مثال (3.32)

ليكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ فإن:

1) المجموعة $\beta_1=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

2) المجموعة $\beta_2=\{\{a\},\{b\}\}$ لا تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

مثال (3.33)

في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، تعتبر τ أساس (قاعدة) لنفسها.

مثال (3.34)

إذا كـان (X,τ) الفضـاء التوبولـوجي المتقطـع علـى المجموعـة X، فـإن المجموعة $\beta=\{\{x\}:x\in X\}$ تكون اساس (قاعدة) للتوبولوجي المتقطع.

مثال (3.35)

في فضاء التوبولوجي الإقليدي (R,τ) على الأعداد الحقيقية، مجموعة كل الفترات المفتوحة تشكل اساس (قاعدة) للتوبولوجي الإقليدي ، وذلك لأنه لأي مجموعة مفتوحة $H\in\tau$ و لأي نقطة $p\in H$ توجد فترة مفتوحة $I=(p-\varepsilon,p+\varepsilon)$، بحيث يكون $p\in I\subseteq H$.

امثله :من كتاب تبولوجيا بدون دموع ٦-٢-٢ و٧-٢-٢ هام جدا جدا خرج امتحان .

تحت القاعده او القاعدة الجزئيه :تعريف وامثله :

تعريف (3,13)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً ، العائلة $S \subseteq \tau$ تسمى قاعدة جزئية (أو أساساً جزئياً) للتوبولوجي τ إذا كانت العائلة الناتجة من تقاطعات منتهية لعناصر من S تشكل أساس β للتوبولوجي τ .

وهذا يعني أن كل عنصر أساس B من عناصر الأساس β عبارة عن تقاطع لعدد منتهٍ من عناصر S مع الأخذ في الاعتبار أن التقاطع الخالي يعطى المجموعة X.

مثال (3,39)

إذا كانـــت $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ فـــإن العائلـــة $S=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ تشـكل قاعـدة جزئيـة للتوبولـوجي τ. بأخـذ تقاطعـات عناصر S لإيجاد القاعدة β كما يلي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{b\}\cap\{b\}=\{b\}\ ,\ \{a\}\cap\{b\}=\phi$$

العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ أساس للتوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

مثال (3,40)

هل العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$.

الحل

التقاطعات المنتهية لعناصر العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ كالتالي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{c\}\cap\{c\}=\{c\}\ ,\ \{a\}\cap\{c\}=\phi$$
$$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\}\ ,\ \{a,b\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{a,b\}\cap\{c\}=\phi$$

واضح أن العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ أساس للتوبولوجي τ . إذاً S هي أساس جزئي لهذا التوبولوجي.

مثال (3,41)

في الفضاء التوبولوجي المنفصل (X,D)، العائلة $S=\{\{a,b\}:a,b\in X\}$ اساس جزئي للتوبولوجي المتقطع (القوي) D على X. ولتوضيح ذلك نفرض أن $X=\{a,b,c\}$. التوبولوجي المتقطع يأخذ الصورة

$$D=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

فإن العائلة $S=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي D.

لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ والتي تعتبر اساس للتوبولوجي D على X.

مثال (3,42)

العائلة $S=\{(-\infty,b),(a,\infty):a,b\in R\}$ تعتبر اساس جزئي للتوبولوجي u على مجموعة الاعداد الحقيقية R وذلك لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,\infty):a,b\in R,a<b\}$ و هي أساس للتوبولوجي u على R.

نختتم موضوع الاساس و الأساس الجزئي بتعريف نوع خاص من الفضاءات التوبولوجية يسمى بالفضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional) و هذا الفضاء سيرد ذكره فيما بعد عند دراسة موضوع الفضاءات الغير مترابطة .

تعريف (3,14)

الفضاء التوبولوجي الذي عناصر أساسة أو أساسه الجزئي عبارة عن مجموعات مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت يسمي فضاء بعده صفري أو فضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional).

أمثلة

كل فضاء من الفضاءات التالية هو فضاء ذو بعد صفري:

(1) الفضاء المتقطع و الفضاء الغير متقطع.

(2) كل فضاء توبولوجي (X,τ) بحيث أن $A\in\tau \Leftrightarrow A^c\in\tau$ هو فضاء بعده صفري.