تبولوجيا ٢

مدرس المقرر : أ.رياض خضر الحميدو(معيد بكلية العلوم- قسم الرياضيات)

قاعده فضاء تبولوجي :

.(base of the topological space)

تعريف 1.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وB اسرة من المجموعات المفتوحة بحيث $B \subseteq T$. نسمي B قاعدة للتبولوجي T إذا وفقط إذا لكل عنصر لايساوي المجموعة الخالية من عناصر T يمكن كتابته على شكل اتحاد بعض او كل عناصر B.

مثال : لتكن $X = \{a, b, c\}$ وان $T = \{ \phi , \{a\} , \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\} , X\}$

التبولوجي المعرف على X . من خلال النظر للمجموعة $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$يمكننا القول بان جميع المجموعات الغير خالية الاخرى العائدة للتبولوجي T يمكن كتابتها من خلال المجموعات الثلاث أعلاه وذلك باتحاد عدد من هذه المجموعات وبهذا فأنها تمثل قاعدة لهذا التبولوجي . نلاحظ ان الاسرة المتكونة من المجموعات $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}\}$هي الاخرى تمثل قاعدة لهذا التبولوجي وبهذا يمكن القول بان الفضاء التبولوجي قد يمتلك عدد كبير من القواعد التبولوجية للتبولوجي الواحد أي ان :

مبرهنة 2.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وB قاعدة للتبولوجي T ولتكن B_1 اسرة مجموعات مفتوحة بحيث ان $B \subseteq B_1 \subseteq T$. فان$B_1$ قاعدة للتبولوجي T . وكحالة خاصة ان T هي قاعدة لنفسها .

البرهان : بسيط ويترك كتمرين . #

مثال 1: لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ والتبولوجي T هو $T = \{\phi , \{b\} , \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$. واضح ان الفضاء التبولوجي (X,T) يمتلك قاعدة وحيده هي T (لان أي عنصر من عناصرT لا يمكن كتابته بدلالة اتحاد عناصر أخرى من T.

مثال 2: لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و T التبولوجيا الاعتيادية على R. ولتكن B اسرة الفترات المفتوحة من R. ان الاسرة B تمثل قاعدة للفضاء التبولوجي الحقيقي وذلك لان

كل مجموعة مفتوحة في T هي عبارة عن اتحاد فترات مفتوحة من R وهذه الفترات تنتمي الى B.

مثال 3: ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان T هي التبولوجيا القوية على X. واضح ان اسرة المجموعات المفتوحة والحاوية لعنصر واحد فقط تشكل قاعدة للتبولوجي T أي ان المجموعة$B = \{\{x\} : x\in X\}$ تمثل قاعدة للتبولوجي T.

مبرهنة 3.2.3 : لتكن B اسرة من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,T). فان B قاعدة للتبولوجي T إذا وفقط إذا لكل $x\in X$ و N جوار الى x يوجد عنصر W في B بحيث ان $x \in W \subseteq N$

البرهان : نفرض أولا ان B قاعدة للتبولوجي T ولتكن x نقطة ما من نقاط X و N جوار للنقطة x.

اذن توجد مجموعة مفتوحة مثلV بحيث ان $x \in V\subseteq N$ (من تعريف الجوار) . الآن بما ان B قاعدة للتبولوجي T و Vمجموعة مفتوحة من X فان V تساوي اتحاد لعدد من عناصرB وهذا يؤدي الى وجود عنصر W في B بحيث ان $x \in W \subseteq V \subseteq N$. بالعكس لتكن W مجموعة مفتوحة في X وليكن x عنصر ما في W فيمكن اعتبار W جوار للنقطة x واستنادا الى الفرض توجد مجموعة W_xمنB بحيث ان $x\in W_x \subseteq W$ وبهذا فلكل عنصر من عناصر W يوجد عنصر في B يحقق المتباينة أعلاه وهذا يؤدي الى آن $W = \bigcup_{x\in w} Wx$. وبالتالي فان B قاعدة للتبولوجي T. #

مبرهنة 4.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و B_1 قاعدة للتبولوجي T. ولتكن B_2 اسرة من المجموعات المفتوحة في X فان B_2 قاعدة للتبولوجي T إذا كان لكل عنصر $x\in X$ و W_1 مجموعة مفتوحة من B_1 تحتوي على x فتوجد مجموعة مفتوحة W_2 في B_2 بحيث أن $x \in W_2 \subseteq W_1$.

البرهان : واضح باستخدام تعريف الجوار والمبرهنة (3.2.3) . #

مثال : ليكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و T التبولوجيا الاعتيادية على R، ولتكن B_1 اسرة جميع الفترات المفتوحة من R و B_2 اسرة جميع الفترات المفتوحة من R بحيث أطرافها أعداد نسبية . يمكن طرح السؤال التالي هل ان B_2 قاعدة للتبولوجي T.

الحل : واضح ان B_1 قاعدة للتبولوجي T. الآن نبرهن ان B_2 هي الاخرى قاعدة للتبولوجي T. نفرض ان x عنصر ما من عناصر X وان $W_1 = (a,b)$ فترة مفتوحة من R تحتوي على العنصرx ، أي ان $a< x< b$ وبهذا فان W_1 ينتمي الى B_1. بما ان لكل عددين حقيقيين غير متساويين يوجد عدد نسبي بينهما ، اذن يوجد عددان نسبيان مثل p,q بحيث ان $a < p < x < q < b$. واضح ان الفترة (p,q) ، عنصر من عناصر B_2 أي ان

$X \in (p , q) \subseteq (a , b)$. وباستخدام المبرهنة (4.2.3) نستنتج ان B_2 قاعدة للتبولوجي T يلاحظ ان القاعدة B_2 تحتوي على عناصر قابلة للعد .

مبرهنة 5.2.3 : ليكن (X ; T) فضاءا تبولوجيا و B_1 قاعدة للتبولوجي T و B_2 اسرة من المجموعات المفتوحة في X فان B_2 قاعدة للتبولوجي T اذا كان لاي عنصر من عناصر B_1 يمكن كتابته بشكل اتحاد لعدد من عناصر B_2.

البرهان: لتكن A مجموعة مفتوحة في X. بما ان B_1 قاعدة للتبولوجي T فان $A = \bigcup_{i\in I} V_i$ حيث V_i عنصر من عناصر B_1 (لكل $i\in I$) . كذلك فان أي عنصر V_i (لكل $i\in I$) يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B_2 أي ان $V_i = \bigcup_{j\in J} W_i$ وهذا يؤدي الى ان A يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B_2 وبالتالي فان B_2 قاعدة للتبولوجي T. #

مبرهنة 6.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X ، ولتكن B قاعدة للتبولوجي T فان A مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا A تساوي اتحاد لعدد من عناصر B.

البرهان : يترك كتمرين . #

مبرهنة 7.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و B قاعدة للتبولوجي T فان :

1) المجموعة X تساوي اتحاد لعدد من عناصر B.

2) اذا كان W_1 , W_2عنصريين في B فان تقاطعهما يشكل اتحاد لعدد من عناصر B.

البرهان : 1) بما ان X مجموعة مفتوحة فينتج المطلوب الاول بالاستناد الى المبرهنة (6.2.3) .

2) بما ان W_1, W_2 مجموعتين مفتوحتين فان $W_1 \cap W_2$مجموعة مفتوحة . هذا يعني من

الممكن كتابة المجموعة $W_1 \cap W_2$ على شكل اتحاد لعدد من عناصر B (لان B قاعدة للتبولوجي T). #

من المبرهنتين السابقتين يمكن ايجاد طريقة اخرى لتعريف التبولوجيا وذلك باستخدام مفهوم القاعدة وهاتان المبرهنتان تشكلان الركيزتين الأساسيتين لهذا التعريف لانهما تشيران الى الشروط التي يجب ان تحققها اسرة المجموعات الجزئية من X لكي تكون قاعدة للتبولوجي من جهة ومن جهة اخرى تحدد المجموعات المفتوحة من X للتبولوجي المطلوب بناءه.

مبرهنة 8.2.3 : لتكن X مجموعة غير خالية و B اسرة من المجموعات الجزئية من X بحيث ان B تحقق مايلي :

1) يمكن كتابة X على شكل اتحاد لعدد من عناصر B.

2) لكل A_1 ، A_2 عنصران ينتميان الى B فان تقاطعهما يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B. فان الاسرة T المؤلفة من كل المجموعات المساوية لاتحاد عناصر من B تشكل تبولوجي على X وانها التبولوجيا الوحيدة التي قاعدتها B.

البرهان : لكي نبرهن ان T تبولوجي على X يجب ان نحقق شروط التبولوجي الثلاث :

1- واضح ان المجموعتين ϕ ، X عناصر في T.

2- لتكن A_1 , A_2 عنصران من عناصر T. فان A_1 , A_2 يمكن كتابتهما على شكل اتحاد لعدد من عناصر B؛ أي ان

$$A2 = \bigcup_{j\in J} Aj \,, \qquad A1 = \bigcup_{i\in I} Ai$$

حيث ان A_i , A_j عناصر في B (لكل $i\in I$ ولكل $j\in J$) وبالتالي فان

$$A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{(i,j)\in IxJ} (A_i \cap A_j)$$

بالاعتماد على تعريف T ينتج ان $A_1 \cap A_2$ عنصر ينتمي الى T . اما الشرط الاخير من شروط التبولوجي يمكن تحقيقه بسهولة من تعريف T. وبالتالي فان T تبولوجي على X. كما انه التبولوجي الوحيد وذلك لنفرض ان S تبولوجي اخر على X بحيث ان B قاعدة الى S. بسهولة يمكن برهان ان التبولوجيان T، S متساويتان . هذا يؤدي الى ان T هي التبولوجيا

الوحيدة التي قاعدتها B. #

مثال 1 : لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية و B اسرة كل الفترات المفتوحة من R. واضح ان الاسرة B تحقق شروط المبرهنة (8.2.3). هذا يعني ان بالامكان بناء تبولوجي وحيد قاعدته B وعناصره المجموعات المساوية لاتحاد عناصر من B (أي لاتحاد فترات مفتوحة) وبهذا نحصل على الفضاء التبولوجي الحقيقي . هذا يؤدي الى امكانية بناء تبولوجي على أي مجموعة اذا عرفنا قاعده للتبولوجي المطلوب انشاءه .

مثال 2 : لتكن X = {a,b,c} و B تمثل المجموعات الجزئية المنفردة من X أي ان B = {{a} ,, {b} , {c}} واضح ان B تحقق شروط المبرهنة (8.2.3) وان التبولوجيا التي تبنى على المجموعة X وقاعدتها B هي التبولوجيا القوية و بذلك فانها وحيدة .

من المبرهنة (8.2.3) يمكن الأستدلال بأننا إذا حققت B شروط معينة على المجموعة X فأن B (حيث B مجموعات جزئية من X) تولد تبولوجيا على X قاعدتها B. في هذا الجزء سنبين عند تعريف القاعده الجزئية (Subbase) على مجموعة X ستولد تبولوجي على X.

تعريف 9.2.3: ليكن (X,T) فضاء تبولوجيا. تسمى B قاعده جزئية الى تبولوجيا T اذا كانت B تمثل مجموعات جزئية من X وتحقق الشروط الآتية:

1) لكل $B_i \in B$ فإن $B_i \in T$.

2) لكل $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ عناصر من B فإن تقاطع هذه العناصر مع X يولد قاعدة للتبولوجي T. أي أن تقاطع هذه العناصر مع X يولد قاعدة للتبولوجي T . أي أن تقاطع كل عدد منته من عناصر B مع X تمثل قاعده الى T.

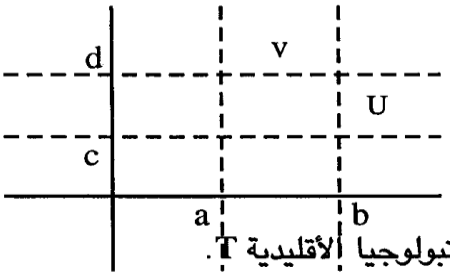
مثال 1 : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية وأن
{ حيث $r \in R$, $A = (-\infty, r)$ و $A = (r, \infty)$: R A } = B فإن B تمثل قاعدة جزئية للتبولوجيا الحقيقية T. $\subseteq$

الحل: واضح أن كل عنصر من عناصر B هو عنصر من عناصر T، وبما أن جمع الفترات المفتوحة تمثل قاعده للتبولوجيا T وفي نفس الوقت أن أي عنصر من هذه القاعدة (الفترة المفتوحة) يمكن كتابتها على شكل تقاطع عنصرين من عناصر B.

مثال 2 : لتكن (R^2, T) الفضاء التبولوجي الأقليدي للمستوى فإن المستطيلات المفتوحة

تمثل قاعدة للتبولوجي T. أي أن عناصر هذه القاعدة من نوع $I = J \times K$ حيث أن J , K فترات مفتوحة في R. لتكن B مجموعة الأشرطة المفتوحة في R^2 أي أن عناصر B تكون على النحو الآتي: $V = \{(x , y) \in R^2: x \in (a , b)\}$ أو

$V = \{(x , y) \in R^2: y \in (c , d)\}$ وأن d, c, b, a عناصر في R. أي أن عناصر B يمثلها الشكل ادناه.



واضح أن B تمثل قاعدة جزئية للتبولوجيا الأقليدية T.

مبرهنة 10.2.3 : ليكن (X, T) فضاءاً تبولوجياً وأن B قاعدة جزئية للتبولوجي T وتكتب بالشكل $B = \{ B_i: i \in I\}$. ولتكن A مجموعة جزئية من X غير خالية. فإن A مجموعة مفتوحة في X اذا وفقط اذا لكل $a \in A$ يوجد $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ عدد منته من عناصر B بحيث أن $A \subseteq$ $a \in \bigcap_{i=1}^{m} B_i$.

البرهان: نفرض أول A مجموعة مفتوحة وأن a عنصراً ينتمي الى A . من تعريف القاعدة الجزئية نحصل على مجموعة عناصر منتهية من B ولتكن $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ بحيث أن $A = \bigcup_{j \in J} (\bigcap_{i=1}^{m} B_{ij})$.

هذا يؤدي الى أن $A \subseteq$ $a \in \bigcap_{i=1}^{m} B_i$.

أما الاتجاه الثاني ينتج على اعتبار $\bigcap_{i=1}^{m} B_i$ جوار للنقطة a وبهذا فإن A مجموعة مفتوحة.