1.3: تعريف الفضاء التوبولوجي

تعريف 1.1.3 : لتكن X مجموعة غير خالية و T اسرة مجموعات جزئية من X بحيث ان T تحقق الشروط الاتية :

1- المجموعتان X , ϕ تنتميان الى T.

2- لكل A_1 , A_2 ينتميان الى T فان تقاطع A_1 مع A_2 ينتمي الى T (أي ان تقاطع عدد منته من عناصر T يكون عنصرا في T ايضا) .

3- لتكن $A_1, A_2, ... , A_n,.....$ عدد غير منته من عناصر T فان اتحاد هذه المجموعات هي مجموعة تنتمي الى T (أي ان اتحاد عدد غير منته من عناصر T هو عنصرا في T) .

نسمي T بالتبولوجيا على X و (X , T) بالفضاء التبولوجي وعناصر T تسمى بالمجموعات المفتوحة وعناصر X بالنقاط .

واضح ان الشروط المبينة اعلاه مطابقة للشروط المذكوره في المبرهنة (4.4.2) في الفصل الثاني ، وبهذا فان لكل فضاء متري يمكن بناء تبولوجي عليه وهذا يعني ان الفضاءات المترية هي مجموعة جزئية من الفضاءات التبولوجية ولكن العكس ليس صحيح " انظر مثال رقم (7) ادناه " .

مثال 1 : لتكن X مجموعة غير خالية و $T = \{\phi , X\}$. واضح ان T تحقق الشروط الثلاث. وهذا يعني ان T تبولوجي على X، أي ان (X , T) فضاء تبولوجي . هذا النوع من التبولوجيا يمكن بناءه على أي مجموعة ويسمى بالتبولوجيا الضعيفة (Indiscrete Topology).

مثال 2 : لتكن X مجموعة تحتوي على نقطتين مختلفتين مثل b , a و

$$T_1 = \{\phi , X\} \quad , \quad T_2 = \{\phi , \{a\} , X\}$$

$$T_3 = \{ \phi, \{b\} , X\} , T_4 = \{ \phi , \{a\} , \{b\} , X\}$$

واضح ان كل من T_4 , T_3 , T_2 , T_1 تبولوجيات على X. نسمي التبولوجيا T_4 بالتبولوجيا القوية (Discrete topology)، وان $T_4 = P(X)$ (حيث P (X) اسرة جميع المجموعات الجزئية من X.

مثال 3 : لتكن $X = N$ (حيث N مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة) $A_n = \{1,2,...,n\}$، ولتكن $T_n = \{\phi , X\} \cup \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\}$. فان T_n تبولوجي على X لكل $(n \in N)$.

الحل : ببساطة ان T_n تحتوي على ϕ و X من تعريف T_n وبهذا يتحقق الشرط الاول . اما بالنسبة الى الشرط الثاني نفرض ان B, D عنصرين من عناصر T_n، وبهذا فان B مجموعة جزئية منD او D مجموعة جزئية من B وفي كلتا الحالتين فان تقاطعهما عنصر في T_n. اخيرا ، لكل عدد غير منته من عناصر T_n توجد مجموعة تحتوي على جميع هذه المجموعات وبذلك فان اتحاد هذه المجموعات هي مجموعة تنتمي الى T_n. وبهذا فان T_n تبولوجي على X. كذلك يمكن صياغة نوع اخر من التبولوجيا على المجموعة $X = N$ كما في المثال التالي:

مثال 4 : لتكن $X = N$ ولتكن $A_n = \{n, n+1, \dots\}$. نفرض ان $T = \{\phi, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ فان (X, T) فضاء توبولوجي .

الحل : واضح ان الشرط الاول متحقق حيث ان $X = A_1$. اما بالنسبة للشرط الثاني قبل البدء به يمكن ترتيب عناصر T بالشكل الاتي $X = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$. اذن تقاطع أي مجموعتين او عدد منته من هذه المجموعات هو المجموعة الصغرى و بالتالي فانها عنصر من عناصر T. اخيرا بسهولة يمكن القول بان اتحاد عدد غير منته من عناصر T يمثل مجموعة واحدة تحتوي على بقية المجموعات وهذه المجموعة تنتمي الى T، وبالتالي فان T تبولوجي على المجموعة X.

من الامثلة اعلاه يمكن الاستدلال بان ممكن بناء اكثر من تبولوجي على المجموعة الواحدة ويعتمد هذا على عدد عناصر المجموعة .

مثال 5 : لتكن $(X = R)$ (حيث R مجموعة الاعداد الحقيقية) وان T اسرة جميع المجموعات الجزئية من X المساوية لاتحاد فترات مفتوحة . فان T توبولوجي على $X = R$.

الحل : واضح ان $\phi, X \in T$ وبهذا فان الشرط الاول متحقق . اما بالنسبة للشرط الثاني، لتكن A_1, A_2 عنصرين في T فان A_1, A_2 يمكن كتابتهما على شكل اتحاد فترات مفتوحة من X. نفرض ان

$$A_1 = \bigcup_{i \in I} v_i , \quad A_2 = \bigcup_{j \in J} w_j$$

حيث v_i , w_i فترات مفتوحة في R.

فان
$$A_1 \cap A_2 = \Big(\bigcup_{i \in I} v_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j \in J} w_j\Big) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (v_i \cap w_j)$$

بما ان تقاطع أي فترتين مفتوحتين من R اما ان تكون المجموعة الخالية او فترة مفتوحة . بهذا نستنتج ان تقاطع A_1 مع A_2 عنصر في T. اخيرا لتكن ... $A_1, A_2,$ عناصر في T ونفرض ان $A = A_1 \cup A_2 \cup ...$ فان لكل عنصر A_i $(i \in I)$ يمكن كتابته على شكل اتحاد فترات مفتوحة من R وهذا يؤدي الى ان A عبارة عن اتحاد فترات مفتوحة من R. هذا يعني ان $A \in T$ وبالتالي فان T تبولوجي على $X = R$. نسمي هذه التبولوجيا بالتبولوجيا الاعتيادية (Usual topology) ويسمى الفضاء التبولوجي (R , T) بالفضاء التبولوجي الحقيقي (Real topological space). وهذا مثال يدلل ان الفضاء المتري (R , d) تم انشاء تبولوجي عليه .

مثال 6 : لتكن X مجموعة غير منتهية ولتكن T اسرة المجموعات الجزئية من X بحيث ان متممة أي مجموعة جزئية من هذه الاسرة اما X او مجموعة منتهية فان (X , T) فضاء تبولوجي .

الحل : لتحقيق الشرط الاول واضح ان ϕ متممة الى X وان ϕ مجموعة منتهية فان X تنتمي الى T وان X متممة ϕ فان ϕ تنتمي الى T. اما بالنسبة الى الشرط الثاني نفرض ان A_2 , A_1 عنصرين من عناصر T ، يجب ان نبرهن ان متممة $A_1 \cap A_2$ اما X او مجموعة منتهية . بما ان $X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2)$ وبما ان اتحاد عدد منته من مجموعات منتهية يجب ان يكون مجموعة منتهية . هذا يعني ان $X - (A_1 \cap A_2)$ مجموعة منتهية الا اذا كان تقاطع A_1 مع A_2 يساوي المجموعة الخالية وفي هذه الحالة تكون متممة $A_1 \cap A_2$ هي المجموعة X وفي كلتا الحالتين فان $A_1 \cap A_2$ عنصر في T. اخيرا لكي نحقق الشرط الثالث نفرض ان لكل $i \in I$ فان A_i عنصر من عناصر T وبهذا فان متممة A_i (لكل $i \in I$) اما مجموعة منتهية او المجموعة X وبما ان $X - \cup A_i = \cap (X - A_i)$ ولكل $i \in I$ اما $X - A_i$ هي المجموعة X وبذلك فان تقاطعهما هو المجموعة X او ان $X - A_i$ مجموعة منتهية وبذلك فان تقاطعهما مع أي عدد من المجموعات المنتهية او X هو مجموعة منتهية . وهذا يعني ا ن (X , T) فضاء تبولوجي . يسمى هذا التبولوجي بتبولوجيا المتممات المنتهية (Finite complement topology) .

مثال 7 : لتكن X مجموعة تحتوي على عنصرين فاكثر فان التبولوجيا الضعيفة على X

ليست متولدة من فضاء متري بشكل عام . وبصورة ادق نفرض ان$X = \{a,b\}$ ، بحيث ان $a\neq b$ ونفرض ان (X,d) فضاء متري . يمكن توليد مجموعتين مفتوحتين A_b , A_a بحيث ان تقاطعهما هو المجموعة الخالية ، وهذا يناقض التبولوجيا المعرفة على X. كذلك ينطبق التفسير اعلاه على المثال الثاني للتبولوجيات T_3و T_2 في المثال (2).

مثال 8: لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية و

$$T = \{A_r: r\in R\} \cup \{R, \phi\}$$

حيث $A_r = \{x\in R: x < r\}$ فأن T تبولوجي على R.

الحل:واضح أن الشرط الأول متحقق اما بالنسبة للشرط الثاني، نفرض أن A_s, A_r عنصرين من عناصر T وهذا يؤدي أن $r \leq s$ أو $s < r$.

نفرض أن t اصغر العددين $\{s , r\}$ هذا يعني أن $A_r \cap A_s = A_t$، حيث A_t هو أحد عناصرT. أخيراً نفرض أن $\{A_r\}$ عدد غير منته من عناصر T فأن $\cup A_r$ أما أن يكون R أو يوجد عدد r_i يقع على يمين جميع المجموعات$\{A_r\}$ وفي هذه الحالة فأن $\cup A_r = A_{ri}$ وفي كلتا الحالتين فإن $\cup A_r$ عنصر في T . هذا يؤدي الى أن T تبولوجي على R ، يسمى هذا التبولوجي الأشعة اليسارية (Lrft ray topology) على R . واضح أن يمكن تكوين تبولوجيا على R باستخدام الأشعة اليمينية أي أن

$$T = \{A_r: r \in R\} \cup \{R , \phi\}$$

حيث $A_r = \{x \in R: x > r\}$ ويسمى هذا التبولوجي بتبولوجيا الأشعة اليمينية (right ray topology) ويترك للطالب تكون النوع الأخير.

اما اذا كانت A_i مجموعات مفتوحة (تنتمي الى T) فان $\cap A_i$ ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة كما مبين في المثال التالي :

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي وان $A_n = (-1/n , 1/n)$ فترات مفتوحة في R حيث $n = 1,2, ...$ يلاحظ ان $\cap A_n = \{0\}$ مجموعة مغلقة في R وليست مفتوحة .

تعريف 2.1.3 : ليكن (X , T) فضاء تبولوجي . المجموعة الجزئية N من X تسمى جوار للنقطة $a \in X$ اذا كانت N تحتوي على مجموعة مفتوحة A بحيث ان a تنتمي الى A.

مبرهنة 3.1.3 : ليكن (X,T) فضاء تبولوجي . A مجموعة مفتوحة في X اذا وفقط اذا A جوار لكل نقطة من نقاطها .

البرهان : نفرض ان A مجموعة مفتوحة وان a عنصر ما ينتمي الى A. يمكن القول ان A جوار للنقطة a. بالعكس لتكن A جوار لكل نقطة من نقاطها، فان لكل نقطة a تنتمي الى A توجد مجموعة مفتوحة G_a بحيث ان $a \in G_a \subseteq A$. بما ان $\bigcup_{a\in A} G_a$ مجموعة مفتوحة في X فان $\bigcup_{a\in A} G_a = A$ وهذا يعني ان A مجموعة مفتوحة .#

مبرهنة 4.1.3 : ليكن (X , T) فضاء تبولوجي وان a عنصر ما ينتمي الى X فان :

1 – يوجد على الاقل جوار واحد الى النقطة a.

2 – لكل جوار N للنقطة a فان a تنتمي الى N.

3 – اذا كان N جوار للنقطة a وان $N \subseteq M$ فان M جوار للنقطة a.

4 – اذا كان كل من N , M جوار للنقطة a فان تقاطع N مع M جوار للنقطة a.

5 – اذا كان N جوار للنقطة a يوجد جوار اخر M للنقطة a بحيث ان $M \subseteq N$ و M جوار لاي نقطة من نقاطه .

البرهان : 1) بما ان a نقطة من نقاط X فيمكن اعتبار X جوار للنقطة a. اما بالنسبة الى (2) ، (3) يمكن استنتاجهما مباشرة .

4) ليكن M, N جوار للنقطة a وبذلك توجد مجموعتين مفتوحتين B, A تحتوي على النقطة a وان $A \subseteq N, B \subseteq M$. هذا يعني ان $a \in A \cap B \subseteq N \cap M$. بما ان T تبولوجي على X فان $A \cap B$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فان $N \cap M$ جوار للنقطة a.

5) بما ان N جوار للنقطة a فتوجد مجموعة مفتوحة M بحيث ان $a \in M \subseteq N$ وباستخدام المبرهنة (3.1.3) فان M جوار للنقطة a وبهذا ينتهي برهان المبرهنة . #

تعريف 3.1.5: ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و a نقطة ما تنتمي الى X. ان مجموعة جميع الجوارات B_a للنقطة a يسمى بنظام الجوارات