2016/4/3

المحاضرة السابعة: نمذجة رياضية.

مسألة النقل:

المسألة الأولى: نموذج توزيع وسائل النقل على الخطوط.

لنفرض أنه لدينا n نوعاً من الطائرات (أو السفن أو الحافلات ....)

وأن عدد الطائرات المتوفرة من النوع j يساوي N_j ونريد توزيعها على m خطاً مستقلاً.

نفترض أن حجم الطلب على الخط i يساوي a_i واحدة نقل (إنسان أو صندوق أو طن ....).

وأن حمولة أو طاقة الطائرة من النوع j على الخط i تساوي a_{ij} واحدة نقل في واحدة الزمن.

وأن مقدار نفقاتها على ذلك الخط يساوي C_{ij} وحدة نقدية، والمسألة مرفقة بالجدول التالي:

الخطوط \ الأنواع	1	2	- - - - - - -	n	حجم الطلب
1	a_{11} C_{11} x_{11}	a_{12} C_{12} x_{12}	- - - - - - -	a_{1n} C_{1n} x_{1n}	a_1
2	a_{21} C_{21} x_{21}	a_{22} C_{22} x_{22}	- - - - - - -	a_{2n} C_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
m	a_{m1} C_{m1} x_{m1}	a_{m2} C_{m2} x_{m2}	- - - - - - -	a_{mn} C_{mn} x_{mn}	a_m
عدد النوع	N_1	N_2	- - - - - - -	N_n	

لإيجاد النموذج الرياضي: نفرض x_{ij} عدد طائرات النوع j التي تستعمل على الخط i.

حيث يكون تابع الهدف (تابع النفقات) يأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min$$

وذلك ضمن الشروط التالية:

شروط طلبات الخطوط:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} \geq a_1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq a_m$$

شروط الأنواع :

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = N_1$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = N_n$$

بالإضافة إلى شروط عدم السلبية : $x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1.m} \quad j = \overline{1.n}$

مثال : لتكن لدينا ثلاثة أنواع من الطائرات عددها على التوالي 50 20 30 طائرة ونريد توزيعها على أربعة خطوط جوية متطلباتها على التوالي 300 200 1000 500 واحدة نقل . أما الحمولة الشهرية a_{ij} و النفقات c_{ij} لكل نوع وعلى كل خط معطاة بالجدول التالي :

نوع الطائرة / رقم الخط i	1		2		3		متطلبات الخط a_i
1	15		30		25		300
	x_{11}	15	x_{12}	70	x_{13}	40	
2	10		25		50		200
	x_{21}	20	x_{22}	28	x_{23}	70	
3	20		40		30		1000
	x_{31}	25	x_{32}	15	x_{33}	40	
4	50		17		45		500
	x_{41}	40	x_{42}	45	x_{43}	65	
عدد النوع N_j	50		20		30		

المسألة الثانية : نموذج نقل المواد بأقل تكلفة :

لنفرض أننا نريد نقل إحدى المواد من مراكز الإنتاج (أو التخزين) إلى مراكز الاستهلاك ولنفرض أنه لدينا m مركزاً للإنتاج (أو التخزين) و أن المادة المعروضة متوفرة بكميات محدودة تساوي a_i حيث $i = 1 \ldots m$ كما نفترض أنه يوجد لدينا n مركزاً استهلاكية . وأن كلٍ منها يحتاج إلى كميات معينة من تلك المادة b_j حيث $j = 1 \ldots n$

لنفرض أن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j

تساوي C_{ij} .

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

نرمز بـ x_{ij} للكمية التي يجب نقلها من المركز الإنتاجي i إلى مركز الاستهلاك j .

ونضع الجدول الآتي:

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	1	2	------	n	الكميات المتوفرة
1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	------	C_{1n} x_{1n}	a_1
2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	------	C_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	------	C_{mn} x_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	------	b_n	

المطلوب إيجاد x_{ij} حتى تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

في هذه الحالة يكون النموذج نموذج متوازن و عندئذ يكون لدينا:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (C_{i1} x_{i1} + C_{i2} x_{i2} + \cdots + C_{in} x_{in})$$

$$= \vdots$$

بالامتحان نكتب الصيغة بالتفصيل.

ضمن الشروط:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = \overline{1,n}$$

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$$

$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

امتحانياً يجب كتابة تابع الهدف والشروط بالتفصيل

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

الحالة الثانية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

في هذه الحالة يكون النموذج نموذج غير متوازن

ونميز حالتين:

آ) إذا كانت $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

هذا النموذج هو نموذج فائض عن البنتاج، نحول هذا النموذج إلى نموذج متوازن

وذلك بإضافة مراكز استهلاكية وهمية حاجتها تساوي: $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من المركز الإنتاجي إلى المركز الاستهلاكي الوهمي تساوي الصفر

ثم نقوم بصياغة النموذج حسب الفقرة السابقة أي كنموذج متوازن

أي أنه أصبح لدينا $n+1$ مركز استهلاكي.

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = \overline{1,n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \qquad i=\overline{1,m}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=\overline{1,m} \ , \ j=\overline{1,n+1}$$

ب) إذا كان: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

هذا يعني أنه لدينا عجز من الإنتاج لذلك نضيف مركز إنتاجي وهمي طاقته الإنتاجية تساوي:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

تكلفة النقل للوحدة الواحدة منه إلى جميع المراكز الاستهلاكية تساوي الصفر، وعليه يصبح النموذج الرياضي بالشكل التالي:

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \qquad j=\overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=\overline{1,m+1}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=\overline{1,m+1} \ , \ j=\overline{1,n}$$

تمرين:

يراد شحن كمية من النفط من ثلاث محطات A_1, A_2, A_3 إلى أربع مدن B_1, B_2, B_3, B_4 إلى الكميات الموجوده في كل محطة والمطلوبة في كل مدينة وتكلفة النقل في كل اتجاه معطاة بالجدول التالي:

المحطات \ المدن	B_1	B_2	B_3	B_4	الكميات المتوفرة
A_1	7	4	15	9	120
A_2	11	2	7	3	80
A_3	4	5	2	8	100
كميات النفط المطلوبة	85	65	90	60	

المطلوب:

1) صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة الذي يعطينا أقل تكلفة ممكنة للنقل.

2) إذا كانت الكميات المتوفرة 100 200 120 أعد صياغة النموذج الرياضي.

3) إذا كانت الكميات المطلوبة 60 150 65 85 أعد صياغة النموذج الرياضي.

انتهت المحاضرة السابعة