$$g(x) = c + \int_a^x [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]dt = [c + \int_a^x \varphi_1(t)dt] - [\int_a^x \varphi_2(t)dt]$$

لنضع :

$$g_1(x) = c + \int_a^x \varphi_1(t)dt \quad \text{و} \quad g_2(x) := \int_a^x \varphi_2(t)dt$$

فنجد أن التابعين $g_1(x)$ و $g_2(x)$ متزايدان ، وحسب ماتقدم يكون التكاملان

$\int_a^b f(x)dg_1(x)$ و $\int_a^b f(x)dg_2(x)$ موجودين ، وبالتالي وحسب المبرهنة (١ـ١ـ٦) يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا أيضا .

٢ـ حساب تكامل ستيلجس :

نبحث في هذه الفقرة كيفية حساب تكامل ستيلجس $\int_a^b f(x)dg(x)$.

أول مايتبادر للذهن ارجاعه لتكامل ريمان ، وهذا ممكن طبعا في بعض الحالات. في البداية نرى متى يمكن تعويض $dg(x)$ بـ $g'(x)dx$.

نشير هنا أننا سنكتب $\int_a^b f(x)dx$ (R) و $\int_a^b f(x)dg(x)$ (S) للدلالة على تكامل ريمان وتكامل ستيلجس على الترتيب ، وذلك تجنبا للالتباس ، عند ورودهما بوقت واحد .

<u>٢ـ٢ـ١ مبرهنة :</u>

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ وكان للتابع $g(x)$ مشتق محدود وكمول حسب ريمان على المجال $[a,b]$ ، عندئذ يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ (S) موجودا ويحسب بالعلاقة :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

* البرهان : هنا نجد أن التابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، وذلك حسب النتيجة (١ـ٣ـ٣) وبالتالي يكون : $\int_a^b f(x)dg(x)$ (S) موجودا ، حسب المبرهنة (٢ـ٢ـ٩) . كذلك من الواضح أن التكامل $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ (R) موجود أيضا . ولنبرهن على المساواة بين هذين التكاملين .

لتكن التجزئة : $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ ، ولنطبق دستور التزايدات المحدودة على الفرق $[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ حيث $k = 1,2,\dots,n$.

بما أن المشتق $g'(x)$ موجود ومحدود فتوجد نقطة مناسبة $\theta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ بحيث يكون :

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\theta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad ; \quad k = 1,2,\dots,n$$

نشكل الآن مجموع ستيلجس التكاملي حيث نختار فيه $\xi_k = \theta_k$ من أجل $k = 1,2,\dots,n$ وهذا ممكن حسب ماتقدم ، فنجد :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\, g'(\theta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sigma(fg', P)$$

من هذا نجد عندما $\lambda(P) \longrightarrow 0$ أن :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \ .$$

- يمكن تعميم هذه المبرهنة ، كما يلي :

<u>٢-٣-٢ مبرهنة :</u>

بنفس الفرضيات الواردة في المبرهنة (٢-٢-١٢) يكون :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \ .$$

* البرهان : ان التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود كما رأينا في المبرهنة (٢-٢-١٢) .

أما التكامل $(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ فهو موجود أيضا حسب الفرضيات.

ولنبرهن على المساواة بين التكاملين .

من أجل التجزئة $P = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ يكون :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\varphi(x)dx$$

ومن ناحية ثانية فان :

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi(x)dx \quad .$$

وبالتالي يكون :

$$S(f,g,P) - \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\varphi(x)dx \; .$$

فاذا فرضنا في البداية أن : $\varphi(t) \geq 0$ وبالتالي فان $g(x)$ تابع متزايــــــد، ولاحظنا أن :

$$|f(\xi_k) - f(x)| \leq M_k(f) - m_k(f) \quad ; \quad \forall\, x \in [x_{k-1}, x_k]$$

نجد :

$$\left| S(f,g,P) - \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)][g(x_k) - g(x_{k-1})] =$$

$$= U(f,g,P) - L(f,g,P)$$

وبما أن $\int_a^b f(x)dg(x)$ (S) موجود ـ كما ذكرنا في بداية البرهان ـ فانه حسب.

المبرهنة (٢-٢-٥) ، من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنـه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ ، فيكون الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة أصغر من ε.

وبالتالي من أجل $\lambda(P) < \delta$ يكون لدينا :

$$\left|S(f,g,P) - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx\right| < \varepsilon$$

وحسب الملاحظة (٢-١-٣) يكون :

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,g,P) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx$$

ومعلوم أن :

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,g,P) = (S)\int_a^b f(x)dg(x)$$

وبالتالي نحصل على العلاقة المطلوبة عندما يكون $\varphi(t) \geq 0$.

أما اذا لم يكن $\varphi(t) \geqslant 0$ فنأخذ تابعين مساعدين :

$$\varphi_1(t) := \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2} \quad , \quad \varphi_2(t) := \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2}$$

حيث $\varphi_1(t) > 0$ و $\varphi_2(t) > 0$. وبالتالي فان $g(x)$ يأخذ الشكل التالي :

$$g(x) = [c + \int_a^x \varphi_1(t)dt] - [\int_a^x \varphi_2(t)dt] = g_1(x) - g_2(x)$$

والتابعان $g_1(x)$ و $g_2(x)$ متزايدان على المجال $[a,b]$. وحسب ماتقدم يكون :

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x) = (R)\int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)dx$$

$$(S)\int_a^b f(x)dg_2(x) = (R)\int_a^b f(x)\,\varphi_2(x)dx$$

بطرح هاتين العلاقتين طرفا من طرف نجد :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx$$

هي العلاقة المطلوبة .

نتعرف الآن طريقة جديدة لحساب تكامل ستيلجس ، حيث تظهر قفزات لتابع $g(x)$ في النقاط الداخلية للمجال $[a,b]$ وفي طرفيه ، وذلك عندما يأخذ قيما ثابتة على هذا المجال .

۲-۳-۲ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ وكان التابع $g(x)$ يأخذ قيما ثابتة داخل المجالات الجزئية ، $[a,c_1],[c_1,c_2],\ldots,[c_m,b]$ حيث $a<c_1<c_2<\ldots<c_m<b$ ، عندئذ يكون التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا ويحسب بالعلاقة :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(a+o)-g(a)] + \sum_{i=1}^{m} f(c_i)[g(c_i+o) - g(c_i-o)] + f(b)[g(b)-g(b-o)]$$

* البرهان : حسب المبرهنة (۱-۳-۸) فان التابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. وبالتالي حسب المبرهنة (۲-۲-۹) يكون $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا.

لنضع الآن $a = c_o$ و $b = c_{m+1}$ ، فيكون :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=o}^{m}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dg(x)$$

حيث أن التكامل $\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dg(x)$ موجود ، ولحسابه نأخذ التجزئـــة
$P_i = \{c_i = x_0^i, x_1^i, \ldots, x_n^i = c_{i+1}\}$ للمجال $[c_i, c_{i+1}]$، $i = 0,1,2,\ldots,m$
ونشكل مجموع ستيلجس التكاملي الموافق لها $S(f,g,P_i)$.

ولكن وبما أن $g(x_k^i) - g(x_{k-1}^i) = 0$ من أجل $c_i < x_{k-1}^i, x_k^i < c_{i+1}$
نجد من أجل النقاط الاختيارية $\xi_k \in [x_{k-1}^i, x_k^i]$ حيث $k = 1,2,\ldots,n$ أن:

$$S(f,g,P_i) = f(\xi_1)[g(c_i + 0) - g(c_i)] +$$

$$+ f(\xi_n)[g(c_{i+1}) - g(c_{i+1} - 0)]$$

وبالتالي يكون من أجل $i = 0,1,\ldots,m$:

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dg(x) = \lim_{\lambda(P_i) \to 0} S(f,g,P_i) = f(c_i)[g(c_i + 0) -$$

$$- g(c_i)] + f(c_{i+1})[g(c_{i+1}) - g(c_{i+1} - 0)] ،$$

وبتجميع هذه العلاقات من 0 الى m نحصل على العلاقة المطلوبة .

• فيما يلي نريد تعميم طريقة حساب تكامل ستيلجس للحالة التي يكون فيها للتابع $g(x)$ قفزات في عدد محدود من نقاط المجال $[a,b]$ وفي طرفيه - حيث المشتق $g'(x)$ غير موجود ، وربما أيضا في نقاط أخرى من المجال $[a,b]$ ولكن عددها محدود - وليس بالضرورة أن يأخذ قيما ثابتة على المجال $[a,b]$.

٢-٣-٤ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ وكان للتابـــع $g(x)$ نقاط انقطاع من النوع الأول : $a, c_1, c_2, \ldots, c_m, b$ حيـــث $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b$ ، وبحيث يكون المشتق $g'(x)$ كمولا حسب ريمان على المجال $[a,b]$. عندئذ يكون $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا ويحسب بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} f(c_i)[g(c_i + 0) - g(c_i - 0)] +$$

$$+ f(b)[g(b) - g(b-0)].$$

■ البرهان : لنضع $a = c_o$ و $b = c_{m+1}$.

ليكن التابع $\psi(x)$ حيث :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $\psi(x)$ مستمر في كل النقاط ماعدا في $x = 0$ حيث أنه مستمر من اليسار وله قفزة قيمتها :

$$\psi(0+0) - \psi(0) = 1$$

من هذا نجد أن للتابع $\psi(x-c)$ في النقطة $x = c$ قفزة قيمتها :

$$\psi(c+0) - \psi(c) = 1 \qquad ; \qquad (a < c < b)$$

وللتابع $\psi(c-x)$ في النقطة $x = c$ قفزة قيمتها :

$$\psi(c) - \psi(c-0) = -1$$

عندئذ من أجل التابع $f(x)$ المستمر في النقطة $x = c$ نجد (نبرهن هذا في التمارين المحلولة رقم ٧):

$$(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(x-c) = f(c) \qquad ; \quad a \leq c < b$$

(من أجل $c = b$ تكون قيمة التكامل 0) .

وكذلك :

$$(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(c-x) = -f(c) \quad ; \quad a < c \leq b$$

(من أجل $c = a$ تكون قيمة التكامل 0) .

لاختصار الكتابة سنضع الآن :

$$h_k^+ := g(c_k + 0) - g(c_k) \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots,m$$

$$h_k^- := g(c_k) - g(c_k - 0) \quad ; \quad k = 1,2,\dots,m+1$$

فيكون :

$$h_k^+ + h_k^- = g(c_k + 0) - g(c_k - 0) \quad ; \quad k = 1,2,\dots,m$$

والآن نشكل تابعين مساعدين $g_1(x)$ و $g_2(x)$ كما يلي :

$$g_1(x) := \sum_{k=0}^{m} h_k^+ \psi(x - c_k) - \sum_{k=1}^{m+1} h_k^- \psi(c_k - x)$$

$$g_2(x) := g(x) - g_1(x)$$

فنجد أن $g_1(x)$ مستمر ، ولنبرهن أن $g_2(x)$ مستمر أيضا على المجال $[a,b]$. عندما $x \neq c_k$ فمن الواضح أن $g_2(x)$ مستمر ، طالما أن كلا من $g(x)$ و $g_1(x)$ مستمر من أجل $x \neq c_k$. وسوف نبرهن الآن أن $g_2(x)$ مستمر في النقطة $x = c_k$ (من اليمين - من اليسار) .

ان جميع الحدود في عبارة التابع $g_1(x)$ هي توابع مستمرة من اليمين في النقطة $x = c_k$ ماعدا الحد $h_k^+ \psi(x - c_k)$ حيث $k = 0,1,2,\dots,m$ لذا يكفي البرهان أن التابع $[g(x) - h_k^+ \psi(x - c_k)]$ مستمر من اليمين في النقطة $x = c_k$. من الواضح أن لهذا التابع القيمة $g(c_k)$ في النقطة $x = c_k$ ، وبنفس الوقت يكون:

$$\lim_{x \to c_k + 0} [g(x) - h_k^+ \psi(x - c_k)] = g(c_k + 0) - h_k^+ = g(c_k) \; .$$

من هذا نستنتج أن $g_2(x)$ مستمر من اليمين في النقطة $x = c_k$ حيث $k=0,1,\dots,m$. وبشكل مشابه نبرهن أن $g_2(x)$ مستمر من اليسار في النقطة $x = c_k$ حيث $k = 1,2,\dots,m+1$

لتكن الآن النقطة $x \in [a,b]$ بحيث $x \neq c_k$ والمشتق $g'(x)$ موجود.

عندئذ في جوار x يكون $g_1(x)$ ثابتا ، وبالتالي فان المشتق $g_2'(x)$ موجـود ويكـــون

$$g_2'(x) = g'(x)$$

ولكن حسب المبرهنة (٢ـ٣ـ١) فان التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg_2(x)$ موجـــود ويكون :

$$(S)\int_a^b f(x)dg_2(x) = (R)\int_a^b f(x)g_2'(x)dx = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

كذلك فان التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg_1(x)$ موجود حسب المبرهنة (٢ـ١ـ٦)، ويكون :

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x) = \sum_{k=0}^{m} h_k^+ (S)\int_a^b f(x)d\,\psi(x - c_k) -$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} h_k^- (S)\int_a^b f(x)d\,\psi(c_k - x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} h_k^+ f(c_k) + \sum_{k=1}^{m+1} h_k^- f(c_k) =$$

$$= f(a)[g(a + 0) - g(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k + 0) - g(c_k - 0)] +$$

$$+ f(b)\,[g(b) - g(b - 0)]$$

لدينا الآن $g(x) = g_2(x) + g_1(x)$ ، وبالتالي يكون : $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا حسب المبرهنة (٢ـ١ـ٦) ويكون :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (S)\int_a^b f(x)dg_2(x) + (S)\int_a^b f(x)dg_1(x).$$

وبالتعويض في الطرف الأيمن لحد بحد بمساويه نحصل على العلاقة المطلوبة .

٢-٣-٥ ملاحظة :

من المبرهنة الأخيرة نلاحظ أنه من أجل $a < c < b$ لاتؤثر القيمة $g(c)$ في حساب تكامل ستيلجس $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ ، وانما القيمتان $g(c+0)$ و $g(c-0)$ وذلك بخلاف طرفي المجال a و b ، مع ذلك يجب أن تكون القيمة $g(c)$ محدودة ، كما لاحظنا خلال البرهان .

٢-٣-٦ ملاحظة :

تعتبر المبرهنة (٢-٣-٤) تعميما للمبرهنتين (٢-٣-١) و (٢-٣-٣). اذ عندما يكون التابع $g(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ ، وبالتالي كل قفزاته معدومة ، وله - ربما باستثناء عدد محدود من نقاط المجال $[a,b]$ - مشتق $g'(x)$ كمول حسب ريمان ، فنحصل على المبرهنة (٢-٣-١) .

أما اذا كان $g(x)$ يأخذ قيما ثابتة (مختلفة) على المجال $[a,b]$ ، أي له قفزات ، فيكون $g'(x) = 0$ في كل نقاط المجال $[a,b]$ التي يتواجد فيها هذا المشتق . وبالتالي نحصل على المبرهنة (٢-٣-٣) .

كما هو الحال في تكامل ريمان فيوجد أيضا مايسمى مبرهنة القيمة الوسطى في تكامل ستيلجس ، وهي :

٢-٣-٧ مبرهنة : (مبرهنة القيمة الوسطى)

اذا كان التابع $f(x)$ محدودا على المجال $[a,b]$؛ $m \le f(x) \le M$ وكان التابع $g(x)$ متزايدا وبحيث يكون التكامل $I = (S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا . عندئذ يوجد عدد μ بحيث $m \le \mu \le M$ ويحقق العلاقة

$$I = \mu\,[g(b) - g(a)]$$

واذا كان $f(x)$ مستمرا فتوجد نقطة مناسبة $\xi \in [a,b]$ بحيث يكون :

$I = f(\xi)\,[g(b) - g(a)]$.

■ البرهان : نفرض أن $g(a) < g(b)$ ، لأنه من أجـــل $g(a) = g(b)$ يكون $g(x)$ تابعا ثابتا على المجال $[a,b]$ وبالتالي العلاقة محققة سلفا .

لتكن التجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ و ξ_k نقـــاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1} , x_k]$ حيث $k = 1,2,\ldots,n$ عندئـــذ يكون :

$$m \le f(\xi_k) \le M \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,n$$

وبضرب هذه المتراجحات بـ $[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ والتجميع من 1 الى n نجد :

$$m[g(b) - g(a)] \le S(f,g,P) \le M[g(b) - g(a)]$$

ومن أجل $\lambda(P) \longrightarrow 0$ يكون لدينا :

$$m[g(b) - g(a)] \le I \le M[g(b) - g(a)]$$

أي أن :

$$m \le \frac{I}{g(b) - g(a)} \le M$$

فاذا اخترنا : $\mu := \frac{I}{g(b) - g(a)}$ فان $m \le \mu \le M$ وكذلك يكون :

$$I = \mu[g(b) - g(a)]$$

وهي العلاقة المطلوبة . أما اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجـــال $[a,b]$ فتوجد نقطة مناسبة $\xi \in [a,b]$ بحيث يكون $\mu = f(\xi)$ وبالتالي نحصل علـــى المطلوب .

٢ـ٣ـ٨ نتيجة :

اذا كان التابع $f(x)$ كمولا حسب ريمان على المجال $[a,b]$ ، وكان التابـع $g(x)$ متزايدا على المجال $[a,b]$ فتوجد نقطة مناسبة $\xi \in [a,b]$ بحيـــث يكون :

$$(R)\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

(وهذا مايسمى مبرهنة القيمة الوسطى الثانية في تكامل ريمان) . ويتم برهانها اعتمادا على مبرهنة القيمة الوسطى في تكامل ستيلجس (٢-٣-٧) كما يلي :

لنأخذ التابع :

$$F(x) := (R)\int_a^x f(t)dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

ونعتبر هنا أن : $F(a) = 0$ ، فيكون لدينا :

$$(R)\int_a^b f(x)g(x)dx = (S)\int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - (S)\int_a^b F(x)dg(x)$$

$$= g(b)\,F(b) - F(\xi)\,[g(b) - g(a)] =$$

$$= g(a)\,F(\xi) + g(b)\,[F(b) - F(\xi)] =$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx \; .$$

حيث هنا ξ نقطة مناسبة من المجال $[a,b]$ ووجودها مضمون حسب المبرهنة (٢-٣-٧) .

٢-٤ النهايات في تكامل ستيلجس :

نبحث في هذه الفقرة امكانية ادخال النهاية تحت اشارة التكامل . وقبل البدء بهذا نذكر المبرهنتين المساعدتين التاليتين .

٢-٤-١ مبرهنة مساعدة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا والتابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون :

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \max_{a\le x\le b} |f(x)| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) .$$

* البرهان : ان وجود التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ ينتج من المبرهنة (٢-٢-٩) .

من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$ لدينا الآن :

$$|S(f,g,P)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq$$

$$\max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq$$

$$\max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \overset{b}{\underset{a}{V}} (g)$$

وعندما نجعل $\lambda(P) \longrightarrow 0$ نحصل على العلاقة المطلوبة .

أما المبرهنة المساعدة التالية ـ وبنفس الفرضيات للتابعين $f(x)$ و $g(x)$

فتبين لنا جودة التقريب للتكامل $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ من خلال مجموع

ستيلجس التكاملي $S(f,g,P)$.

<u>٢-٤-٢ مبرهنة مساعدة :</u>

بنفس الفرضيات الواردة في المبرهنة المساعدة (٢-٤-١) ، فانه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ تصح العلاقة :

$$|S(f,g,P) - I| < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}} (g)$$

حيث أن : $I = \int_a^b f(x)dg(x)$.

* البرهان : معلوم من المبرهنة (٢-٢-٩) أن التكامل $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ موجود .

من أجل التجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$ لدينا :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dg(x)$$

حيث هنا : $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ نقاط اختيارية و $k = 1,2,\ldots,n$ كما أن :

$$I = \int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dg(x)$$

وبالتالي يكون :

$$S(f,g,P) - I = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]dg(x)$$

وبما أن $f(x)$ مستمر بانتظام على المجال $[a,b]$ ، فانه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث اذا كان $|x' - x''| < \delta$ فان $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ وذلك مهما تكن x' و x'' من المجال $[a,b]$.

من هذا وحسب المبرهنة المساعدة (٢ـ٤ـ١) نجد من أجل $\lambda(P) < \delta$ أن :

$$|S(f,g,P)-I| \leq \sum_{k=1}^{n} \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} |f(\xi_k)-f(x)| . \underset{x_{k-1}}{\overset{x_k}{V}}(g) < \varepsilon \underset{a}{\overset{b}{V}}(g)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

ننتقل الآن للبحث في امكانية ادخال النهاية تحت اشارة التكامل .

<u>٢ـ٤ـ٣ مبرهنة :</u>

اذا كانت $\{f_N(x)\}$ متتالية من التوابع المستمرة على المجال $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ واذا كان التابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. عندئذ يكون :

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$$

* البرهان : بسبب التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_N(x)\}$ فانه من أجل

دد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون (من أجل $N > N_0(\varepsilon)$):

$$\max_{a \le x \le b} |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

أن التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$. وبالتالي نلاحظ فـــورا أن

املات $\int_a^b f(x)dg(x)$ و $\int_a^b f_N(x)dg(x)$ موجودة ، حيـــث

$N = 1,2,\ldots$. لدينا الآن من أجل $N > N_0(\varepsilon)$ وبحسب المبرهنة المساعـدة ١-٤) :

$$\left|\int_a^b f_N(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int_a^b [f_N(x)-f(x)]\; dg(x)\right| \le$$

$$\le \max_{a \le x \le b} |f_N(x) - f(x)| \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

ما أن $\varepsilon > 0$ يمكن اختياره صغيرا قدر مانريد نستنتج أن :

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$$

٤-٤ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ ، وكانت $\{g_N(x)\}$

متتالية من التوابع ذات التغيرات المحدودة على المجال $[a,b]$ ومتقاربـــة

(نقطيا) من تابع $g(x)$ ويوجد عدد ثابت K بحيث يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_N) \le K \quad ; \quad \forall N = 1,2,\ldots$$

عندئذ يكون :

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f(x)dg_N(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$$

■ البرهان : لنتأكد أولا أن التابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ يكون :

$$V(g,P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \lim_{N\to\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n} |g_N(x_k) - g_N(x_{k-1})|\Big] \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \Big[\overset{b}{\underset{a}{V}} (g_N)\Big] \leq K$$

ومنه نستنتج أن التابع $g(x)$ ذ ت م وبنفس الوقت يكون : $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leq K$

وبحسب المبرهنة (٩-٣-٢) فان التكاملات : $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ و

$I_N = \int_a^b f(x)dg_N(x)$ موجودة من أجل $N = 1,2,\ldots$.

من أجل التجزئة P للمجال $[a,b]$ تشكل مجاميع ستيلجس التكاملية الموافقة للتكاملات I و I_N وهي على الترتيب :

$$S: = S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$$S_N: = S(f,g_N,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\ [g_N(x_k) - g_N(x_{k-1})]$$

حيث أن ξ_k و ξ'_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1},x_k]$ ، $k=1,2,\ldots,n$

وهنا يمكن أن نأخذ : $\xi_k = \xi'_k$ من أجل $k = 1,2,\ldots,n$ وبالتالي نجد :

$$S_N - S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ [g_N(x_k) - g(x_k)] - [g_N(x_{k-1}) - g(x_{k-1})] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

وهذا يعني أنه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون امن أجل $N > N_0(\varepsilon)$:

$$|S_N - S| < \varepsilon$$

حسب المبرهنة المساعدة (٢-٤-٢) يكون من أجل $\varepsilon > 0$:

$$|S - I| < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}} (g) \leq \varepsilon K$$

$$|S_N - I_N| < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}}(g_N) \leq \varepsilon K$$

من أجل $N > N_0(\varepsilon)$ يكون لدينا الآن :

$$|I_N - I| \leq |I_N - S_N| + |S_N - S| + |S - I| < (2K + 1)\varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ يمكن اختياره صغيرا قدر مانريد فان :

$$\lim_{N \to \infty} I_N = I$$

وهي العلاقة المطلوبة .

٢-٥ التأويل الهندسي لتكامل ستيلجس - تطبيق :

من المعلوم أن قيمة تكامل ريمان $(R)\int_a^b f(x)dx$ تمثل المساحة

المحصورة بين منحني التابع $f(x)$ والمحور ox والمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

ونتساءل الآن ماذا تمثل قيمة تكامل ستيلجس : $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$.

والجواب فيما يلي :

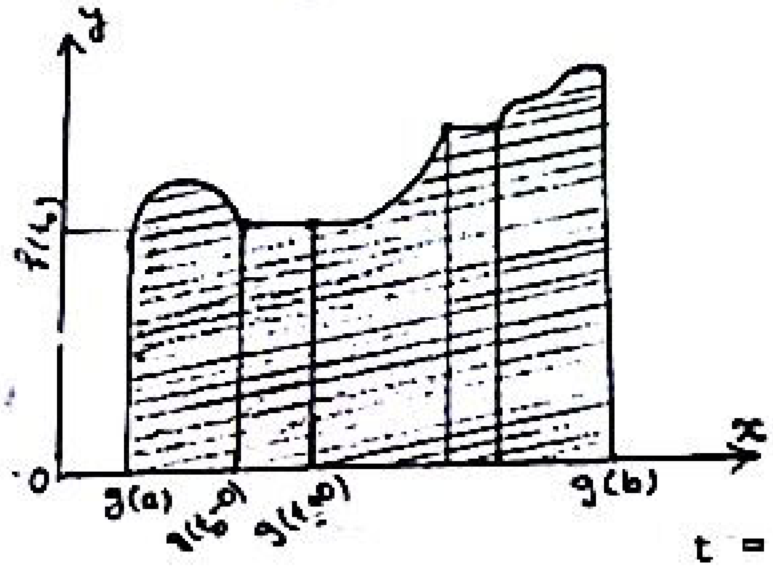
٢-٥-١ التأويل الهندسي لتكامل ستيلجس :

لنأخذ هنا $f(t)$ تابعا مستمرا وموجبا على المجال $[a,b]$ و $g(t)$ تابع متزايد تماما على $[a,b]$ وليس بالضرورة مستمر (قد يوجد لـ $g(t)$ قفزات) .

ان العلاقات :

$$x = g(t) \quad , \quad y = f(t) \quad ; \quad t \in [a,b]$$

عبارة عن تمثيل وسيطي لمنحن (K) ، قد لايكون مستمرا . فاذا كان للتابع $g(t)$



من أجل $t = t_o$ القفزة :

$$g(t_o + 0) - g(t_o - 0) > 0$$

وعندما $t \longrightarrow t_o$ فنجد أن القيمة

$f(t_o)$ لـ $y = f(t)$ توافق

كلاً من القيمتين $g(t_o-0)$ و $g(t_o+0)$

لـ $x = g(t)$ وبالتالي من أجل $t = t_o$

يكون على المنحني (χ) النقطتان :

$$\big(g(t_o - 0)\ ,\ f(t_o)\big) \text{ و } \big(g(t_o + 0)\ ,\ f(t_o)\big) .$$

نحل بين هذه النقاط بقطع مستقيمة موازية للمحور ox وذلك من أجل جميع قفزات التابع $g(t)$ ، فنحصل على منحن مستمر (L) . وسوف نبرهن الآن أن قيمة التكامل $\int_a^b f(t)dg(t)$ (S) تمثل المساحة المحصورة بين المنحني (L) والمحور ox والمستقيمين $x = g(a)$ و $x = g(b)$. لهذا نأخذ تجزئة للمجال $[a,b]$:

$$P = \{ a = t_o, t_1, \dots, t_n = b \}$$

فيقابلها تجزئة للمجال : $[g(a)\ ,\ g(b)]$ هي :

$$\tilde{P} = \{ g(a) = g(t_o)\ ,\ g(t_1), \dots, g(t_n) = g(b) \}$$

فاذا وضعنا :

$$M_k(f) = \max f(t)\quad ,\quad m_k(f) = \min f(t)\quad ;\quad t_{k-1} \le t \le t_k$$

وشكلنا مجاميع ستيلجس ـ داربو :

$$U(f, g, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,[g(t_k) - g(t_{k-1})]$$

$$L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\ [g(t_k) - g(t_{k-1})]$$

جدنا أن قيمة $U(f,g,P)$ تمثل المساحة المحصورة بين المحـــور ox لمستقيمين $x = g(a)$ و $x = g(b)$ والخط المنكسر الواقع فوق المنحنـي L) (الذى توافق زواياه نقاط التجزئة $\tilde{P}$) ، بينما تمثل قيمة $L(f,g,P)$ ا مساحة المحصورة بين ox و $x = g(a)$ و $x = g(b)$ والخط المنكـــــر واقع تحت المنحني (L) . ولكن عندما $\lambda(P) \longrightarrow 0$ فان كلا المجموعين $U(f,g,P)$ و $L(f,g,P)$ لهما نفس النهاية وهي قيمة التكامـــــل

$(S)\int_a^b f(t)dg(t)$.وبهذا نكون قد حصلنا على مانريد .

٢ـ٥ـ٢ تكامل تابع مجال :

ليكن المجال $[a,b]$. ولنعرف عليه تابعا G بالشكل التالي :

كل مجال جزئي $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ نقابله بعدد حقيقي $G([\alpha,\beta])$ وبحيث تتحقق الخاصة التالية :

من أجل أية نقطة γ (حيث $\alpha < \gamma < \beta$) فان :

$$G([\alpha\ ,\ \beta]) = G([\alpha\ ,\ \gamma]) + G([\gamma\ ,\ \beta])$$

أى أن $G([\alpha,\beta])$ يمثل تابعا جبريا بمتحوله الذى هو مجال $[\alpha, \beta]$.
اضافة لذلك نفرض وجود تابع نقطة $f(x)$ معرف أيضا على المجال $[a,b]$.
لنأخذ الآن تجزئة للمجال $[a,b]$ ، $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$
فنحصل على أسرة من المجالات الجزئية من $[a,b]$ هي :

$$[x_o,x_1]\ ,\ [x_1\ ,\ x_2]\ ,\ldots,\ [x_{n-1},x_n]$$

ينطبق عليها ماتقدم .

في كل مجال جزئي $[x_{k-1},x_k]$ نختار نقطة مثل ξ_k حيث $k = 1,2,..,n$
ثم نشكل المجموع التالي :

$$(1) \qquad S(f,G,P) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, G([x_{k-1},x_k]) \;.$$

نفرض أن لهذا المجموع نهاية معينة محدودة عندما $\lambda(P) \longrightarrow 0$ ولنرمز لها بالرمز :

$$(1)' \qquad I = \int_a^b f(x)\, G(dx)$$

ونتساءل الآن كيف يمكن حساب هذه النهاية (التكامل) اعتمادا على تكامل ستيلجس . من أجل ذلك سنعرف على المجال $[a,b]$ تابعا آخر $g(x)$ بالشكل:

$$g(a) := 0$$

$$g(x) := G([a,x]) \qquad ; \quad a < x \leq b$$

فاذا ما اعتبرنا $G([\alpha , \beta]) = -G([\beta , \alpha])$ نجد أن :

$$G([\alpha , \beta]) = g(\beta) - g(\alpha)$$

وبالتالي فان المجموع (1) يؤول لمجموع ستيلجس التكاملي المألوف ، حيث :

$$(2) \qquad S(f,G,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = S(f,g,P)$$

ومنه نستنتج أن حساب التكامل $(1)'$ يؤول لحساب تكامل ستيلجس :

$$(2) \qquad I = (S) \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

(حيث نحصل على هذا من المجموع (2) عندما $\lambda(P) \longrightarrow 0$) .

في حالة خاصة اذا كان $G([\alpha , \beta])$ = طول المجال $[\alpha , \beta] = \beta - \alpha$

فان التكامل السابق يؤول لتكامل ريمان .

تتمات وتمارين محلولة II

II-1 اذا كان التكاملان $(S)\int_a^b f_1(x)dg(x)$ ، $(S)\int_a^b f_2(x)dg(x)$ موجودين

من أجل التابع المتزايد $g(x)$ وكان :

$$f_1(x) \leq f_2(x) \quad , \quad x \in [a,b]$$

برهن أن :

$$(S)\int_a^b f_1(x)dg(x) \leq (S)\int_a^b f_2(x)dg(x)$$

الحل : لتكن التجزئة : $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ عندئذ يكون:

$$f_1(\xi_k) \leq f_2(\xi_k) \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,n$$

حيث ξ_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1} , x_k]$ و

$k = 1,2,\ldots,n$ وبضرب طرفي المتراجحة بـ $0 \leq [g(x_k) - g(x_{k-1})]$

والتجميع من 1 الى n نجد :

$$S(f_1,g,P) \leq S(f_2,g,P)$$

من أجل $\lambda(P) \longrightarrow 0$ نحصل على العلاقة المطلوبة .

II-2 اذا كان التكاملان $(S)\int_a^b f_1(x)dg(x)$ و $(S)\int_a^b f_2(x)dg(x)$

موجودين من أجل التابع المتزايد $g(x)$.

برهن على وجود التكامل : $(S)\int_a^b f_1(x)f_2(x)dg(x)$.

الحل : بحسب العلاقة :

$$f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{4}\left\{[f_1(x) + f_2(x)]^2 - [f_1(x) - f_2(x)]^2\right\}$$

وحسب المبرهنتين (٢-١-٥) و (٢-٢-٧) يكون التكامل $(S)\int_a^b f_1(x)f_2(x)dg(x)$

موجودا .

II-3 برهن أن التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ غير موجود اذا كان كل من

التابعين $f(x)$ و $g(x)$ غير مستمر في النقطة $x = c$ (حيث $a \leq c \leq b$)

الحل : آ ـ نفرض أولا أن $a < c < b$ و $g(c-0) \neq g(c+0)$.

لتكن التجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$ حيث $P \not\ni c$

لذا نفرض أن $x_{i-1} < c < x_i$. ولنشكل مجموعين تكاملين كما يلي :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

حيث أن $\xi_k \neq c$ و $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ و $k = 1,2,\ldots,n$

و

$$S'(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

حيث $\xi'_k = \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ من أجل $k \neq i$, $\xi_i = c \in [x_{i-1}, x_i]$

فنجد أن :

$$S(f,g,P) - S'(f,g,P) = [f(\xi_i) - f(c)][g(x_i) - g(x_{i-1})] .$$

وعندما تقترب نقاط التجزئة P من بعضها كثيرا (أى عندما $\lambda(P) \to 0$)

فان :

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) \longrightarrow g(c+0) - g(c-0) \neq 0 \; ,$$

وبما أن $f(x)$ غير مستمر في النقطة $x = c$ فيمكن اختيار ξ_i من المجال الجزئي $[x_{i-1}, x_i]$ بحيث يبقى المقدار $|f(\xi_i) - f(c)|$ اكبر من عدد $0 < \gamma$.

من هذا كله نجد أن :

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} [S(f,g,P) - S'(f,g,P)] \neq 0$$

الذي نستنتج منه أن التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ غير موجود .

ب ـ نفرض الآن أن $a \leq c \leq b$ و $g(c-0) = g(c+0) \neq g(c)$

حيث أنه في حالة $c = a$ نأخذ $g(a+0) + g(a)$ وفي حالة $c = b$ نأخذ $g(b) + g(b-0)$ فقط . لنأخذ تجزئة P للمجال $[a,b]$ وتحوى النقطة c حيث :

$$P = \{a = x_o, x_1, \ldots, c = x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$$

وكما في الحالة (آ) نشكل مجموعين تكامليين :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

حيث أن $\xi_k \ni [x_{k-1}, x_k]$ من أجل $k \neq i$ و $c \neq \xi_i \ni [c, x_i]$

و

$$S'(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

حيث أن $\xi_k = \xi'_k \ni [x_{k-1}, x_k]$ من أجل $k \neq i$ و $\xi'_i = c \ni [c, x_i]$

فيكون لدينا :

$$S(f,g,P) - S'(f,g,P) = [f(\xi_i) - f(c)][g(x_i) - g(c)]$$

وعندما $\lambda(P) \longrightarrow 0$ فان :

$$g(x_i) - g(c) \longrightarrow g(c+0) - g(c) \neq 0 .$$

فلو فرضنا مثلا أن التابع $f(x)$ غير مستمر من اليمين في النقطة $x = c$ فيمكن اختيار ξ_i من المجال الجزئي $[c, x_i]$ بحيث يبقى $|f(\xi_i) - f(c)|$ اكبر من عدد $\gamma > 0$. وبالتالي نجد أن :

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} [S(f,g,P) - S'(f,g,P)] \neq 0$$

اذن فالتكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ غير موجود .

(عندما يكون $f(x)$ غير مستمر من اليسار في النقطة $x = c$ نحصل على نفس النتيجة بمناقشة مشابهة) .

II-٤ ليكن $f(x)$ تابعا مستمرا و $g(x)$ تابعا ذ ت م على المجال $[a,b]$ ولنضع :

$$I(x) := \int_a^x f(t)dg(t) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

(نفرض هنا $I(a) = 0$) .والمطلوب :

آ - برهن أن $I(x)$ تابعا ذ ت م على المجال $[a,b]$.

ب - اذا كان التابع $g(x)$ مستمرا (قابلا للاشتقاق) في النقطة $x = x_o$ ، برهن أن $I(x)$ يكون كذلك .

جـ - برهن أنه من أجل أي تابع $h(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ ، تصح العلاقة :

$$(S) \int_a^b h(x)dI(x) = (S) \int_a^b h(x)f(x)dg(x)$$

الحل :

آ - لنضع $M := \max_{a \le x \le b} |f(x)|$ عندئذ من أجل أية تجزئة $P = \{ a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ يكون حسب المبرهنة المساعدة (٢-٤-١) :

$$V(I,P) = \sum_{k=1}^{n} |I(x_k) - I(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dg(t) \right| \le$$

$$\le M \sum_{k=1}^{n} \overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}} (g) = M \overset{b}{\underset{a}{V}} (g)$$

اذن $I(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$.

ب - نفرض أن التابع $g(x)$ مستمر في النقطة $x = x_o$ ، عندئذ يكون :

$$|I(x_o + \eta) - I(x_o)| = \left| \int_{x_o}^{x_o+\eta} f(t)dg(t) \right| \le M \overset{x_o+\eta}{\underset{x_o}{V}} (g) =$$

$$= M[v_g(x_o + \eta) - v_g(x_o)] \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0$$

(وهنا استفدنا من المبرهنة ٢ـ٤ـ١ ومن ثم المبرهنة ١ـ٤ـ١) .
من هذا نجد أن $I(x)$ مستمر في النقطة $x = x_o$.
لنفرض الآن أن $g(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة $x = x_o$.
في البداية نأخذ $g(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$ عندئذ
وحسب مبرهنة القيمة الوسطى (٢ـ٣ـ٧) يكون :

$$I(x_o + \eta)-I(x_o) = \int_{x_o}^{x_o+\eta} f(t)dg(t) = f(\xi)[g(x_o + \eta)-g(x_o)]$$

حيث أن ξ نقطة مناسبة من المجال $[x_o, x_o + \eta]$.
لدينا الآن :

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{I(x_o+\eta)-I(x_o)}{\eta} = \lim_{\eta\to 0} f(\xi) \frac{g(x_o+\eta)-g(x_o)}{\eta} = f(x_o)g'(x_o)$$

اذن $I(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة $x = x_o$ وقيمة المشتق هي :

$$I'(x_o) = f(x_o)\, g'(x_o)$$

أما اذا لم يكن التابع $g(x)$ متزايدا ، فحسب المبرهنة (١ـ٤ـ٣)
يمكن كتابته بالشكل :

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

حيث أن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ تابعان متزايدان على المجال $[a,b]$.
فاذا وضعنا :

$$I_1(x) = \int_a^x f(t)dg_1(t) \qquad ; \; x \in [a,b]$$

$$I_2(x) = \int_a^x f(t)dg_2(t) \qquad ;$$

فيكون حسب ماتقدم :

$$I_1'(x_o) = f(x_o)g_1'(x_o)$$

$$I_2'(x_o) = f(x_o)g_2'(x_o)$$

وبما أن :

$$I(x) = I_1(x) - I_2(x)$$

فان :

$$I'(x_o) = I_1'(x_o) - I_2'(x_o) = f(x_o)\, g'(x_o)$$

جـ - ليكن $h(x)$ أي تابع مستمر على المجال $[a,b]$. عندئذ حسب المبرهنة (٢-٢-٩) يكون كل من التكاملين :

$$(S)\int_a^b f(x)\, h(x)\, dg(x) \text{ و } (S)\int_a^b h(x)\, d\, I(x)$$

موجودا . ولنبرهن على المساواة بينهما .

لتكن التجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$. عندئذ حسب مبرهنة القيمة الوسطى (٢-٣-٧) توجد نقطة $\theta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ بحيث يكون :

$$(S)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dg(t) = f(\theta_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

لدينا الآن :

$$S(h,I,P) = \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)[I(x_k) - I(x_{k-1})] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} h(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dg(t) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)\, f(\theta_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

وهنا يمكن أن نأخذ $\xi_k = \theta_k$ لنجد :

$$S(h,I,P) = \sum_{k=1}^{n} h(\theta_k)f(\theta_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = S(hf,g,P) .$$

من أجل $\lambda(P) \longrightarrow 0$ نجد (حيث التكاملات موجودة كما ذكرنا آنفا) .

$$(S)\int_a^b h(x)dI(x) = (S)\int_a^b h(x)\, f(x)dg(x)$$

II ـه ليكن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ تابعين لهما تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ ومختلفين عن بعضهما فقط في نقاط انقطاعهما (ان وجدت) . فاذا كان التكاملان :

$$(S)\int_a^b f(x)\, dg_1(x) \quad و \quad (S)\int_a^b f(x)\, dg_2(x)$$

موجودين ، برهن أن :

$$(S)\int_a^b f(x)\, dg_1(x) = (S)\int_a^b f(x)\, dg_2(x)$$

الحل : بما أن التكاملين موجودان فهما مستقلان عن طريقة تجزئة المجال $[a,b]$ وعن طريقة اختيار النقاط $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$. فاذا كانت P تجزئة للمجال $[a,b]$ ولاتحوى أيا من نقاط الانقطاع للتابعين $g_1(x)$ و $g_2(x)$ فنجد أن :

$$S(f,g_1,P) = S(f,g_2,P)$$

من أجل : $\lambda(P) \longrightarrow 0$ نجد :

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x) = (S)\int_a^b f(x)dg_2(x) \, .$$

II ـ ٦ اذا كان $(S)\int_a^b f(x)dg(x) = 0$ من أجل أي تابع مستمر $f(x)$.

برهن أن $g(x_0) = g(a)$ من أجل كل نقطة استمرار $x = x_0$ للتابع $g(x)$ وتقع داخل المجال $[a,b]$.

الحل : لتكن $x = x_0$ أي نقطة استمرار للتابع $g(x)$ حيث $a < x_0 < b$

ولنأخذ التوابع المستمرة $f_n(x)$ بالشكل :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad a \le x \le x_o \\ -n(x - x_o) + 1 & ; \quad x_o \le x \le x_o + \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad x_o + \frac{1}{n} \le x \le b \end{cases}$$

حيث $n = 1,2,\ldots$ عندئذ نجد :

$$0 = (S)\int_a^b f_n(x)dg(x) = (S)\int_a^{x_o} f_n(x)dg(x) + (S)\int_{x_o}^{x_o+\frac{1}{n}} f_n(x)dg(x)$$

$$+ (S)\int_{x_o+\frac{1}{n}}^{b} f_n(x)dg(x) =$$

$$= g(x_o) - g(a) + (S)\int_{x_o}^{x_o+\frac{1}{n}} f_n(x)dg(x) + 0$$

وبالتالي فان :

$$g(a) - g(x_o) = (S)\int_{x_o}^{x_o+\frac{1}{n}} f_n(x)dg(x)$$

وحسب المبرهنة المساعدة (٢ـ٤ـ١) نجد :

$$|g(a) - g(x_o)| = \left|(S)\int_{x_o}^{x_o+\frac{1}{n}} f_n(x)dg(x)\right| \le \bigvee_{x_o}^{x_o+\frac{1}{n}}(g) =$$

$$= v_g(x_o + \frac{1}{n}) - v_g(x_o) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

اذن $g(x_o) = g(a)$.

ملاحظة : في التمرين السابق اذا كان $f(x) \equiv 1$ على المجال $[a,b]$ فنجد استنادا للمبرهنة (٢ـ١ـ٤) أن :

$$0 = \int_a^b 1dg(x) = g(b) - g(a)$$

وبالتالي $g(b) = g(a)$.

II-٢ لتكن $a \le c \le b$. وليكن $f(x)$ تابعا معرفا على المجـــال $[a,b]$ ومستمرا في النقطة $x = c$. وليكن التابع $\psi(x)$:

$$\psi(x)= \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

والمطلوب حساب كل من $(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(x-c)$ و $(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(c-x)$

الحل :

١ـ لنحسب أولا $(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(x-c)$ حيث $a \le c < b$ (عندما $c = b$ ينعدم التكامل) . لذا نأخذ التجزئة P :

$$P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$$

بحيث أن $c \notin P$. ولنفرض أن $x_{i-1} \le c < x_i$ فيكون :

$$S(f,\psi,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[\psi(x_k - c) - \psi(x_{k-1} - c)]$$

حيث ξ_k نقاط اختيارية من المجالات $[x_{k-1}, x_k]$ و $k = 1,2,\ldots,n$.

ولكن من أجل $k \neq i$ فان : $\psi(x_k - c) - \psi(x_{k-1} - c) = 0$ وبالتالي:

$$S(f,\psi,P) = f(\xi_i)[\psi(x_i - c) - \psi(x_{i-1} - c)] = f(\xi_i)[1-0] = f(\xi_i)$$

وبما أن $f(x)$ مستمر في النقطة $x = c$ فيكون :

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} S(f,\psi,P) = f(c)$$

اذن : $(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(x - c) = f(c)$ حيث $a \le c < b$.

٢ـ بشكل مشابه نجد: $(S)\int_a^b f(x)d\,\psi(c-x)=-f(c)$ حيث $a < c \leq b$

(من أجل $c = a$ ينعدم التكامل) .

II ـ ٨ لنرمز بـ $C[a,b]$ لصف التوابع المستمرة على المجال $[a,b]$.

وبـ $BV[a,b]$ لصف التوابع ذات التغيرات المحدودة على $[a,b]$.

فيكون التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا من أجل أي تابع $f(x)$ من الصف $C[a,b]$ ، ومن أجل أي تابع $g(x)$ من الصف $BV[a,b]$ وذلك حسب المبرهنة (٢ـ٢ـ٩) . والمطلوب : انه لايمكن توسيع أي من هذين الصفين دون فقدان خاصة وجود التكامل .

الحل : لتكن $a < c < b$. ولنأخذ التابع ذا التغيرات المحدودة والغير مستمر $g(x)$ بالشكل :

$$g(x) := \psi(x-c) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq c \\ 1 & ; \quad x > c \end{cases}$$

لو فرضنا جدلا أنه يمكن توسع الصف $C[a,b]$ لأمكننا ايجاد تابع $f(x)$ غير مستمر في النقطة $x = c$ ، (مثلا) ، بحيث يكون التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا . ولكن بما أن كلا التابعين $g(x), f(x)$ غير مستمر في النقطة $x = c$ ، فنجد حسب التمرين (II ـ ٣) أن التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ غير موجود . وهكذا نحصل على تناقض مما يؤكد أنه لايمكن توسيع الصف $C[a,b]$.

٢ - ليكن الآن $g(x)$ تابعا ليس ذا تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$

وسوف نشكل تابعا $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ بحيث أن :

$(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ غير موجود .

لنقسم المجال $[a,b]$ الى نصفين ، فيكون التابع $g(x)$ ليس ذ ت م على الأقل على احدهما ، وهذا النصف نقسمه أيضا الى نصفين ، فيكون $g(x)$ ليس ذ ت م على الأقل على أحدهما ، وهكذا نتابع عملية التنصيف لنحصل على نقطة x_0 بحيث يكون $g(x)$ ليس ذ ت م على مجاورة (مجال صغير) لهذه النقطة ، وللسهولة سوف نفرض $x_0 = b$.

عندئذ توجد متتالية متزايدة من الأعداد $\{a_n\}$ ومتقاربة من b أي :

$$(*)\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < b \quad , \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

وبحيث تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |g(a_{n+1}) - g(a_n)|$ متباعدة ، وبالتالي

ومن أجل هذه السلسلة فيمكن ايجاد متتالية عددية $\{f_n\}$ بحيث أن :

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ والسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n |g(a_{n+1}) - g(a_n)|$ متباعدة.

وسوف نعرف الآن التابع المنشود $f(x)$ كما يلي :

$$f(a_n) = f_n \operatorname{sgn}[g(a_{n+1}) - g(a_n)] \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots$$

أما في المجال (a_n, a_{n+1}) فنفرض :

$$f(x) = f(a_n) + \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n}(x - a_n) \ ; \ n = 0,1,2,\dots$$

حيث هنا :

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1 & ; \quad t < 0 \\ 0 & ; \quad t = 0 \\ +1 & ; \quad t > 0 \end{cases}$$

كما أن : $t \operatorname{sgn} t = |t|$

من الواضح أن التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$.

لنأخذ الآن تجزئة للمجال $[a,b]$ بالشكل (وهي نفسها (*)):

$$P_n = \{a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, b\}$$

ولنشكل مجموع ستيلجس التكاملي الموافق حيث نأخذ $\xi_k = a_k$ فنجد:

$$S(f,g,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)[g(a_{k+1}) - g(a_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f_k|g(a_{k+1}) - g(a_k)| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

وهذا يعني أن التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ غير موجود .

اذن لايمكن توسيع الصف $BV\ [a,b]$ دون فقدان خاصة وجـــود التكامل .

II-٩ احسب التكامل $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ بعد التأكد من وجوده في الحـالات التالية :

آ - $f(x) = x$, $g(x) = Ln(1 + x^2)$ على المجال $[0,1]$

ب - $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = x^2$ على المجال $[0,\pi]$

جـ - $f(x)= \text{arc tg}x$, $g(x)= 6x$ على المجال $[-1,5]$

د - $f(x) = \frac{1}{2}$, $g(x)= \text{ch } 2x$ على المجال $[-8,2]$

الحل : من أجل جميع التكاملات نلاحظ أن شروط المبرهنة (٢-٣-١) محققة، وبالتالي فان هذه التكاملات موجودة وتحسب بالعلاقة :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

آ - $(S)\int_{0}^{1} x \, d\, Ln(1+x^2) = (R)\int_{0}^{1} \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

ب - $(S)\int_{0}^{\pi} \sin 2x \, dx^2 = (R)\int_{o}^{\pi} 2x \sin 3x \, dx = -\pi$

جـ - من الأسهل حساب $(S)\int_{-1}^{5} g(x)df(x)$ أولا ، وهذا التكامل موجـود طبعا طالما أن $(S)\int_{-1}^{5} f(x)dg(x)$ موجود ، وذلك حسب دستـــــــور التكامل بالتجزئة . اذن :

$$(S)\int_{-1}^{5} g(x)df(x) = (S)\int_{-1}^{5} 6xd \operatorname{arctg} x = (R)\int_{-1}^{5} \frac{6x}{1+x^2}\, dx = 3Ln13$$

من ثم نحسب $(S)\int_{-1}^{5} f(x)dg(x) = (S)\int_{-1}^{5} \operatorname{arctg} x \; d(6x)$

حسب دستور التكامل بالتجزئة لنجد :

$$(S)\int_{-1}^{5} \operatorname{arctg} x \; d(6x) = 6x.\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{5} - (S)\int_{-1}^{5} 6x \; d \operatorname{arctg} x$$

$$= 30 \operatorname{arc\,tg} 5 - \frac{3\pi}{2} - 3 \; Ln \; 13$$

د - هنا يمكن حساب التكامل كما في الحالات السابقة أو مباشرة بتطبيـق (٢-١-٤) حيث :

$$(S)\int_{-8}^{2} \frac{1}{2}\, d \; ch \; 2x = \frac{1}{2} \; (S)\int_{-8}^{2} d \quad ch \; 2x = \frac{1}{2}(ch \; 4 - ch \; 1$$

I-١ احسب $(S)\int_{0}^{10} x^2 dg(x)$ حيث أن :

$$g(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad 1 < x \le 3 \\ 2 & ; \quad 3 < x < 10 \\ 5 & ; \quad x = 10 \end{cases}$$

الحل : حسب المبرهنة (١ـ٣ـ٨) فان التابع $g(x)$ ذ ت م على المجال $[0,10]$.
وبما أن التابع $f(x) = x^2$ مستمر على المجال $[0,10]$ فيكـــــون
التكامل $(S)\int_0^{10} f(x)dg(x)$ موجودا وذلك حسب المبرهنة (٢ـ٢ـ٩) .
ولحسابه نطبق المبرهنة (٢ـ٢ـ٣) لنجد :

$$\begin{aligned}(S)\int_0^{10} x^2 dg(x) &= f(0)[g(0+0) - g(0)] + f(1)[g(1+0) - g(1-0)] \\ &\quad + f(3)[g(3+0) - g(3-0)] + f(10)[g(10) - g(10-0)] \\ &= 0[-2+2] + 1[0+2] + 9[2-0] + 100\,[5-2] = \\ &= 320\end{aligned}$$

II-11 اذا كان $f(x)$ و $g(x)$ كما في التمرين (II ـ ١٠) ، احسب :

$$(S)\int_0^{10} g(x)df(x)$$

الحل : لدينا عدة امكانيات لحساب التكامل المطلوب ، منها :

(■) حسب دستور التكامل بالتجزئة فان التكامل $(S)\int_0^{10} g(x)df(x)$

موجود لأن $(S)\int_0^{10} f(x)dg(x)$ موجود كما بينا في التمرين (II ـ ١٠)

ونحسبه بالعلاقة :

$$(S)\int_0^{10} g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_0^{10} - (S)\int_0^{10} f(x)dg(x) = 180$$

(**) أو مباشرة من العلاقة :

$$(S)\int_0^{10} g(x)df(x) = (R)\int_0^{10} g(x)\ f'(x)dx$$

حيث أن $f'(x) = 2x$ ، وبالتالي :

$$(S)\int_0^{10} g(x)df(x) = (R)\int_0^{1} -2.2xdx + (R)\int_1^{3} 0.2xdx + (R)\int_3^{10} 2.2xdx = 180$$

(***) بامكاننا أيضا حساب التكامل $(S)\int_0^{10} g(x)df(x)$ اعتمادا على

على الملاحظة (٢-١-١٢) ، لنجد :

$$(S)\int_0^{10} g(x)df(x)= (S)\int_0^{1} g(x)df(x)+ (S)\int_1^{3} g(x)df(x)+ (S)\int_3^{10} g(x)df(x)$$

حيث أن التكاملات في الطرف الأيمن موجودة كلها لأن التكامل في الطرف الأيسر موجود ، اذن :

$$(S)\int_0^{10} g(x)df(x)= -2[f(1)-f(0)]+ 0[f(3)-f(1)]+ 2[f(10)-f(3)]$$
$$= 180$$

II-١٢ احسب $(S)\int_{-5}^{1} f(x)dg(x)$ و $(S)\int_{-5}^{1} g(x)df(x)$ ، اذا كان

$f(x) = |x|$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & ; \quad -5 \le x \le -1 \\ x^2 & ; \quad -1 < x < 0 \\ 3 & ; \quad x = 0 \\ Ln(x + 2) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 2 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

الحل : ان التابع $f(x) = |x|$ مستمر على المجال $[-5,1]$ كما أن:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -5 \leq x < -1 \\ 2x & ; \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} & ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

ونلاحظ أن $g'(x)$ كمول حسب ريمان على المجال $[-5,1]$ ، لذا نطبق

المبرهنة (٢-٣-٤) لحساب التكامل $(S)\int_{-5}^{1} f(x)dg(x)$ فنجد :

$$(S)\int_{-5}^{1} f(x)dg(x) = (R)\int_{-5}^{1} f(x)g'(x)dx + f(-5)[g(-5+0)-g(-5)]+$$

$$+ f(-1)[g(-1+0)- g(-1-0)]+ f(0)[g(0+0)- g(0-0)]$$

$$+ f(1)[g(1) - g(1 - 0)]$$

وبما أن :

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x \leq 0 \\ x & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

فيكون لدينا :

$$(S)\int_{-5}^{1} f(x)dg(x) = (R)\int_{-5}^{-1} -x.1dx + (R)\int_{-1}^{0} -x.2xdx +$$

$$+(R)\int_{0}^{1} x\frac{1}{x+1}dx + 5[-3 + 3]+[1-1]+$$

$$+ 0[Ln\ 2-0]+ 1[2-Ln\ 3]= 15 - \frac{2}{3} - Ln\ 6 .$$

لاحظ أن التابع $g(x)$ مستمر من اليمين في النقطة $x = -5$ ومستمر في النقطة $x = -1$، وبالتالي انعدمت قفزات $g(x)$ في هاتين النقطتين (مع ذلك فان المشتق $g'(x)$ غير موجود في النقطة $x = -1$) . كما أن قيمة $g(x)$ في نقطة انقطاعه الداخلية $x = 0$ لم تلعب أي دور ، حيث يدخل

في الحساب قيمة القفزة في هذه النقطة .

بالنسبة للتكامل $(S)\int_{-5}^{1} g(x)df(x)$ فهو موجود حسب دستور التكامـــل

بالتجزئة ونحسبه بالعلاقة :

$$(S)\int_{-5}^{1} g(x)df(x)= f(x)g(x)\Big|_{-5}^{1} - (S)\int_{-5}^{1} f(x)dg(x)= \frac{8}{3} + \text{Ln } 6$$

II-١٢ ليكن التابعان $f(x)$ و $g(x)$ المعرفان على المجال $[-1,5]$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \neq 0 \\ 3 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \neq 0 \\ -2 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

هل التكامل $(S)\int_{-1}^{5} f(x)dg(x)$ موجود ؟ وان كان موجوداً يطلب حسابه .

الحل : لنأخذ التجزئة التالية للمجال $[-1,5]$:

$$P = \{-1 = x_o, x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} = 0, x_i \ , \dots, x_n = 5\}$$

اذن $0 \in P$ ، ولنختر النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1} \ , \ x_k]$ بالشكل التالي :

$$-1 = x_o \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{i-2} \leq \xi_{i-1} \leq 0 \leq \xi_i < x_i < \dots < x_n = 5$$

ونشكل مجموع ستيلجس التكاملي فنجد :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] =$$

$$= f(\xi_{i-1})[g(0)- g(x_{i-2})]+ f(\xi_i)[g(x_i)-g(0)] =$$

$$= f(\xi_{i-1})[-2 -0] + f(\xi_i)[0 + 2] =$$

$$= 2[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})]$$

إذن

$$S(f,g,P) = 2\begin{cases} 0 & ; \quad \xi_i \neq 0 \\ 2 & ; \quad \xi_i = 0 \end{cases}$$

حيث أخذنا $\xi_{i-1} \neq 0$.

من هذا نستنتج أنه لايوجد للمجموع $S(f,g,P)$ نهاية معينة عندما $\lambda(P) \to 0$ ، وبالتالي فالتكامل $(S)\int_{-1}^{5} f(x)dg(x)$ غير موجود (وكان يمكن استنتاج هذا مباشرة من التمرين II-٣ ، حيث أن كلا التابعين $f(x)$ و $g(x)$ غير مستمر في النقطة $x = 0$).

II-١٤ لتكن المتتالية $f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx}$ حيث $n = 1,2,\dots$ ، وليكن التابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ ، والمطلوب :

١- ايجاد التابع $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ على المجال $[1,2]$

٢- هل تصح المساواة:

$$\lim_{n\to\infty} (s)\int_{1}^{2} f_n(x)dg(x) = (S)\int_{1}^{2} f(x)dg(x)$$

الحل :

١- ان المتتالية $\{ f_n(x) \}$ متقاربة بانتظام على المجال $[1,2]$ من التابع $f(x) = x$ (تأكد من ذلك) .

٢- تصح المساواة اذا تحققت شروط المبرهنة (٢-٤-٣).

ان التابع $f(x) = x$ مستمر على المجال $[1,2]$.

كما أن التابع $g(x) = \frac{-1}{x}$ ذ ت م على $[1,2]$ ذلك لأن :

$$|g'(x)| = \left| \frac{1}{x^2} \right| \le 1 \quad , \; \forall x \in [1,2]$$

وبالتالي تصح المساواة بحسب المبرهنة (٢ـ٤ـ٣) .

■ ملاحظة : لو حسبنا التكاملات $(S)\int_1^2 f_n(x)dg(x)$ و $(S)\int_1^2 f(x)dg(x)$

لوجدنا :

$$(S)\int_1^2 f(x)dg(x)=(R)\int_1^2 f(x)g'(x)dx = (R)\int_1^2 x\,\frac{dx}{x^2} = \operatorname{Ln}2$$

$$(S)\int_1^2 f_n(x)dg(x)=(R)\int_1^2 \frac{n\,dx}{1+nx} = \operatorname{Ln}\frac{1+2n}{1+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\operatorname{Ln}2$$

اذن :

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_1^2 f_n(x)dg(x) = (S)\int_1^2 f(x)dg(x)$$

II ـ ١٥ لتكن المتتالية $g_n(x) = x^n$ حيث $n = 1,2,\ldots$. وليكن التابع $f(x)= \arc\sin\frac{x}{2}$. والمطلوب :

١ـ ايجاد $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ على المجال $[0,1]$.

٢ـ هل تصح المساواة :

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_0^1 f(x)dg_n(x) = (S)\int_0^1 f(x)dg(x)$$

الحل :

١ـ لدينا هنا (التقارب نقطيا) :

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0\le x<1 \\ 1 & ; \quad x=1 \end{cases}$$

٢ـ من أجل كل n فان التابع $g_n(x) = x^n$ متزايد على المجال $[0,1]$

فيكون ذ ت م وتغيره الكلي هو :

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(g_n) = g_n(1) - g_n(0) = 1 \quad , \quad \forall_n = 1,2,\ldots$$

اذن شروط المبرهنة (٢ـ٤ـ٤) محققة وبالتالي فان المساواة المطلوبة محققة .

تمارين اضافية II

تمرين ١: اذا كان $u(x)$ و $v(x)$ تابعان كمولان حسب ريمان على المجال $[a,b]$ وكان :

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t)dt$$

$$; \quad x \in [a,b]$$

$$V(x) = V(a) + \int_a^x v(t)dt$$

برهن صحة العلاقة :

$$\int_a^b U(x)v(x)dx + \int_a^b V(x)u(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b$$

(تعتبر هذه العلاقة تعميما لدستور التكامل بالتجزئة في تكامل ريمان

وتجدر الاشارة هنا أنه اذا كان $u(x)$ و $v(x)$ مستمرين ، فان :

$$V'(x) = v(x) \quad , \quad U'(x) = u(x)$$

تمرين ٢: (ارجاع تكامل ستيلجس لتكامل ريمان).

ليكن $f(x)$ تابعاً مستمرا و $g(x)$ تابعا متزايدا تماما (وليس بالضرورة مستمرا) على المجال $[a,b]$. برهن صحة العلاقة :

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_\alpha^\beta f(g^{-1}(v))\, dv$$

حيث أن: $v = g(x)$ و $\alpha = g(a)$ و $\beta = g(b)$.

تمرين ٣: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع المعرفة على المجال $[a,b]$ والمتقاربة من تابع $f(x)$ مستمر على $[a,b]$ ، ولنفرض أنه يوجد عدد ثابت M بحيث :

$$|f_n(x)| \le M \quad , \quad \forall n = 1,2,\ldots \quad , \quad \forall\, x \in [a,b]$$

وليكن $g(x)$ تابعا متزايدا تماما على المجال $[a,b]$. برهن صحة العلاقة :

$$\lim_{n\to\infty} (S)\int_a^b f_n(x)dg(x) = (S)\int_a^b f(x)dg(x)$$

(توجيه : يمكن الاعتماد على التمرين ٢. لاحظ أن الشروط هنا أخف من تلك الواردة في المبرهنة ٢ـ٣)).

تمرين ٤: ليكن $f(x)$ تابعا مستمرا و $h(x)$ تابعا ذ ت م على المجال $[a,b]$ ولنضع :

$$g(x) = G([a,x]) := \overset{x}{\underset{a}{V}}(h) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

(نفرض هنا $g(a) = 0$) .

برهن على وجود التكاملات $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ و $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ و $\int_a^b f(x)\,G(dx)$ وكيف يحسب التكامل الأخير بدلالة تكامل ستيلجس ؟ .

تمرين ٥: بين متى تكون العلاقة $\lim_{n\to\infty} (S)\int_a^b f_n(x)dg(x) = (S)\int_a^b f(x)dg(x)$

صحيحة ، حيث أن $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ وذلك في الحالات التالية:

آ ـ $g(x) = x^2\ ,\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ على المجال $[-1,1]$

ثم على المجال $[1,b]$

حيث $1 < b$

ب ـ $g(x) = 3x + x^2,\ f_n(x) = \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ على المجال $[-1,1]$

جـ ـ $g(x) = e^x\ ,\ f_n(x) = (x^2 + \dfrac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$ على المجال $[-1,1]$

د ـ $g(x) = \sin x,\ f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ على المجال $[0, \pi]$

هـ - $f_n(x)=\dfrac{x^2}{1+x^{2n}}$ ، $g(x)=\begin{cases} 0 \; ; & x = 0 \\ x^2\sin\frac{1}{x} \; ; & x \neq 0 \end{cases}$ على المجال $[0,1]$

و - $f_n(x)= nx\, e^{-nx^2}$ ، $g(x)=\begin{cases} 0 \; ; & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 \; ; & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ على المجال $[0,1]$

ز - $f_n(x) = x^n$ ؛ $g(x)=\begin{cases} 0 \; ; & x = 0 \\ x\cos\frac{\pi}{2x} \, , & x \neq 0 \end{cases}$ على المجال $[0,1]$

تمرين ٦: بين متى تكون العلاقة $\lim\limits_{n\to\infty} (S)\int_a^b f(x)dg_n(x)=(S)\int_a^b f(x)dg(x)$

صحيحة،حيث أن $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ ، وذلك في الحـــالات التالية :

آ - $f(x) = x^3$ ، $g_n(x) = (1 - x)^n$ على المجال $[0,1]$

ب - $f(x) = \cos x$ ، $g_n(x)= \dfrac{x^n}{n}$ على المجال $[\frac{1}{2},1]$

جـ - $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ ، $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ على المجال $[-1,1]$

د - $f(x) = e^{-2x}$ ، $g_n(x) =(1+ \frac{x}{n})^n$ على المجال $[-3,3]$

هـ - $f(x)=\begin{cases} -1 \; ; & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 \; ; & x = \frac{1}{2} \\ 1 \; ; & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ ، $g_n(x)=\dfrac{x^2}{1+x^{2n}}$ على المجال $[0,1]$

و - $f(x) = tg\, x$ ، $g_n(x)= \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$

ز - $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g_n(x) = \frac{x}{n}$ على المجال $[-1,1]$

تمرين ٧: برهن صحة المساواة :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad ; \quad (\alpha > 0)$$

تمرين ٨: ليكن $g(x)$ تابعا ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، ولتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع المعرفة على المجال $[a,b]$ والمتقاربة بانتظام من تابع $f(x)$ مستمر على هذا المجال وبحيث أن التكاملات :

$$(S)\int_a^b f_n(x)dg(x) \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

موجودة ، ولنضع :

$$g_n(x) := (S)\int_a^x f_n(t)dg(t) \quad ; \quad x \in [a,b] \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

والمطلوب :

١ - برهن أن التكامل : $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود .

٢ - برهن أن المتتالية $\{g_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ من التابع $g(x)$ حيث :

$$g(x) = (S)\int_a^x f(t(dg(t) \,.$$

)=(الفصل الثالث)=(

المجموعات المقيسة

في هذا الفصل نريد تعميم مفهوم الطول (وبشكل مشابه يتم تعميم مفهوم المساحة والحجم) . فعلى سبيل المثال ، معلوم أن طول المجال $[a,b]$ هو العدد $b - a$ ، نفس الشيء بالنسبة للمجالات $[a,b)$ و $(a,b]$ و (a,b) .
وهنا يجوز التساؤل : هل يمكن أن نقول شيئا - مثلا - عن طول متتالية من الاعداد الحقيقية (a_n) ، أو عن طول مجموعة بشكل عام ؟ .

بالنسبة للمفهوم المألوف للطول ، ليس لهذا الكلام معنى . لذا سنتعرف فيما يلي على مفهوم جديد هو القياس بحيث تصبح عبارة قياس مجموعة - بدلا من طول مجموعة - ذات معنى من أجل أية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وكذلك من أجل مجموعة ما X .

١-٣ الجبر - الجبر التام :

فيما يلي نعتبر أن X مجموعة غير خيالية و $\mathcal{P}(X)$ أسرة كل المجموعات الجزئية لـ X .

١-١-٣ تعريف :

نقول عن الصف $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ انه جبر على X اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

(ج١) $\phi \in \mathcal{A}$ و $X \in \mathcal{A}$.

(ج٢) اذا كان $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{A}$ فان $(A \cup B) \in \mathcal{A}$.

(ج٣) اذا كان $A \in \mathcal{A}$ فان $A^c \in \mathcal{A}$ حيث هنا

$A^c = X - A$

٢-١-٣ ملاحظة :

- من أجل أى عدد منته من المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ من $\mathcal{A}$ يكون