Subject : / /

المحاضرة الخامسة - الأربعاء

2016/3/30

اثبت ان $(\sin z)' = \cos z$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ومنه

$$(\sin z)' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]'$$

$$= \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]'$$

المتسلسلة متقاربة بالإطلاق $\forall z$ ومنه مشتق مجموعه - ولو كان غير منته - فهو مجموع المشتقات

$$\Rightarrow (\sin z)' = \left[1 - \frac{3z^2}{3!} + \frac{5z^4}{5!} - \cdots + \frac{(2n+1)\cdot(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n+1)!}\right]$$

$2!$ $4!$ $2n!$

$$(\sin z)' = \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{2n!} + \cdots\right]$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

ملاحظة:

* متسلسلة الكوساين هي المتسلسلة المشتقة لمتسلسلة الساين "بدءاً من الـ (0) وليس من الواحد"

+ أثبت ان $(\cos z)' = -\sin z$

"للطالب"

+ أثبت ان التوابع $\sin z / \cos z$ توابع دورية دورها 2π

الحل:

$$\cos(z+2\pi)$$

$$= \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz}\cdot e^{2\pi i} + e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}}{2}$$

نضع من القول e^{iz} تابع دوري دوره 2π

نلاحظ ان

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i(\sin 2\pi)$$
$$= 1 + 0$$
$$= 1$$

$$e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) - i\sin(-2\pi)$$
$$= 1$$

$$\Rightarrow \cos(z+2\pi) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Subject : / /

$$\Rightarrow \cos(z+2\pi) = \cos(z).$$

ومنه $\cos z$ تابع دوري

أثبت أن $\sin z$ تابع دوري "الخاص".

⊕ إيجاد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي

للدوال المثلثية $\sin(z), \cos(z)$

⊕ إذن $\cos z$

$$\cos(z) = \cos(x+iy)$$

$$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$= \cos(x) \cdot \left[\frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} \right]$$

$$+ \sin x \cdot \left[\frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \right]$$

$$= \cos(x) \cdot \left[\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \right]$$

$$- \sin x \cdot \left[\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \right]$$

$$= \cos(x) \cdot ch(x) - \sin(x) \cdot \left[\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} \right] (-i)$$

$$i^2 = -1 \Rightarrow i \cdot i = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{-i = \frac{1}{i}}$$

$$= \cos x \cdot ch x - \sin x \cdot \left[\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \right] (i)$$

$$= \cos x \, ch x - i \sin x \, sh y.$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos z = \underbrace{\cos x \, ch y}_{u} - i \underbrace{\sin x \, sh y}_{v}}$$

$$f(z) = u - i v$$

بنفس الطريقة في ⊕ $\sin(z)$

$$\boxed{\sin z = \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y}$$

+ أثبت أن $\cos z$ تابع تحليلي في $\mathbb{C}$ باستخدام معادلتي كوشي ريمان وأن u و v قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}^2$ وأن

$$(\cos z)' = -\sin z$$

+ أثبت أن $\sin z$ تابع تحليلي في $\mathbb{C}$ باستخدام معادلتي كوشي ريمان وأن u و v قابلة للتفاضل الكلي في $\mathbb{R}^2$ وأن

$$(\sin z)' = \cos(z)$$

⊕ حل معادلة مثلثية عقدية

$$\cos z = a$$

سيكون لدي عدد غير منتهي من الحلول أيا كانت a

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a$$

نضرب الطرفين بـ $2e^{iz}$

$$\Rightarrow (e^{iz})^2 + 1 - 2a e^{iz} = 0$$

$$e^{iz} = \omega$$

$$\Rightarrow \omega^2 - 2a\omega + 1 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية لها حلان غير معدومين

نفرض أن $e^{iz} \neq 0$ ولأن جداء الجذور = الثابت وهو (1)

لا يوجد جذر صفري

يكون إما

الجذور (0)

AL SAMRAH

Subject: ______ / /

نحل المعادلتين $w_1 = e^{iz}$

$w_2 = e^{iz}$

وبهذا نجد جميع حلول المعادلة

* عن الطالب حل وتجربة حل معادلات تحوي $\sin$ او $\sin$ و $\cos$ معاً

* ملاحظة:

الناتج $\cos z$ غير محصور بالمجال $[-1,1]$ أي المستقر الشكلي هو $\mathbb{C}$ بكامله

مثال:

اوجد مجموعة تحليلية الدالة

$$f(z) = \frac{1}{\left(e^{2z} - (1+i)\right)\left(\cos z - i\right)}$$

الحل:

مجموعة تحليلية البسط هي $\mathbb{C}$

" " المقام هي $\mathbb{C}$

اذا مجموعة تحليلية الدالة هي $\mathbb{C}$ عدا اصفار المقام

لإيجاد اصفار المقام:

$$\left(e^{2z} - (1+i)\right)\left(\cos z - i\right) = 0$$

اما

$$e^{2z} - (1+i) = 0$$

$$\Rightarrow e^{2z} = 1+i$$

.كل المعادلة ينتج بعض الحلول «للطالب»

أو

$$\cos(z) - i = 0$$

$$\Rightarrow \cos(z) = i$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i$$

$$\Rightarrow (e^{iz})^2 - 2i e^{iz} + 1 = 0$$

$$w = e^{iz}$$

$$\Rightarrow w^2 - 2iw + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(1)$$

$$= -4 - 4 = -8$$

ليس بالضرورة أن يظهر لي عدد سالب مركب نحوله عن طريقة آخر حول أن نحول بكتابته كعدد مركب

$$\Rightarrow \delta = 2\sqrt{2}\, i$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{2i + 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$= \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}\right) i$$

$$= (1 + \sqrt{2})\, i$$

عدد تخيلي بحت

$$w_1 = (1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_2 = \frac{2i - 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$= (1 - \sqrt{2})\, i$$

عدد تخيلي بحت ولكن سالب

$$|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

$$w_2 = (\sqrt{2} - 1)\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Subject : / /

بالنسبة للحل الأول

$$w_1 = (1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وإن

$$e^{iz} = w_1 = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y}$$

⇒ بتعويض

$$e^{i(x+iy)} = (1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{ix-y} = (1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{-y}\cdot e^{ix} = (1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = (1+\sqrt{2}) \\ x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\ln(1+\sqrt{2}) \\ x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_k = x_k + iy$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\ln(1+\sqrt{2})$$

وبنفس الأسلوب نجد w_2

ملاحظة هامة جداً

بالنسبة لتمثيل التوابع الدكتور لن يشرح سوى التابع الأسي العقدي ويمكن للطالب استنتاج صورة التابع الجيب والتجيب « الدوال المثلثية العقدية » لأن بالإمكان ممكن أن يأتي سؤال عن صور وفق التوابع / الأسية أو اللوغاريتمية أو المثلثية /

صيغة صورة القطعة المستقيمة وفق تا ع
$\cos(z)$ هي قطع ناقص محرقيه

$$\cos z = \underbrace{\cos x \, ch\, y_0}_{u} - i \underbrace{\sin x \, sh\, y_0}_{v}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{(ch\, y_0)^2} + \frac{v^2}{(sh\, y_0)^2} = 1$$

قطع ناقص نصف قطره الكبير هو $ch\, y_0$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

+ أوجد مجموعة تعريف الـ tan
ومجموعة تعريف الـ cot
أي نوجد حل المعادلتين

$$\cos z = 0$$

$$\sin z = 0$$

صيغة حلول $\sin z = 0$ هي نفس حلول
$x = \pi k$ أي $\sin x = 0$
وحلول $\cos z = 0$ هي نفس حلول
$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ أي $\cos x = 0$

انتهى الحل

AL.SAMRAH

Scanned by CamScanner

Subject: / /

المحاضرة السادسة - الخميس

2016/3/31

$(\tan z)' = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$

$= 1 + \tan^2 z$

$(\cot z)' = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$

$= 1 + \cot^2 z$

- التوابع المثلثية القطعية العقدية

$ch(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{2n!} = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$sh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

وهي توابع دورية دورها $(2\pi i)$

«أثبتها»

+ بعض الخواص

$ch^2 z - sh^2 z = 1$

$(sh\, z)' = ch\, z$

$(ch\, z)' = sh\, z$

$than\, z = \dfrac{sh\, z}{ch\, z}$ دوره πi

$coth\, z = \dfrac{1}{than\, z}$

⊕ الفصل الثاني: التكامل العقدي

التكامل العقدي لتابع عقدي "مستقره عقدي"

- تكامل تابع عقدي بمتحول حقيقي

في حال كان يمكن تعريف نهاية واستمرار وقابلية اشتقاق تابع عقدي بمتحول حقيقي: $f(t) = u(t) + i\, v(t)$

كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي تابعين بمتحول حقيقي عند نقطة t_0 أو في مجال

سيكون الأمر مشابه لتلك المفاهيم بالتحليل الحقيقي

مبرهنات

① إن لـ f نهاية عند t_0 إذا وفقط إذا كان لكل من u و v نهاية عند t_0 وعندها

$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{t \to t_0} u(t) + i \lim_{t \to t_0} v(t)$

في حال لم يكن لـ u أو v نهاية عندئذ لا يوجد نهاية لـ f

AL SAMRAH

② : نقول إن f مستمر عند t_0 إذا وفقط إذا كان u و v مستمران عند t_0

- الاستمرار في مجال مفتوح هو الاستمرار في نقاطه الداخلية
- الاستمرار في مجال مغلق هو الاستمرار في المجال المفتوح والاستمرار في طرفي المجال واحد من اليمين والأخرى من اليسار.

③ : نقول عن f إنه قابل للاشتقاق عند t_0 "من داخل المنطقة" إذا وفقط إذا كان كل من u و v قابلتان للاشتقاق عند t_0 وعندها

$$f'(t_0)=u'(t_0)+i\,v'(t_0).$$

- قابلية الاشتقاق في المجال المفتوح هي قابلية الاشتقاق في كل نقاط المجال
- قابلية الاشتقاق في المجال المغلق أو الطرف مغلق هي قابلية الاشتقاق في المجال المفتوح وقابلية الاشتقاق عند الأطراف

④ : f قابل للمكاملة في المجال المغلق $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

إذا وفقط إذا كان كل من u و v قابلان للمكاملة في المجال $[a,b]$ وإن

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$$

- $\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \mathrm{Re}\,f(t)\,dt$
- $\mathrm{Im}\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \mathrm{Im}\,f(t)\,dt$

مثال:

$$\int_0^\pi e^{it}\,dt$$

$$=\int_0^\pi(\cos t+i\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi\cos t\,dt+i\int_0^\pi\sin t\,dt$$

$$=\left[\sin t\Big|_0^\pi\right]+i\left[-\cos t\Big|_0^\pi\right]$$

$$=[0-0]+i\,[-(-1)-(+1)]$$

$$=-2i$$

* التابع الأصلي:

نقول عن تابع كيفي $F(t)=U(t)+iV(t)$ إنه تابع أصلي لتابع $f(t)=u(t)+iv(t)$ في المجال I إذا

$$F'(t)=f(t)\quad\forall t\in I$$

نقول عن F السابق تابعاً أصلياً لـ f في I إذا كان

U تابع أصلي لـ u في I

و V تابع أصلي لـ v في I

- f مستمر على المجال $I = [a,b]$

$\Leftarrow$ f قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$

العكس غير صحيح بالضرورة أي من الممكن ايجاد تابع كمول على $[a,b]$ وغير مستمر كلية

- اذا كانت f تابعا مستمرا على $[a,b]$ وكان F تابعا اصليا لـ f على $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

مثال:

$$\int_0^\pi e^{i\pi}\,dt$$

$$= \frac{e^{it}}{i}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{i}\left(e^{i\pi} - e^{i0}\right)$$

$$= (-i)(-1-1) = 2i$$

خواص التكامل لتابع عقدي بمتحول حقيقي مشابهة لخواص التكامل الحقيقي

تابع عقدي بمتحول حقيقي

$$f: t \longrightarrow f(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$|f|: t \longrightarrow |f(t)|$$

تابع حقيقي بمتحول حقيقي

$f(t)$: عقدي

$|f(t)|$: حقيقي

اذا كانت $|f(t)|$ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ فإن $f(t)$ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ وايضا

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

يمكن بالمثال $\int_0^\pi e^{i\pi}\,dt$

$$|2i| = 2$$

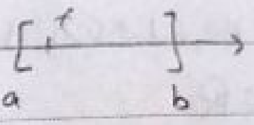
$$\int_0^\pi |e^{it}|\,dt = \pi$$

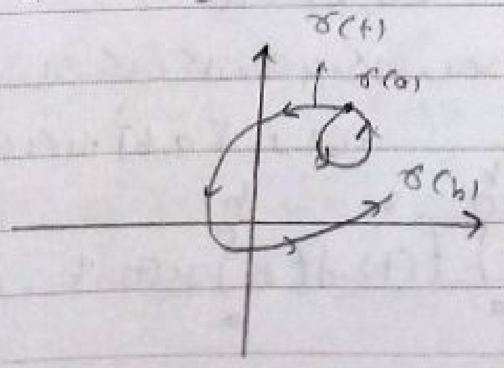
$$2 \le \pi \approx 3.14$$

- التكامل العقدي بمتحول عقدي

المنحني العقدي الموجه "Γ"

هو منحني في مستوي عقدي أي هو مجموعة النقاط النسبية في المستوي العقدي التي تمثل $\gamma(t)$ لتابع عقدي مستمر على مجال مغلق $[a,b]$ أي هو مسار $\gamma(t)$ عندما تمسح t المجال $[a,b]$ من a الى b





Subject : / /

نقول إن. منحني γ موجه ومغلق تزايدي في الوسيط

إذا كان $\gamma(b)=\gamma(a)$ فإننا نقول عن المنحني

إنه مغلق وإلا إنه مفتوح

- إن مرور $\gamma(t)$ من نقطة ما أكثر من مرة يعني

أن هذه النقطة هي من نقاط ~~[illegible]~~

المنحني مساوي لعدد مرات مرور $\gamma(t)$ منها

نسمي γ تمثيلاً وسيطياً لـ Γ

إذا كان

$$\gamma(t)=x(t)+iy(t)$$

فإننا نسمي المعادلتين

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$ معادلتين وسيطيتين لـ Γ

وللحصول على المعادلة الديكارتية لـ Γ نحذف الوسيط t من المعادلتين..

[illegible]

+ تذكير: في نهاية الكاملة الراسية

$$\boxed{\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$$

أثبت أن:

$$\sin z=\sin x\,ch\,y+i\cos x\,sh\,y$$

$$\sin z=\sin(x+iy)$$

$$=\sin x\cos iy-\cos x\sin iy$$

$$=\sin x\cdot\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}+\cos x\cdot\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}$$

$$=\sin x\cdot\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}+\cos x\cdot\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}(i)$$

$$=\sin x\cdot ch\,y+\cos x\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}(i)$$

$$=\sin x\cdot ch\,y+i\cos x\cdot sh\,y$$

أوجد جذور المعادلة التالية

حل $e^{2z}=1+i$

$$e^{2x+2iy}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} e^{2x}=\sqrt{2}\Rightarrow 2x=\ln\sqrt{2} \\ 2y=\frac{\pi}{4}+2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=\frac{1}{2}\ln(2)\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(2) \\ y=\frac{\pi}{8}+\pi k \end{cases}$$

$$z_k=\frac{1}{4}\ln(2)+iy_k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

حل $\cos z=i$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=i\Rightarrow(e^{iz})^2-2ie^{iz}+1=0$$

$$w=e^{iz}$$

$$\Rightarrow w^2-2iw+1=0$$

$$\Delta=-8\Rightarrow\delta=2\sqrt{2}\,i$$

AL.SAMRAH

$$w_1 = \frac{2i + 2\sqrt{2}\,i}{2} = (1+\sqrt{2})i$$

$e^{iz} = (1+\sqrt{2})i$ | $r = \sqrt{0+(1+\sqrt{2})^2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$e^{iz} = (1+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}}$

$e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}.e^{ix}$

$\begin{cases} e^{-y} = (1+\sqrt{2}) \Rightarrow y = -\ln(1+\sqrt{2}) \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad ; \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow w_{1k} = x_k - i\ln(1+\sqrt{2}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$w_2 = (1-\sqrt{2})i$ | $\left|\sqrt{0+(1-\sqrt{2})^2}\right| = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

$e^{-y}.e^{ix} = (\sqrt{2}-1)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} y = -\ln(\sqrt{2}-1) \\ x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$w_{2k} = x_k + i\ln(\sqrt{2}-1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

مجموعة حلول المعادلة f هي

$\{z_k, w_{1k}, w_{2k}\}$.

المحاضرة السابعة - [illegible]

6 / 9 / 2016

+ Γ منحنٍ عقدي موصل $\Longleftrightarrow$ وجود تطبيق عقدي γ مستمر من المجال المغلق $[a,b]$ بحيث تمسح $\gamma(t)$ المنحني Γ عندما تمسح t المجال $[a,b]$ من a إلى b.

+ يسمى (γ) تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به لـ Γ

+ نسمي $\gamma(a)$ بداية Γ و $\gamma(b)$ نهايته

+ نقول إن (γ) موجه وفق تزايد الوسيط t

+ إذا كانت $\gamma(a) = \gamma(b)$ نقول عن منحني "Γ" إنه مغلق وإلا نقول إنه مفتوح

+ إذا كانت $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ فإننا نسمي المعادلة
معادلتين وسيطيتين لـ Γ $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$
بحذف "t" نحصل على معادلة المنحني.

+ نقول عن نقطة M من المستوي العقدي إنها نقطة من Γ أو إنها واقعة على "Γ" أو "Γ" يمر منها إذا وجد $t \in [a,b]$ بحيث يكون $\gamma(t) = M$ ونسمي t إنه "قيمة الوسيط الموافقة لـ M"

+ إذا كانت $\gamma^{-1}(\{M\}) = \varnothing$ أي لا توجد t تحقق العلاقة $\gamma(t) = M$ وهنا Γ لا يمر منها M

γ ليس تقابل وهنا γ^{-1} ليس تابع عكسي بل هو الصورة العكسية

+ إذا كانت $\gamma^{-1}(\{M\}) = \{t_1, t_2, \dots t_n\}$ فإننا نميز الحالات التالية

Subject: ______ / /

← $n=1$ وحيد $\gamma^{-1}(\{M\}) = t_1$
أي M نقطة بسيطة من المنحني Γ في التمثيل γ

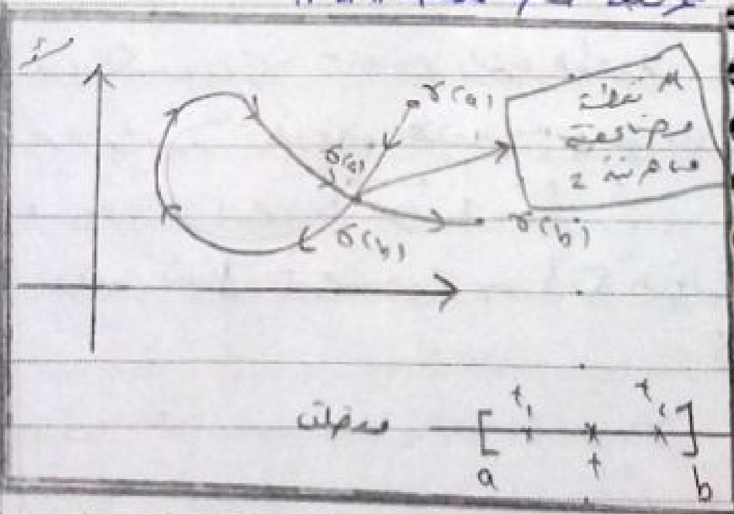
← $n \geq 2$ نقول عن M إنها نقطة مضاعفة من الرتبة m لـ Γ بالتمثيل γ .

ـ توجيه منحني: نقول إن $\gamma(t_1)$ قبل $\gamma(t_2)$ "أو Γ يمر من $\gamma(t_1)$ قبل $\gamma(t_2)$" إذا كانت $t_1 < t_2$

"لذلك قلنا إنه موجود نقاط تقع ..."

في حال $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ و $t_1 \neq t_2$
أي إن Γ يمر مع الوقت مرتين من $\gamma(t_i)$ $i=1,2$

"إذا كانت M نقطة مضاعفة من Γ من الرتبة m .
فإننا نفرض عدداً من تقاطع Γ مساوياً لمرتبة تضاعفها "m"



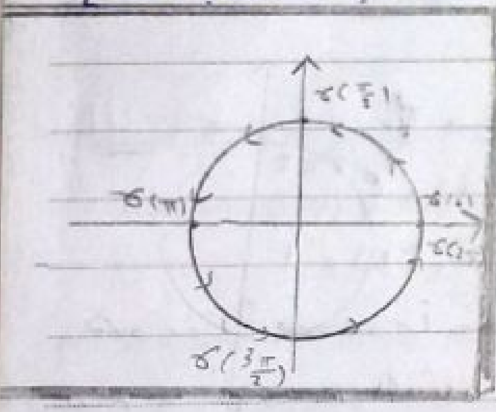
نقول عن منحني Γ إنه في مجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ إذا كانت مجموعة نقاط محتواة في A

مجموعة نقاط لا يهم الترتيب ويمنع التكرار
مجموعة منحني يهم الترتيب دون التكرار

مثال:

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = e^{it}$$

إنه تمثيل منحني عقدياً موجهاً يعني $\gamma(t) = e^{it}$ مستمر على $[0, 2\pi]$ ومعرفة بما أنه مستمر فهو يمثل منحني ~~...~~
المنحني هو الذي نحصل عليه من عملية مسح t المجال $[0, 2\pi]$



$|\gamma(t)| = 1$
$= |e^{it}|$
$\forall t \in [0, 2\pi]$
$\Leftarrow$ $\gamma(t)$ تقع بدائرة الواحدة

$\gamma(0) = e^{i0} = 1$ بداية المنحني
$\gamma(2\pi) = e^{i2\pi} = 1$ نهاية المنحني
وهذا المنحني مغلق
وواضح أن $\arg(\gamma(t)) = t$
"لم نأخذ القيمة الرئيسية لأنه المجال هنا $[0, 2\pi]$"

$\Leftarrow$ $\gamma(t)$ تقع على دائرة الواحدة وزاويتها t عندما t تمسح المجال من 0 حتى 2π فإن $\gamma(t)$ تمسح دائرة الواحدة مرة واحدة فقط دون انقطاع وبالاتجاه الموجب "عكس دوران عقارب الساعة"

انطلاقاً من $z=1$

ملاحظة "مراجعة"

يمكن التحويل إلى $x(t)=\cos t$

$y(t)=\sin(t)$

$\Rightarrow x^2+y^2=1$

ومنه صامك المنحني هو دائرة الواحدة

أي أن Γ هو دائرة الواحدة ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=1$ ويسمى "γ" تمثيلاً وسيطياً ممسوحاً به لـ Γ.

مثال:
$\gamma_1:[0,1]\to\mathbb{C}$

$t\mapsto \gamma_1(t)=e^{i2\pi t}$

$\gamma_1(0)=1 \quad , \quad \gamma_1(1)=1$

هو تمثيلاً ممسوحاً به لـ "Γ" السابق لأنه يمسح نفس المنحني

ملاحظة: يمكن للمنحني "Γ" أن يكون له أكثر من تمثيل

مثال:
$\gamma_2:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$

$\gamma_2(t)=e^{it}$

يمثل دائرة الواحدة ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=-1$

إذاً γ_2 تمثيلاً غير ممسوح به لـ "Γ" السابق

"لأن ليس له نفس نقطة البداية والنهاية"

مثال:
$\gamma_3(t):[0,2\pi]\to\mathbb{C}$

$t\mapsto \gamma_3(t)=e^{-it}$

هذا مستمر وحقوياً ومنه يمثل منحني

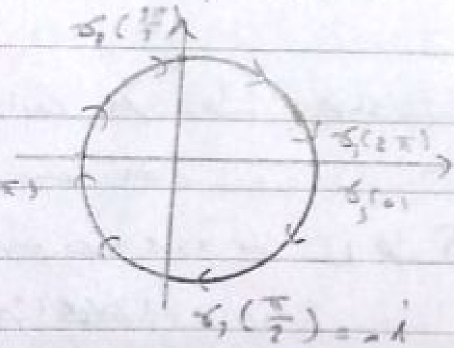
$|\gamma_3(t)|=1 \quad \forall t\in[0,2\pi]$

وبالتالي فإن نقاط المنحني تقع على دائرة الواحدة دائماً

$\arg\gamma_3(t)=-t$

إذا مسحت t المجال من 0 إلى 2π فإن $\gamma_3(t)$ سيقطع المنحني من 0 إلى -2π

$\gamma_3(0)=1 \quad , \quad \gamma_3(2\pi)=1$



وبالتالي $\gamma_3(t)$ سيقطع دائرة الواحدة مرة واحدة بالاتجاه السالب "مع عقارب الساعة" انطلاقاً من $z=1$

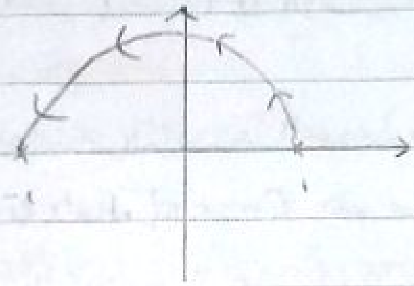
وهو تمثيل غير ممسوح به لـ "Γ" السابق

مثال:

$\gamma_4 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$

$t \mapsto \gamma_4(t) = e^{it}$

هذا يمثل نصف الدائرة العلوي "دائرة الواحدة" ممسوحاً مرة واحدة من النقطة $z=1$ الى النقطة $z=-1$



منحنى مفتوح
بدايته 1
نهايته -1

ملاحظات:

+ قد يكون لتمثيلين مختلفين المجموعة النقطية ذاتها ولكنهما يمثلان منحنيين مختلفين
γ و γ_2

+ اذا كان لمنحنيين تمثيلين وسيطين مختلفين مسموح بهما "مقبولان" فإن المجموعة النقطية للتمثيل الأول تساوي المجموعة النقطية للتمثيل الثاني

مثال:

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

جميع هذه التمثيلات لها ذات المجموعة النقطية. وهي دائرة الواحدة لكن

γ و γ_2 يمثلان منحنيين مختلفين

γ: دائرة الواحدة ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=1$

γ_2: دائرة الواحدة ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه السالب انطلاقاً من $z=1$

ملاحظة

إذا كانت مجموعة نقطية لتمثيل ما مختلفة عن المجموعة النقطية لتمثيل آخر فإن التمثيل الأول يمثل منحنياً مختلفاً عن المنحني الذي يمثله التمثيل الثاني

γ و γ_4

منحنيات مختلفة لأن المجموعات النقطية مختلفة

مثال

$\gamma_5 : [0,4\pi] \to \mathbb{C}$

$t \mapsto \gamma(t) = e^{it}$

يمثل دائرة الواحدة الممسوحة مرتان بالاتجاه الموجب انطلاقاً من $z=1$

انتهت المحاضرة

المحاضرة التاسعة - الخميس

2016/4/7

تعريف: "المنحني البسيط"

+ نقول عن منحني Γ انه بسيط إذا لم يقطع نفسه أي إذا لم يمر بأي نقطة من نقاطه أكثر من مرة واحدة إذا كان مفتوحاً

+ نقول عن المنحني Γ إنه بسيط إذا كانت جميع نقاطه بسيطة باستثناء نقطة بدايته يمكن أن تكون مضاعفة من المرتبة الثانية "إذا كان مغلق"

- إذا كان لـ Γ تمثيل

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

+ نقول عن Γ بسيط $\Leftrightarrow$ γ متباين في $[a,b]$ إذا كان Γ مفتوحاً

+ نقول عن Γ بسيط $\Leftrightarrow$ γ متباين في $]a,b]$ إذا كان Γ مغلقاً

مثال:

دائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة "بالاتجاه الموجب أو السالب" هي منحني مغلق بسيط

$$\gamma(t) = e^{it}$$

متباين على المجال $]0,2\pi]$

+ نقول عن منحني Γ إنه من الصف C' إذا كان أحد تمثيلاته الوسيطية المسموح بها وليكن

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

إذا كان γ قابل للاشتقاق باستمرار "أي إنه قابل للاشتقاق ومشتقه مستمرة"

مثال:

دائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة في المجال $[0,2\pi]$ هو منحني من الصف C'

$\gamma(t)=e^{it} \Rightarrow \gamma'(t) = ie^{it}$ مستمر

+ نقول عن منحني Γ إنه من الصف C' "قطعياً" أو "بالتقطيع" إذا وجد تمثيل

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

لـ Γ

ووجدت تجزئة منتهية

$$\{a=t_0<t_1<t_2<\dots t_n=b\}$$

للمجال $[a,b]$ بحيث تكون التوابع

$$\gamma\big|_{[t_{i-1},t_i]} \quad i=1,2,\dots n$$

من الصف C'

"العكس غير صحيح بالضرورة"

كل منحني من C' هو من C' قطعياً

Subject : / /

تعريف: "المنحنى الأملس"

نقول عن منحنى Γ إنه أملس إذا كان أحد تمثيلاته وليكن γ حيث

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

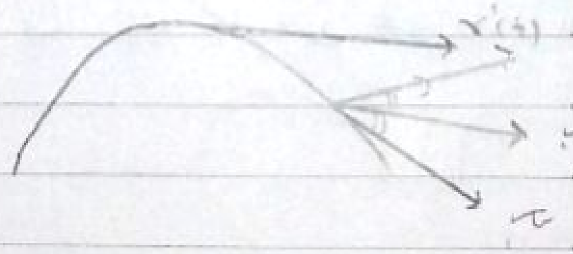
محققاً الشروط التالية

[1] «γ» قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر على $[a,b]$ "أي من الصنف C^1"

[2] $\gamma'(t) \neq 0$ أيا كانت t من المجال $[a,b]$

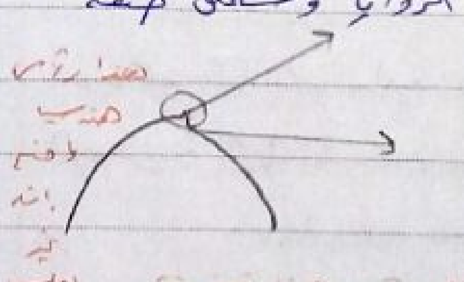
[3] متباين على المجال $[a,b]$ إذا كان Γ مفتوحاً و متباين على المجال $]a,b]$ إذا كان Γ مغلقاً

حيث $\gamma'(a) = \gamma'(b)$



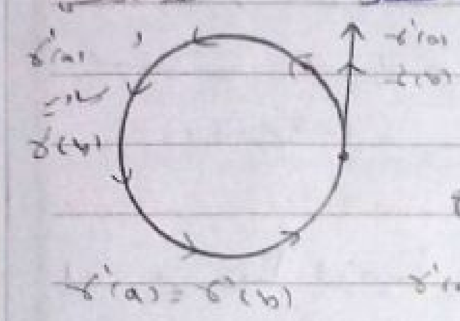
عندما اشترطنا أن مستمر «المشتق» أي أن المماس يمسح الزوايا جميعها أما لو كان المشتق غير مستمر المماس سوف يقفز متخطياً عن الزوايا ويستحيل صفة "الملاسة"

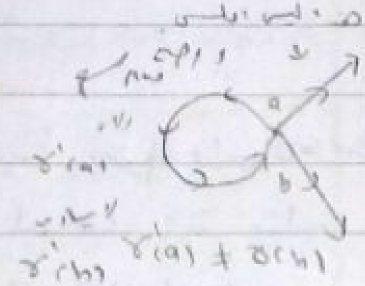
عندما اشترطنا أن المشتق لا ينعدم أي يوجد مماس في كل نقطة



المشتق هنا غير مستمر من المماس الأول إلى الثاني

معنى الاستمرار: أي المماس يتبع بدورانه دون قفز





مثال:

دائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه السالب هي منحنى أملس

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = e^{-it}$$

مهما كانت نقطة الانطلاق ستبقى منحنى أملس

الحل:

① إن γ مشتق ومستمر على $[0,2\pi]$

$(e^{-it})' = -ie^{-it}$

② $\forall t \in [0,2\pi] : -ie^{-it} \neq 0$

③ γ متباين على المجال $]0,2\pi]$

$\gamma'(0) = -ie^{-i(0)} = -ie^{-i(2\pi)} = \gamma'(2\pi)$

$\Rightarrow \gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$

ومنه الدائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه السالب منحنى أملس

مثال: دائرة الواحدة الممسوحة أكثر من مرة ليست منحنى أملس لأنه لا يكون لها أي تمثيل متباين لكنها منحنى أملس قطعاً

Subject : / /

ملاحظة واصطلاح:

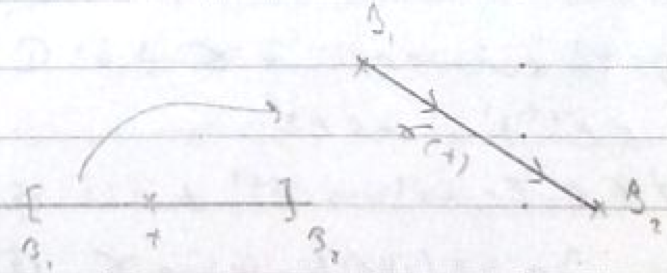
كلما نذكر منحنى دون ذكر مرات تكرار مسيره أي إنه ممسوح مرة واحدة (اصطلاحاً).

ملاحظة واصطلاح للامتحان.

إذا مر معنا لاحقاً تمرين وارد فيه السؤال منحني قطعة مستقيمة لبرهان إنه تمثيله ممسوح ... ولا داعي لبرهان ملاسته "إلا إذا طُلب ذلك" بل نستطيع استخدام أي منحني ثم دراسته ملاسته.

مثال: "ممسوح مرة واحدة لانه لم يذكر عدد مرات مسحه"

أي قطعة مستقيمة موجهة من أحد طرفيها إلى الآخر هي منحني أملس



إن التمثيل الوسيطي للقطعة السابقة هو

$\gamma(t) = (1-t)B_1 + tB_2$

$0 \le t \le 1$.

ملاحظة:

لو لم نحدد قيم t ولم نحدد ... لكان التمثيل المستقيم الذي يمر من B_1 و B_2

$\gamma'(t) = B_2 - B_1$

$\gamma'(t) \neq 0$

لأن $B_1 \neq B_2$

~~...~~ منحني

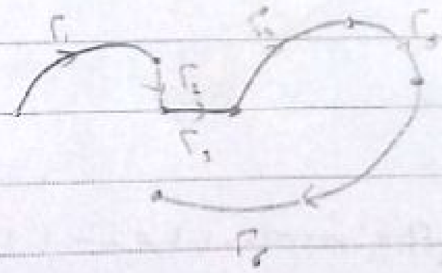
$\forall t \in [0,1]$ ومستمرة ومنتظمة وموجهة.

* المنحني الأملس قطعياً

نقول عن منحني Γ إنه أملس قطعياً إذا كان ناتجاً عن متتالية منتهية من المنحنيات الملساء ولتكن

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$

بحيث نهاية كل منها هو بداية الذي يليه



والدلالة على ذلك نكتب

$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$

هنا مجموع المسارات بمعنى وصل

إن بداية Γ هي بداية Γ_1 ونهاية Γ هي نهاية Γ_n

+ إذا كان Γ منحنياً ممثلاً بـ

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

فإن التابع

$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$

$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$

يمثل المنحني Γ وفق الاتجاه المعاكس.

مثال:

دائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب.

$$\gamma(t) = e^{it}$$

$$\gamma^-(t) = e^{i(0+2\pi-t)} = e^{i(2\pi-t)} = e^{i2\pi - it} = e^{i2\pi}\cdot e^{-it}$$

$\gamma^-(t) = e^{-it}$ يمثل المنحني Γ^- وهو دائرة الواحدة ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه السالب

أمثلة هندسية

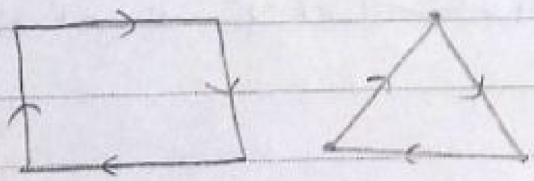
+ الدائرة الممسوحة أكثر من مرة ليست منحني أملس ولكنه أملس قطعياً "هي مجموع المنحنيات الملساء أي مجموع الدوائر الممسوحة مرة واحدة"

+ الدائرة الممسوحة مرة واحدة ونصف المسح المطلوب ممسوح مرتين ليست منحني أملس لكنه منحني أملس قطعياً "لأنه هو مجموع الدائرة الممسوحة مرة واحدة و نصفها المطلوب"

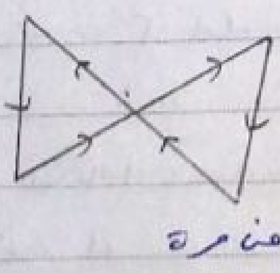
+ القطع الناقص الممسوح أكثر من مرة ليس منحني أملس لكنه منحني أملس قطعياً "هو مجموع القطوع الناقصة الملساء"

+ أي قوس محدود من قطع مكافئ: هو أملس ممسوح مرة واحدة

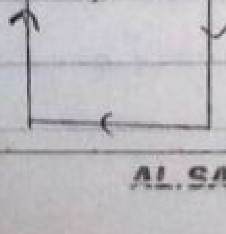
+ أي مضلع محدود كالمثلثات والمستطيلات هي منحنيات ملساء قطعياً



+ هذا المنحني ليس أملس لكنه أملس قطعياً لكن يجب ألا نمر بالنقطة أكثر من مرة



+ وأيضاً هذا مثل السابق



Subject :

/ /

* الطريق :

نقول عن منحني Γ انه طريق إذا كان أحد تمثيلاته المسموح بها منتظماً أي "ذات مشتق محدود" ويسمى التغير الكلي له بطول هذا الطريق

مبرهنة:

إذا كان Γ منحني أملس و

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$

تمثيلاً مسموح به.. فإن Γ هو طريق وان طول يعطى بالمساواة

$\ell(\Gamma) = \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

ملاحظة:

هنا لو أخذنا تمثيلاً آخر سيبقى الطول ثابت.

ملاحظة:

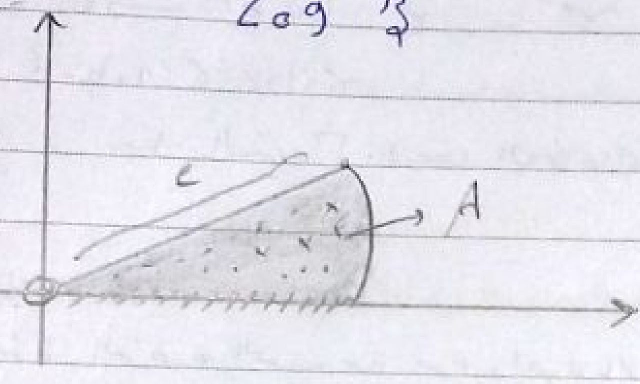
التعريف والمبرهنة السابقتين تبقيان صحيحتين إذا كان Γ أملس قطعياً. لكن الفرق هو

"أن التكامل: عندما يكون Γ أملس قطعياً سيكون المشتق غير موجود أو موجود ولكن غير مستمر وبالتالي التكامل سيكون معتل من النوع الثاني لكنه متقارب أي له قيمة...

تمرين: عين صورة القطاع

$A = \{ z \in \mathbb{C} ; 0 < |z| \le e \wedge 0 < \mathrm{Arg}\, z \le \frac{\pi}{6} \}$

وفق تابع $\mathrm{Log}\, z$ ← اللوغاريتم الرئيسي



$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

$u = \ln|z|$

$v = \mathrm{Arg}\, z$

$0 < |z| \le e \Rightarrow -\infty < \ln|z| \le 1$

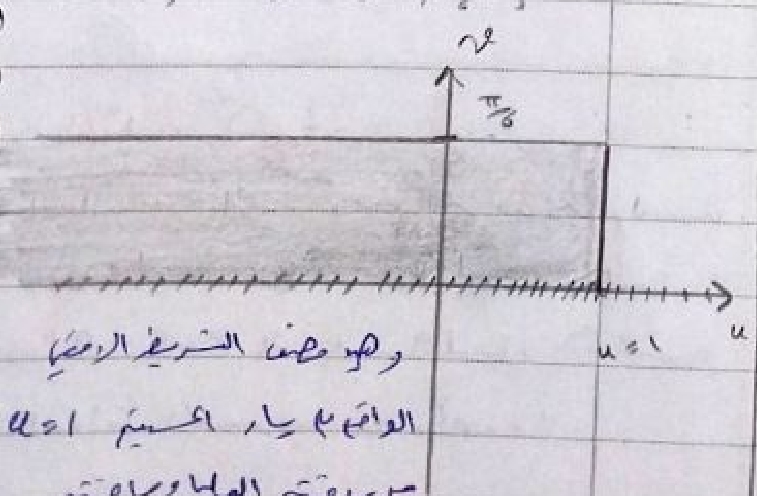
$-\infty < u \le 1$

يقع على يسار المستقيم $u=1$

$0 < v = \mathrm{Arg}\, z \le \frac{\pi}{6}$

أي الصورة هي الشريط الأفقي

$]-\infty, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{6}]$



وهو نصف الشريط الأفقي الواقع على يسار المستقيم $u=1$ مع حافته العليا وحافته اليمنى دون حافته الدنيا.