ملاحظة: التابع الاخطي هو تابع محدب ومقعر من آنٍ معاً.

مثال: ليكن لدينا التابع:

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

هل هذا التابع محدب أم مقعر.

الحل:

نحدد فيما إذا كان هذا التابع محدب أم مقعر من خلال مصفوفة هيسيان لهذا التابع.

نقوم بإيجاد المشتقات من المرتبة الأولى ومن المرتبة الثانية لهذا التابع.

المشتقات من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2x_1 - 2$$

المشتقات من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$$

ومنه فإن مصفوفة هيسيان من الشكل:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ أن العناصر القطرية موجبة تماماً.

المحددات الأساسية الرئيسية من المرتبة الأولى:

$$|6| = 6 > 0$$

نترك سطر وعمود ونحذف بقية الأسطر والأعمدة. فنحصل على المحدد الرئيسي من المرتبة (1)

المحددات الأساسية الرئيسية من المرتبة الثانية:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

نترك سطرين وعمودين ونحذف بقية الأسطر والأعمدة.

المحددات الأساسية الرئيسية من المرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

نترك ثلاث أسطر وثلاث أعمدة ونحذف الباقي.

ومنه نلاحظ أن المصفوفة متناظرة وعناصر القطر الرئيسي جميعها موجبة و المحددات الرئيسية الأساسية جميعها أكبر من الصفر.

فالمصفوفة معرفة موجبة، وبما أن المصفوفة معرفة موجبة فالتابع هو تابع محدب.

ملاحظة: تم استخدام مضاريب لاغرانج لتحويل المسألة من مسألة مقيدة إلى مسألة غير مقيدة. (اللاخطية)

مثال:

أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2$$

مع مراعاة القيد: $2x_1 - x_2 = 4$

الحل:

نحول القيد إلى الشكل: $2x_1 - x_2 - 4 = 0$

نشكل تابع لاغرانج لهذه المسألة: $L(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$

$$L(x_1,x_2,\lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 - \lambda(2x_1 - x_2 - 4)$$

ثم نقوم بالبحث عن القيمة الصغرى لمسألة غير مقيدة.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 + x_2 + 4$$

نقوم بحل المعادلات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -2x_1 + x_2 + 4 = 0$$

بعد الحل بإحدى الطرق نحصل على القيم التالية:

$$x_1 = \frac{7}{11} \quad , \quad x_2 = -\frac{30}{11} \quad , \quad \lambda = \frac{24}{11}$$

من أجل هذه القيم يحقق التابع قيمة قصوى من أجل تحديد نوع هذه القيمة يجب أن نحدد نوع التابع هل هو محدب أم مقعر ولذلك نقوم بإيجاد مصفوفة هيسيان:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة هي مصفوفة مربعة متناظرة عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً
المحددات الأساسية الصغرى أكبر من الصفر.
إذاً هذه المصفوفة معرفة موجبة.
وبالتالي فإن التابع f تابع محدب. و القيد تابع خطي، فهو تابع محدب ومقعر في آنٍ واحد
مما سبق بما أن التابع محدب و القيد محدب فإن القيمة القصوى التي حصلنا عليها
تمثل قيمة صغرى للتابع f .

تمرين (1): أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5$$

مع مراعاة القيد: $x_1 + x_2 = 4$.

تمرين (2): أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

مع مراعاة القيد: $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$

انتهت المحاضرة التاسعة

هبة