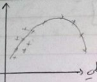
التقريبات



التقريبات.

غير خطي — خطي (للثوابت)

بيانات متقطعة — بيانات مستمرة.

(أحياناً أخف عن الدالة حيث يكون خطأها أصغر ما يمكن)

$x_0, x_1, \dots, x_n$ + f

لدينا (N+1) نقطة مختلفة.

التقريب المتقطع.

$\underbrace{f(x)}$ $\underbrace{\phi(x,c)}$

الهدف $\phi(x,c) = c_0 l_0(x) + c_1 l_1(x) + \dots + c_n l_n(x)$

$\frac{\partial \phi}{\partial c_0} = l_0 , \frac{\partial \phi}{\partial c_1} = l_1 , \dots$

طريقة خطأ التربيعات الصغرى:

نعلم أن:

$$\|g\|_2 = \left(\sum w_i \, g^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

(دالة الوزن: هي عبارة ثابتة يختلف باختلاف g ونستخدمها لكي نلغي الحالة التي قد اخترناها.

في حال كانت الدالة الصحيحة تكون لها تساوي 1

في حالة أخرى الأسية (نعطي لها ...)

تعريف الخطأ:

هو القيمة الحقيقية تكون
هذا الأمر تكون خطأ من بيانات ...

$$E(x_i) = T - a$$
$$= f(x_i) - \phi(x_i, c)$$

"لا ننسى هدفنا هو كيفية إيجاد الثوابت في التوصل إلى ϕ" الذي يكون خطأها أصغر ما يمكن.

* بالامتحان: عندما نوجد الـ C يطلب أوجد الخطأ الفعلي (نأخذ $\|E\|_2^2$ 8 نتس).
ثم يطلب أوجد الخطأ النسبي الذي هو $\frac{E}{\|f\|}$ ← الدالة الأصلية.

$$\|E\|_2 = \left[\sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(2) من

$$\boxed{(\|E\|_2)^2} = \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c) \right)^2$$

(اختصار تسمية) E

$$\frac{\partial E}{\partial c_0} = 2 \left[\sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c) \right) \right] \ell_0(x) = 0 \quad \star$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = 2 \left[\qquad \right] \ell_1(x) = 0$$

بالرجوع لـ $\star$

$$\left[\sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \right] \ell_0 = \sum_{i=0}^{N} w_i \boxed{\phi}\, \ell_0$$

انظر الكتاب صفحة (19)

$$\phi = c_0 \ell_1 + c_1 \ell_2 + \cdots = \sum c_k \ell_k$$

ملاحظة: بالامتحان: عندما نوجد الـ C يطلب إيجاد الخطأ الفعلي
نأخذ $\|E\|_2^2$ 8 نتس ذلك ثم بعد ذلك يطلب
إيجاد الخطأ النسبي الذي هو $\frac{E}{\|f\|}$ حيث f هي الدالة الأصلية
(دراسية بالطريقة)...

(كل ما سبق يجب فهمه وما يجب حفظه سيذكر.)
عندئذٍ تصبح جملة المعادلات الخطية بالصيغة المصفوفية.

$$Gc = a$$

"يجب حفظها"

$$G = \begin{pmatrix} (\ell_0, \ell_0) & (\ell_0, \ell_1) & \cdots & (\ell_0, \ell_n) \\ (\ell_1, \ell_0) & (\ell_1, \ell_1) & \cdots & (\ell_1, \ell_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\ell_n, \ell_0) & (\ell_n, \ell_1) & \cdots & (\ell_n, \ell_n) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} (f, \ell_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ (f, \ell_n) \end{pmatrix}$$

كيف يصبح التقريب الأمر إذا أجرينا التقريب إلى الحدوديات أي كيف يصبح الشكل المصفوفي إذا وضعنا $l_0 = 1$ و $l_1 = x$ و $l_2 = x^2$, ...

الحل:

نعوض كما التالي. $(l_0, l_0) = (1, 1)$ ص $\boxed{19}$ بالعودة للقاعدة.

(دالة الجزء بالحدوديات = 1) (بالعودة للصفحة 20 , 21)

<= سيتم تصويرها من الكتاب) الأوراق سابقة ١٩-٢٠-٢١)

في حال المستقيم سيكون لدينا:

$$\phi(x, c) = c_0 l_0(x) + c_1 l_1(x)$$

$l_0 = 1$, $l_1 = x$ (المصفوفة ستكون 2x2).

لو طلب قرب إلى قطع مكافئ: ؟!!

أي حدودية درجة ثالثة.

لو طلب قرب إلى حدودية خطية ؟!

أي حدودية درجة أولى.

* بالتقريبات هنا الفصل لن يطلب حل جملة المعادلات المصفوفية لكن سنأخذ ذلك بالفصل الثالث.

* قد يطلب قرب إلى الحدودية درجة سابعة (c=9) لكن سيطلب أوجد الشكل المصفوفي -خلال (١٠ دقائق) تجب الانتباه لصيغة السؤال!!

ملاحظة: 8 يتعلق عند المقارنة بالتوضيح الذي نختاره والذي أعطينا علموه نقطة جوهرية بالمستقيم.

مثال (2)

أوجد معادلة المستقيم الذي يقرب البيانات التالية:

(7, 8.3) ، (5, 6.1) ، (2, 2.9) ، (1, 2.1)

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

$$\|g\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{N} w_i g^2(x_i)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

حيث w_i أعداد حقيقية كأوزان، و $\|g\|_2$ نصف النظيم .

اذا وضعنا $g = f - \phi$ فإن العلاقة (10) تُصبح :

$$\|f - \phi^{(0)}\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \|f - \phi\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c)\right)^2$$

$$= \min_{\phi \in S} D^2(c_0, c_1, \ldots, c_n) \quad (11)$$

وغالباً يرمز $E(x_i) = f(x_i) - \phi(x_i, c)$

بتطبيق الشروط $\frac{\partial (D^2)}{\partial C_j^{(\circ)}} = 0 \, , j = 0, \ldots, n$ ، نحصل على $(n+1)$ جملة معادلات خطية بالنسبة للمجاهيل c_j^0 للتقريب الأمثل.

بمـــا أن $\phi(x_i, c) = \phi(x_i, c_0, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x_i)$ و $\frac{\partial \phi(x_i)}{\partial c_j^{(\circ)}} = \varphi(x_i)$ ،

وبالتالي فإن جملة المعادلات الخطية :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \varphi_j(x_i); \, j = 0, \ldots, n; N \geq n. \quad (12)$$

نرمز

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) := \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \\ (f, \varphi_j) := \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \varphi_j(x_i), \end{cases} \quad (13)$$

عندئذٍ تُصبح جملة المعادلات الخطية بالصيغة المصفوفية:

$$G\,c = a \tag{14}$$

حيث:

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix},\; c = \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ \vdots \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix},\; a = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

ونلاحظ $G = G^T$ $\left((\varphi_j,\varphi_k) = (\varphi_k,\varphi_j)\right)$.

في الحقيقة يجب الانتباه إلى أن جملة المعادلات الخطية (15) غالباً $(n \geq 10)$ ما تكون مريضة، من إحدى الطرائق المتبعة لتجنب ذلك نستخدم طرائق (QR) لتفريق المصفوفة G، أو تغيير شكل الحدودية إلى الحدوديات المتعامدة .

تعريف (4):

بفرض $w_i > 0$ توابع وزن، و يمكن تمثيل $\varphi_k \in C[a,b]$ بالشعاع :

$$\varphi_k := \left(\sqrt{w_0}\,\varphi_k(x_0), \sqrt{w_1}\,\varphi_k(x_1), \ldots, \sqrt{w_N}\,\varphi_k(x_N)\right)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{16}$$

عندئذٍ نجد

$$(\varphi_j,\varphi_k) = \varphi_j^T \varphi_k \;,\; (f,\varphi_j) = f^T \varphi_k ; \tag{17}$$

حيث

$$f := \left(\sqrt{w_0}\,f(x_0), \sqrt{w_1}\,f(x_1), \ldots, \sqrt{w_N}\,f(x_N)\right)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{18}$$

إذا كانت $w_i = 1$ ، فإن

$$\varphi_k := \left(\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), \ldots, \varphi_k(x_N)\right)^T,\; f := \left(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)\right)^T$$

مبرهنة (2) :

إن جملة المعادلات الخطية في العلاقة (12) قابلة للحل و بشكل وحيد إذا و فقط إذا

كانت التوابع $\varphi_k\ ,k=0,1,\dots,n$ مستقلة خطياً.

ملاحظة :

إذا كـان $n \ge N$ فـإن التوابـع $\varphi_k\ ,k=0,1,\dots,n$ مرتبطـة خطيـاً،(إذا $n>N$ فـإن $\varphi_k\ ,k=0,1,\dots,n$ مرتبطـة خطياً حتمـاً ، و إذا كـان $n=N$ فالمسألة هي مسألة استيفاء).

1-1-1-3 التقريب بالحدوديات الجبرية

(ϕ_j,ϕ_k)

في هذه الحالة نفترض $\varphi_k\left(x_i\right)=x_i^k$ ، نعوض في (12) فنجد:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \sum_{i=0}^{N} w_i x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{N} w_i f\left(x_i\right) x_i^{j}\ , j=0,1,\dots,n. \qquad (19)$$

(f,ϕ_j)

بفرض $w_i=1$ ، عندئذٍ تكون جملة المعادلات الخطية (15) بالشكل:

حفظ

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f\left(x_i\right) \\ \sum f\left(x_i\right) x_i \\ \sum f\left(x_i\right) x_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum f\left(x_i\right) x_i^n \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

جمع

حالات خاصة:

1) $n=1$ تقريب البيانات إلى مستقيم:

لدينا $N+1$ نقطة مختلفة و $\left(x_i,y_i\right)\in\mathbb{R}^2$ حيث $i=0,\dots,N$ ، والتقريب لمستقيم معادلته :

$$y=\phi^{(0)}(x)=\sum_{k=0}^{1} c_k^{(0)} x^k$$
$$=c_0^{(0)}+c_1^{(0)} x$$

نعوض في (20)، فنجد:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}.$$

نرمز:

$$S_x = \sum_{i=0}^{N} x_i \ , \ S_{xx} = \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \ , \ S_{xy} = \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \ , \ S_y = \sum_{i=0}^{N} y_i$$

وبحل جملة المعادلات نجد:

(21)
$$c_1^{(0)} = \frac{(N+1)S_{xy} - S_x S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x S_x}$$

(22)
$$c_0^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{(N+1)S_{xx} - S_x S_x}$$

مثال(2):

أوجد معادلة المستقيم الذي يقرب البيانات التالية:

$(7,8.3),(5,6.1),(2,2.9),(1,2.1)$ ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

لنحسب كل من $S_x \ , \ S_{xx} \ , \ S_{xy} \ , \ S_y$

$$S_x = \sum x_i = 1+2+5+7 = 15$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2 = 79$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i = (1)(2.1) + (2)(2.9) + (5)(6.1) + (7)(8.3) = 96.5$$

$$S_y = \sum y_i = 2.1 + 2.9 + 6.1 + 8.3 = 19.4$$

وبذلك نجد:

$$c_0^{(0)} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{4(96.5) - (15)(19.4)}{4(79) - (15)(15)} = \frac{386 - 291}{316 - 225} = \frac{95}{91} = 1.04396$$

$$c_1^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{(79)(19.4) - (96.5)(15)}{4(79) - (15)(15)}$$

$$c_0 = \frac{1532.6 - 1447.5}{316 - 225} = \frac{85.1}{91} = 0.9352$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب :

$$f(x) = 1.04396\,x + 0.9352$$

ويكون الخطأ المرتكب:

$$E = \sum_{i=1}^{4} [f(x_i) - y_i]^2$$

$$E = [f(x_1) - y_1]^2 + [f(x_2) - y_2]^2 + [f(x_3) - y_3]^2 + [f(x_4) - y_4]^2$$

حيث:

$$f(x_1) = 1.04396(1) + 0.9352 = 1.9792$$
$$f(x_2) = 1.04396(2) + 0.9352 = 3.0232$$
$$f(x_3) = 1.04396(5) + 0.9352 = 6.1552$$
$$f(x_4) = 1.04396(7) + 0.9352 = 8.2432 \quad 92$$

ومنه:

$$E^2 = [2.1 - 1.9792]^2 + [2.9 - 3.0232]^2 + [6.1 - 6.1552]^2 + [8.3 - 8.2432]^2$$
$$= [0.1208]^2 + [-0.1232]^2 + [-0.0552]^2 + [0.0568]^2$$
$$= 0.01459264 + 0.01517824 + 0.00304704 + 0.00322624$$
$$= 0.03604416$$

$E = 0.18984299$

$\boxed{4}$ ص

x_i	$f(x_i)$	x_i^2	$x_i y_i$
$x_0=7$	8.3	$7^2=49$	58.1
$x_1=5$	6.1	$5^2=25$	30.5
$x_3=2$	2.9	$2^2=4$	5.8
$x_4=1$	2.1	$1^2=1$	2.1
$\sum x_i=15$	$\sum y_i=$ 19.4	$\sum x_i^2=79$	96.5 $\sum x_i y_i$

"في الكتاب ذكر الطريقة الإحصائية".

$$c_1^{(1)}=\frac{(N+1)S_{xy}-S_xS_y}{(N+1)S_{xx}-S_xS_x}$$

$$c_0^{(0)}=\frac{S_{xx}S_y-S_{xy}S_x}{(N+1)S_{xx}-S_xS_x}$$

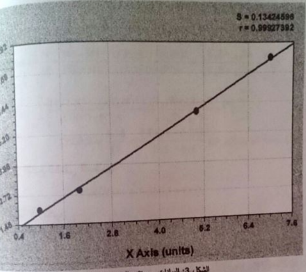
$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 15 & 79 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19.4 \\ 96.5 \end{pmatrix}$$

⊙ وهكذا الحل بالتقاريب ..

التتمة في الكتاب ..
دنيس

يبين الشكل3 البيانات المعطاة والتابع المقرب.



الشكل 3: البيانات ومستقيم التقريب للمثال(2)

مثال(3):

قرب البيانات التالية باستخدام $\boxed{\text{تابع خطي}}$ ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	9	7	5	4	3	0	-1

الحل:

بحساب كل من $S_x\ ,\ S_{xx}\ ,\ S_{xy}\ ,\ S_y$

$$S_x = \sum_{i=1}^{8} x_i = 20$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 92$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 25$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{8} y_i = 37$$

وبذلك نجد:

$$c_1^{(0)} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{8(25)-(20)(37)}{8(92)\ \ (20)(20)} = \frac{200-740}{736\ \ 400} = \frac{-540}{336} = -1.6071429$$

$$c_0^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{(92)(37)-(25)(20)}{8(92)-(20)(20)}$$

$$= \frac{3404-500}{736-400} = \frac{2904}{336} = 8.6428571$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب :

$$f(x) = -1.6071429x + 8.6428571$$

ومنه:

$$f(x_1) = -1.6071429(-1) + 8.6428571 = 10.25$$

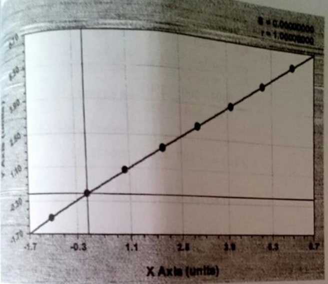
$$f(x_2) = -1.6071429(0) + 8.6428571 = 8.6428571$$
$$f(x_3) = -1.6071429(1) + 8.6428571 = 7.0357142$$
$$f(x_4) = -1.6071429(2) + 8.6428571 = 5.428513$$
$$f(x_5) = -1.6071429(3) + 8.6428571 = 3.8214284$$
$$f(x_6) = -1.6071429(4) + 8.6428571 = 2.2142855$$
$$f(x_7) = -1.6071429(5) + 8.6428571 = 0.6071426$$
$$f(x_8) = -1.6071429(6) + 8.6428571 = -1.0000003$$

ويكون الخطأ المرتكب:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

$$E = [-0.25]^2 + [0.3571429]^2 + [0.0357142]^2 + [0.4285713]^2$$
$$+ [0.17857145]^2 + [0.7857145]^2 + [-0.6071426]^2 + [-2.00]^2$$
$$= 0.0625 + 0.128551051 + 0.0012755 + 0.183673$$
$$+ 0.0318878 + 0.6173473 + 0.368622 + 4.0000012$$
$$= 1.392858446$$

يبين الشكل 4 البيانات المعطاة والتابع المقربة.



الشكل 4: البيانات ومستقيم التقريب للمثال 3

2) $n=2$ تقريب البيانات إلى قطع مكافئ :

لدينا $N+1$ نقطة مختلفة و $(x_i, y_i)\in \mathbb{R}^2$ حيث $i=0,\dots,N$ ، والتقريب إلى قطع مكافئ حيث معادلته :

$$\begin{aligned} y=\phi^{(0)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} c_k^{(0)} x^k \\ &= c_0^{(0)} + c_1^{(0)} x + c_2^{(0)} x^2 \end{aligned}$$

نعوض في (20)، فنجد:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

وبحساب قيم المجاميع وتعويضها يمكن الحصول على قيم المعاملات $c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ وتعويضها في التابع بسهولة.

مثال(4):

أوجد معادلة تابع من الدرجة الثانية الذي يقرب البيانات التالية:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	0	0.19	0.26	0.29	0.31

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

بملاحظة أن عدد البيانات المعطاة في هذا المثال 4 لنقم بحساب المجاميع.

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0+0.5+1+1.5+2=5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0+0.25+1+2.25+4=7.5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 0+0.125+1+3.375+8=12.5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 0+0.0625+1+5.0625+16=22.125$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = (0)(0)+(0.5)(0.19)+(1)(0.26)+(1.5)(0.29)+(2)(0.31)=1.41$$

ومنه نجد:

$$c_0^{(0)}(22.125)+c_1^{(0)}(12.5)+c_2^{(0)}(7.5)=2.2$$

$$c_0^{(0)}(1.125)+c_1^{(0)}(7.5)+c_2^{(0)}(5)=2.2$$

$$c_0^{(0)}(7.5)+c_1^{(0)}(5)+c_2^{(0)}(5)=1.05$$

وبحل هذه الجملة من المعادلات نجد:

$$c_0^{(0)} = -0.186 \ , \ c_1^{(0)} = 0.3611 \ , \ c_2^{(0)} = 0.0117$$

ويكون التابع التربيعي المطلوب:

$$f(x) = -0.186x^2 + 0.3611x + 0.0117$$

و قيمة الخطأ المرتكب:

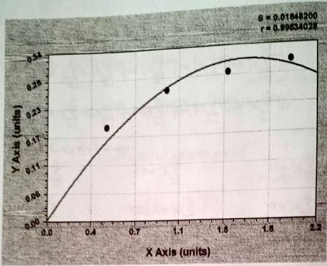
$$E = 0.00124629$$

ويبين الجدول1 قيم التابع المقرب عند النقاط المعطاة

x_i	y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
0	0	0.0117	-0.0117	0.00013689
0.5	0.19	0.1651125	0.0248875	0.0006193877
1	0.26	0.26425	-0.00425	0.0000180625
1.5	0.29	0.3091125	-0.0191125	0.0003652877
2	0.31	0.2997	0.0103	0.00010609

الجدول 1

يوضح الشكل 5 الرسم البياني للبيانات المعطاة والتابع المقرب:



الشكل 5: البيانات وتابع التقريب للمثال 4

مثال(5):

أوجد معادلة تابع من الدرجة الثالثة الذي يقرب البيانات التالية:

x_i	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	0.05	0.08	0.14	0.23	0.35	0.50	0.65	0.77	0.86	0.92	0.95

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

عدد البيانات المعطاة $N=11$. الحدودية المطلوبة من الدرجة الثالثة وبالتالي لدينا أربع معادلات بأربعة مجاهيل.

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^0+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^1+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^2+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^3=\sum_{i=1}^{11}y_i$$

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^1+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^2+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^3+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^4=\sum_{i=1}^{11}y_ix_i$$

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^2+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^3+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^4+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^5=\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^2$$

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^3+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^4+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^5+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^6=\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^3$$

لنوجد قيمة كل من هذه المجاميع:

$\sum_{i=1}^{11}x_i^0=11$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}x_i^1=0$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}x_i^2=4.4$

$\sum_{i=1}^{11}x_i^3=0$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}x_i^4=3.1328$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}x_i^5=0$

$\sum_{i=1}^{11}x_i^6=2.6259$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^0=5.5$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^1=2.28$

$\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^2=2.20$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^3=1.5226$

بالتعويض في جملة المعادلات:

$$c_0^{(0)}(11)+c_1^{(0)}(0)+c_2^{(0)}(4.4)+c_3^{(0)}(0)=5.5$$

$$c_0^{(0)}(0)+c_1^{(0)}(4.4)+c_2^{(0)}(0)+c_3^{(0)}(3.1328)=2.28$$

$$c_0^{(0)}(4.4)+c_1^{(0)}(0)+c_2^{(0)}(3.1328)+c_3^{(0)}(0)=2.2$$

$$c_0^{(0)}(0)+c_1^{(0)}(3.1328)+c_2^{(0)}(0)+c_3^{(0)}(2.6259)=1.5226$$

ومنه

$$c_0^{(0)}(11)+c_2^{(0)}(4.4)=5.5$$

$$c_1^{(0)}(4.4)+c_3^{(0)}(3.1328)=2.28$$

$$c_0^{(0)}(4.4)+c_2^{(0)}(3.1328)=2.2$$

$$c_1^{(0)}(3.1328)+c_3^{(0)}(2.6259)=1.5226$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$c_0^{(0)}=0.5,\ c_1^{(0)}=0.6997\ ,\ c_2^{(0)}=0\ ,\ c_3^{(0)}=-0.255$$

والتابع هو:

$$f(x)=-0.255x^3+0.6997\,x+0.5$$

والخطأ المرتكب هو:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2$$

حيث:

x_i	y_i	$f(x_i)$	$(y_i-f(x_i))^2$
-1	0.05	0.0552	0.00003
-0.8	0.08	0.0708	0.00009
-0.6	0.14	0.1352	0.00002
-0.4	0.23	0.2364	0.00004
-0.2	0.35	0.3621	0.00014
0	0.50	0.5000	0
0.2	0.65	0.6379	0.00015
0.4	0.77	0.7636	0.00004
0.6	0.86	0.8648	0.00002
0.8	0.92	0.9292	0.00009
1	0.95	0.9448	0.00003

وبالتالي:

$$E=\sum_{i=1}^{11}\left[f(x_i)-y_i\right]^2=0.00064418$$

والرسم البياني للبيانات والتابع المقرب: