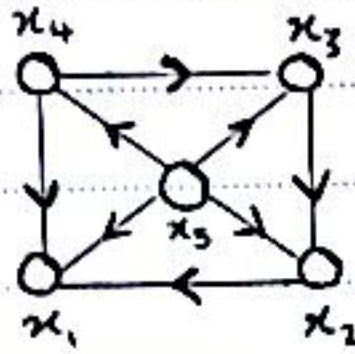
المحاضرة الخامسة 3/4/2016

المدخلات على البيانات الموجهة:

وظيفة: أوجد مدخلات البيان الموجه البسيط:

مثال: ليكن لدينا البيان الموجه التالي $\vec{G}=(V;\vec{E})$



أوجد مدخلاته ؟

ملاحظة:

$deg^+(x_1) = 0$

أي عدد الأضلاع الخارجة من العقدة $x_1 = 0$

$deg^-(x_1) = 3$

أي عدد الأضلاع الداخلة للعقدة $x_1 = 3$

$deg^+(x_4) = 2$

$deg^-(x_4) = 1$

تشاكل البيانات البسيطة:

تعريف: ليكن لدينا البيانين البسيطين $G_1=(V_1;E_1)$, $G_2=(V_2;E_2)$ يكون البيانان متشاكلان, إذا تحقق مايلي:

1) $V_1 \equiv V_2$ (عدد العقد بالأول يساوي عدد العقد بالثاني)

2) $|E_1| = |E_2|$

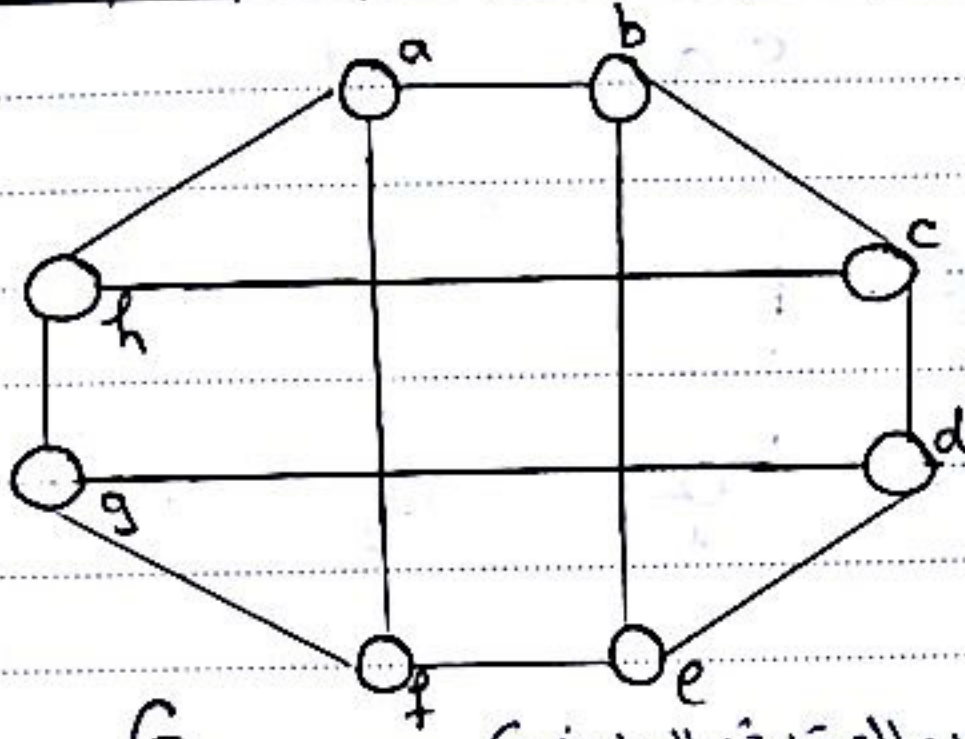
3) $\forall v_1 \in V_1$, $deg(v_1)=\alpha \Rightarrow \exists u_1 \in V_2$; $deg(u_1)=deg(v_1)$

- العقد المتجاورة في البيان الأول تقابلها عقد متجاورة في البيان الثاني

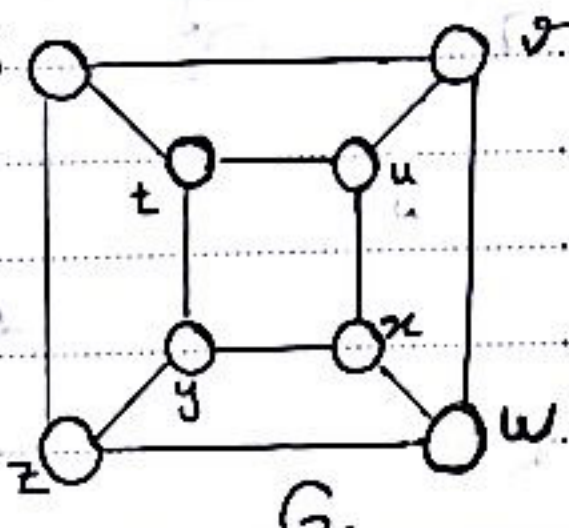
أمثلة:

بين فيما إذا كان البيانين التاليين متشاكلين G_1, G_2 ؟

سؤال دورة سابقة



G_2



G_1

- عدد العقد في البيان G_1 = 8 = عدد العقد في البيان G_2
- عدد الأضلاع في البيان G_1 = 12 = عدد الأضلاع في البيان G_2

أي أن:

$|V_1| = |V_2|$ ①

$|E_1| = |E_2|$ ②

(S تقابل a) $a \longrightarrow S$

$b \longrightarrow t$

$c \longrightarrow u$

$d \longrightarrow v$

$e \longrightarrow w$

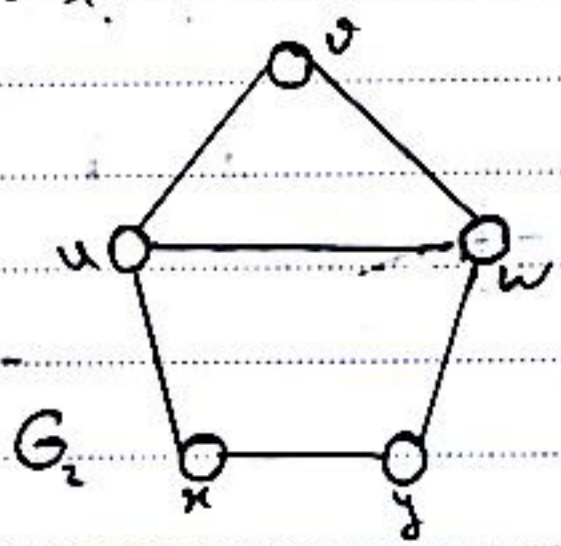
$f \longrightarrow x$

$g \longrightarrow y$

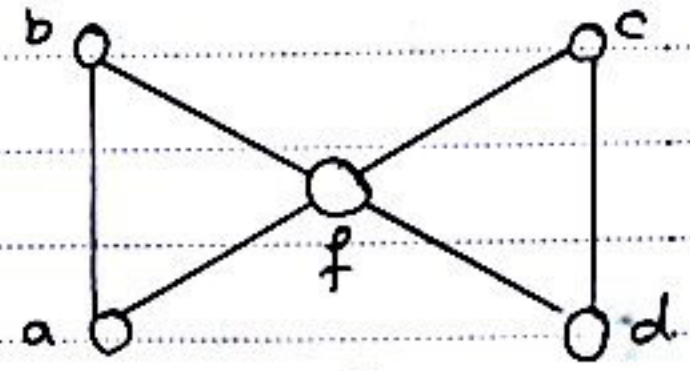
$h \longrightarrow z$

لزوم التناظر بين العقد يلزم عدة حالات مع اهمال الأسهل

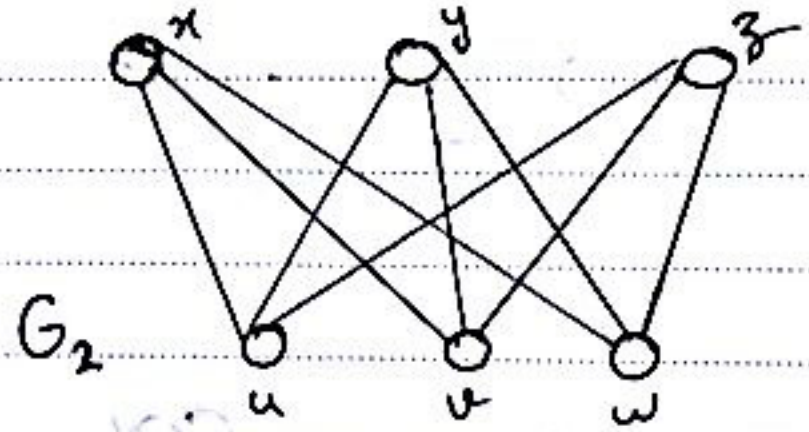
تمارين: بين فيما إذا كانت البيانات التالية متماثلة أو عدم التماثل بين العقد "isomorphic graph"

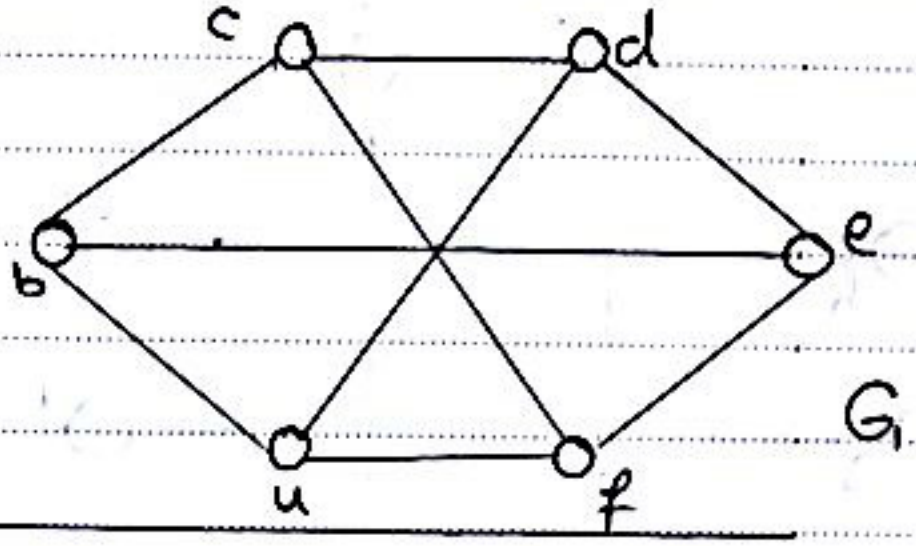


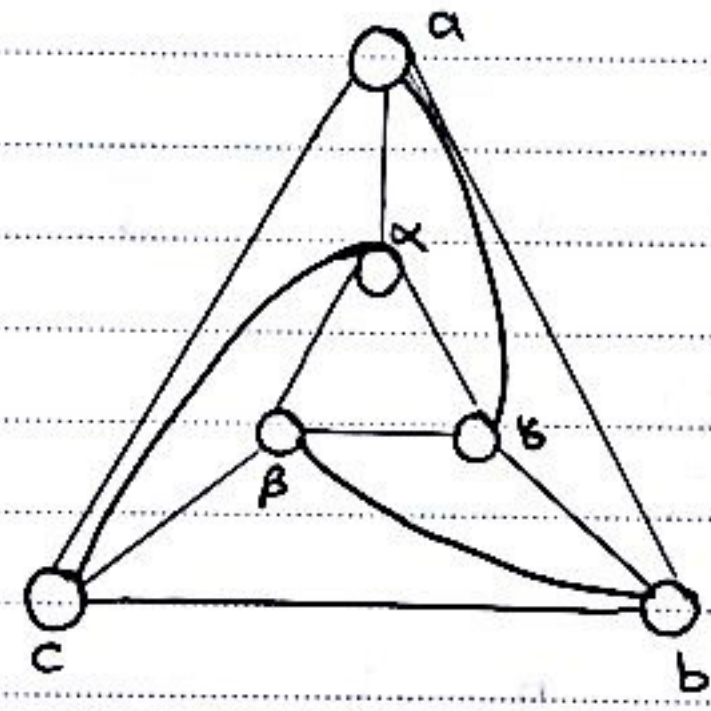
G_2

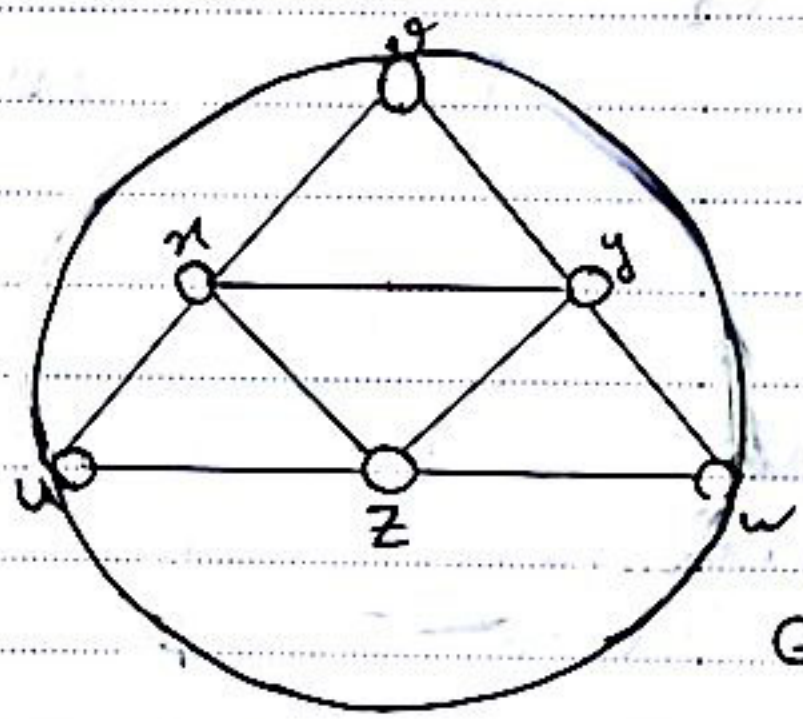


G_1









وظائف:

تعريف: ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ حيث $V=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$

$e=(v_i, v_j) \in E \iff$ أ و ن أ و ليان ضمان بزوجا

ارسم هذا البيان

سؤال: أوجد عدد رؤوس التشكل في البيانات المرفقة؟

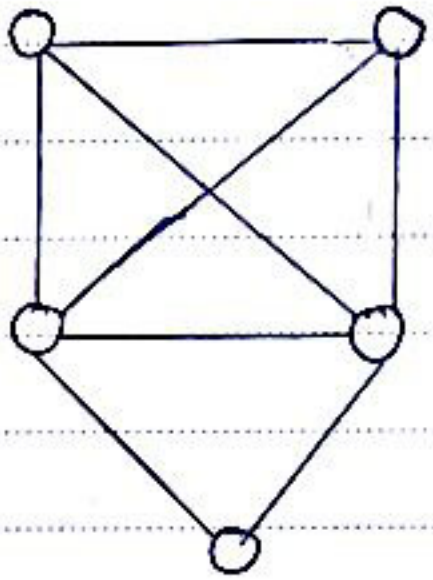
/ /

مبرهنة: ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ حيث $|V|=n \quad ; n \geq 2$
أثبت أن البيان G يحوي عقدتين بنفس الدرجة.

- من أجل $n=2$ ، $|V|=2$ فإن البيان

فيه x, y لهما نفس الدرجة

- (على الأقل يوجد عقدتان لهما نفس الدرجة)

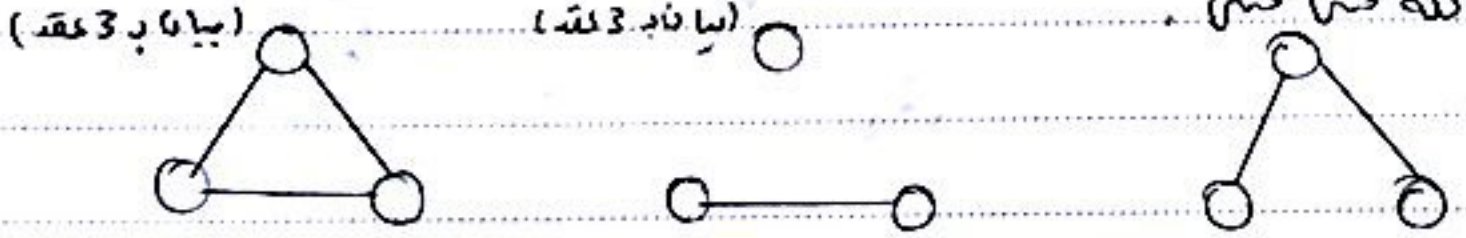


ملاحظة/توجيه الإثبات/:

$$\forall x \in V \quad : deg(x) \leq n-1$$

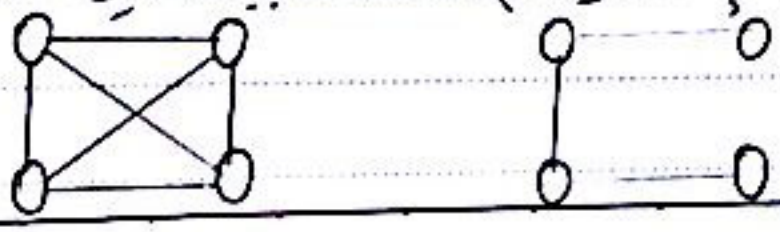
مبرهنة: أثبت أن البيانات البسيطة التي عدد عقدها ثلاث تحوي أربع بيانات غير متشاكلة مثنى مثنى.

(بيان بـ 3 عقد) (بيان بـ 3 عقد)



" نضع كل البيانات الممكنة يوجد بينهم على الأقل أربع بيانات غير متشاكلة "

وإذا كان البيان يحوي أربع عقد فإنه يوجد (11) بيان غير متشاكل



/ /

البيانات الموجهة المتناظرة :

Symmetric Direction Graph

Sym. D-graph

بتعريف : ليكن لدينا البيان البسيط الموجه $\vec{G}=(V;\vec{E})$ ، عندئذٍ نقول عن البيان إنه تناظري ، إذا حقق ما يلي :

$$\forall u,v \in V \quad , \quad \vec{e}=[u,v] \in \vec{E} \Rightarrow$$
$$\vec{e'}=[v,u] \in \vec{E}$$

($\vec{e'}$ التوسع الثاني للتوسع $\vec{e}$)

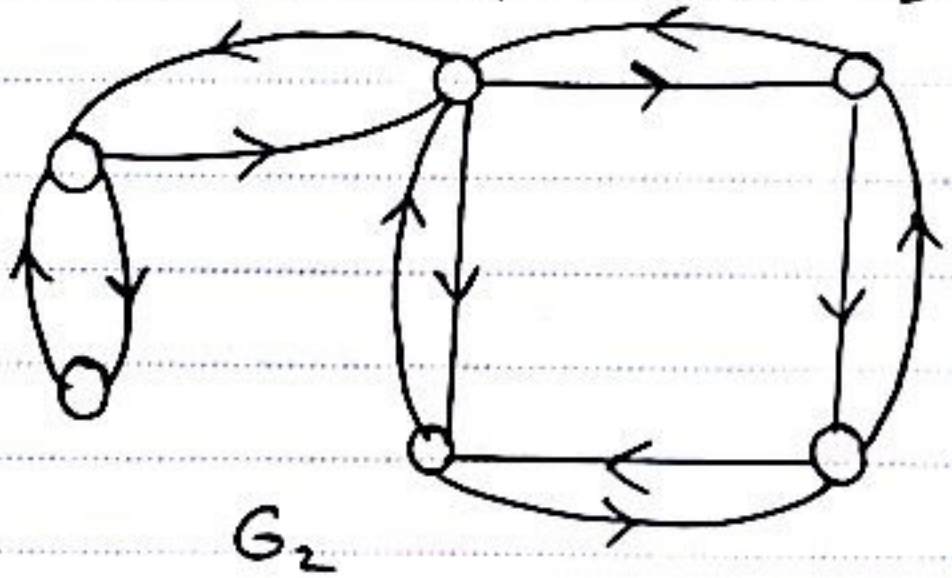
مثال : على بيان متناظر

ليكن لدينا البيان التالي

G_1

G_1 غير متناظر

مثال : على بيان متناظر



G_2 متناظر

G_2

ملاحظة : تسمى الدرة الموجهة | لفّة |

سؤال : إذا كان البيان ليس بسيطاً فكيف نرى أقواسه متوازية ؟

ما هو تعريف البيانات المتناظرة

/ /

البيان اللا تناظري:

نقول عن البيان الموجّه $\vec{G}=(V;\vec{E})$ أنه بيان لا تناظري، إذا تحقق الشرط التالي

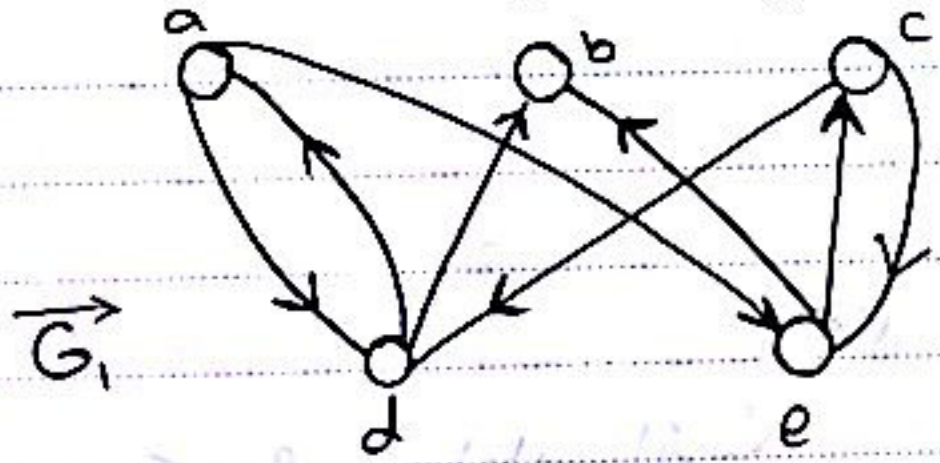
$$\vec{e}=[v,u]\in\vec{E} \quad \Rightarrow \vec{e'}=[u,v]\notin\vec{E}$$

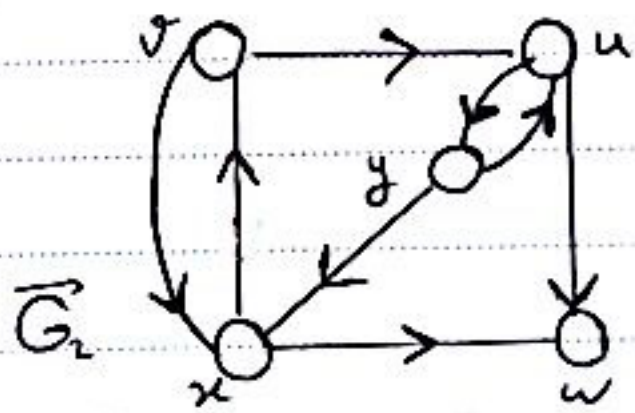
التشاكل في البيانات الموجّهة:

ليكن لدينا البيانين الموجّهين $\vec{G_1}=(V_1;\vec{E_1})$, $\vec{G_2}=(V_2;\vec{E_2})$ يكون البيانين متشاكلين إذا انوجد تطبيق F تقابل (تباين & غامر)

$$\exists\ F: V_1 \longrightarrow V_2$$

فيما يلي (لنرضى) بين مثال لبيانين موجّهين متشاكلين:





- بيّنا فيما إذا كان البيانين متشاكلين، وأوجد التقابل بين هذه العقد.

نظرية: إذا كان لدينا البيان الموجّه $\vec{G_1}$ المتناظر، فإن:

1. $\forall x\in V_1 \;;\; deg^+(x)=deg^-(x)$

2. إذا كان $\vec{G_1}$ بيان موجه (ليس شرطاً أن يكون متناظراً) وكان عدد الأقواس فيه m، فإن $\sum_{x\in V_1} deg^+(x)=\sum_{x\in V_1} deg^-(x)=m$

البيانات الجزئية:

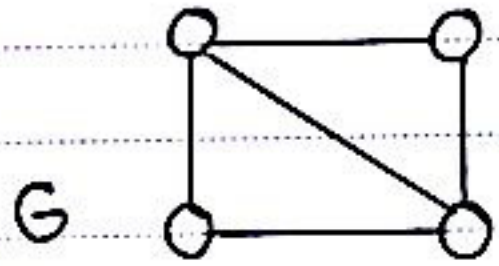
ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ وليكن لدينا البيان $G'=(V';E')$ نقول عن البيان G' أنه بيان جزئي من البيان G إذا تحقق مايلي:

$$V' \subset V \quad \text{و} \quad E' \subset E$$

ملاحظة: كل بيان هو بيان جزئي من نفسه.

البيان المترابط تم تعريفه سابقاً/تذكرة/ بين أي عقدتين من البيان يوجد إما ضلع يربط بينهما أو متتالية من الأضلاع تربط بينهما، بمعنى آخر بين أي عقدتين يوجد إما ارتباط مباشر أو ارتباط غير مباشر.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي



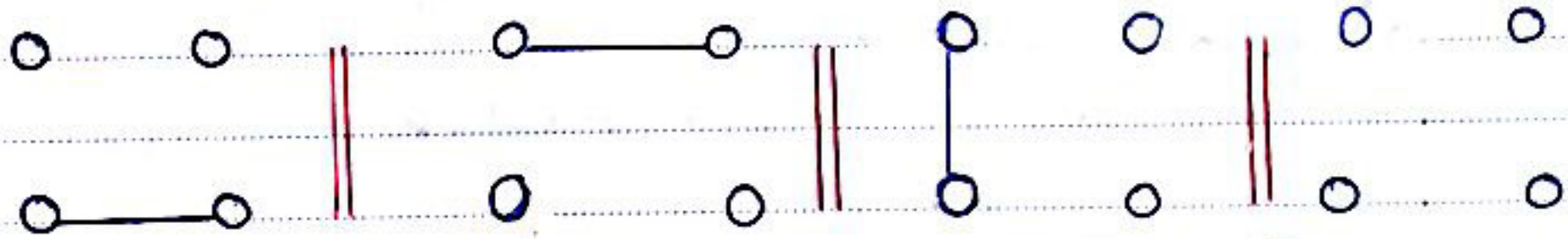
$|E|=5$

$|V|=4$

ماهي مجموعة البيانات الجزئية من هذا البيان

عدد الأضلاع ← $2^{5}=32$ بيان جزئي

منه "يوجد جزء قد يكون متماثل"



وهكذا...

نوجد كافة الاحتمالات الممكنة ومنها نستثني وفق المتماثلة.

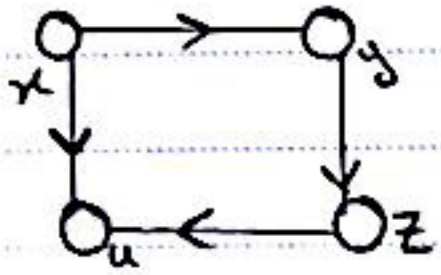
البيانات الجزئية من البيانات الموجهة:

ليكن لدينا البيان $\overrightarrow{G}=(V;E)$ بيان موجه، و البيان الموجه $\overrightarrow{G'}=(V';E')$ نقول عن البيان $\overrightarrow{G'}$ أنه بيان جزئي من البيان $\overrightarrow{G}$; $\overrightarrow{G'} \subset \overrightarrow{G}$

إذا تحقق مايلي:

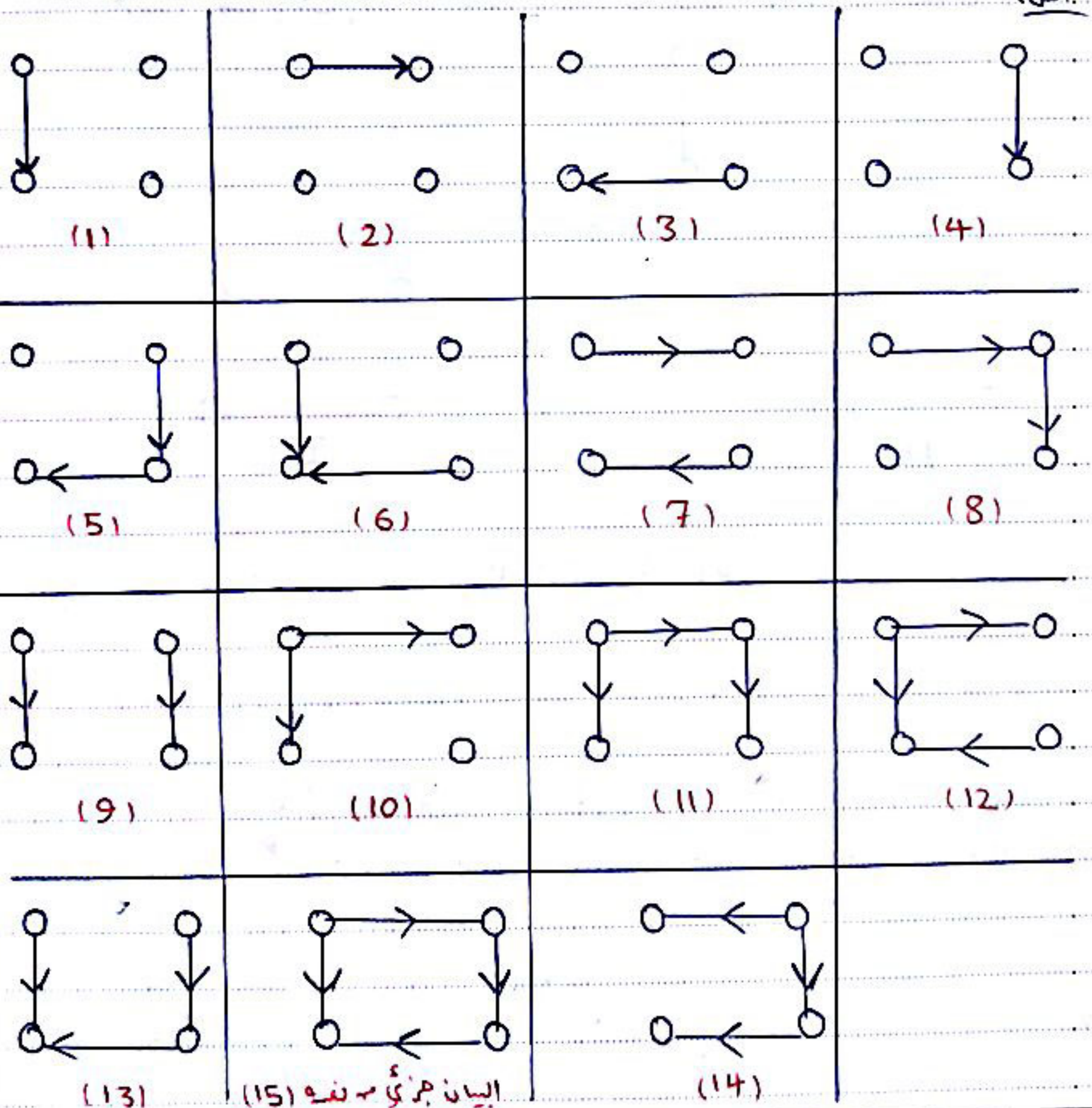
$V' \subseteq V$ و $\overrightarrow{E'} \subseteq \overrightarrow{E}$

مثال: أوجد مجموعة البيانات الجزئية من البيان التالي



في هذا المثال سنوجد البيانات الجزئية التي تملك نفس العقد $V' = V$

الحل:



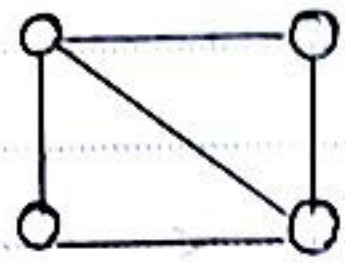
/ /

نلاحظ مايلي: البيانات (1), (2), (3), (4) بيانات متشاكلة.
البيانين (5), (8) بيانين متشاكلين.
البيانين (7), (9) بيانين متشاكلين.

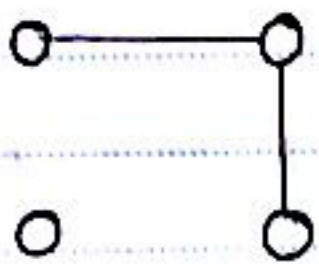
البيان المتمم للبيان الجزئي بالنسبة للبيان الأصلي:

تعريف: هو بيان إذا أضفناه للبيان الجزئي حصلنا على البيان الأصلي.

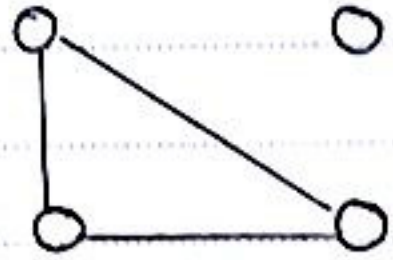
(مع المثال الأول)



G الأصلي



H جزئي من G



$\widetilde{H}$ بيان جزئي متمم لـ H بالنسبة لـ G

مع $\widetilde{H}$ هو H على البيان G

- نفس الشيء بالنسبة للبيانات الموجهة.

وظيفي: أوجد متممات البيانات الموجهة، ثم اذكر المتممات في البيانات الموجهة.

سؤال وجوب

نظرية: ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ "ليس بالضرورة أن يكون بياناً بسيطاً" بحيث كل عقدة من البيان G ترتبط بنفسها، وبحيث أن $x,y \in V$ ترتبطان بنفسهما إما بشكل مباشر أو غير مباشر.

نعرف العلاقة T على البيان G (G,T) وفق مايلي:

$\forall x,y \in V$, $xTy \iff$ x ترتبط بـ y إما بشكل مباشر أو غير مباشر

/ /

عندئذٍ تكون العلاقة T هي علاقة تكافؤ.

الإثبات:

① بما أن كل عقدة ترتبط بنفسها فإن العلاقة T هي علاقة انعكاسية

② العلاقة T تناظرية لأن

x ترتبط بـ y وبما أن البيان G غير موجه فإن

y ترتبط بـ x $\Leftarrow$ العلاقة T متناظرة.

$$xTy \Rightarrow x=x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_n, x_n=y$$

$$y=x_n, e_n, \dots, e_2, x_2, e_1, x_1=x$$

$$\Rightarrow yTx$$

③ العلاقة T متعدية

$$\left.\begin{array}{l} xTy \Rightarrow x=x_1, \dots, x_n=y \\ yTz \Rightarrow y=y_1, e'_1, \dots, e'_n, y_n=z \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x=x_1, e_1, \dots, x_n=y=y_1, e'_1, \dots, e'_n, y_n=z$$

$$\Rightarrow xTz$$

بيان خواص

سؤال وصية

برهنة/ ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث $|V|=n$, عندئذٍ يكون $|E| \geq n-1$, $n>1$

الإثبات:

نثبت هذه البرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي

إذا كان $n=1$ عندئذٍ

$$|E|=n-1=1-1=0$$

$$|E| \geq 0$$

العلاقة محققة, البيان كيوي عقدة واحدة فقط

0

/ /

إذا كان $n=2$ عندئذٍ

$$|E| = n-1 = 2-1 = 1$$

$$|E| \geq 1$$

نفترض صحة البرهنة من أجل $n=K$ عندئذٍ

$$|E| \geq K-1$$

ولنثبت صحتها من أجل $n=K+1$

لكي لدينا البيان H بيان مترابط

$$H=(V_h ; E_h)$$

بحيث

$$|V_h| = K+1$$

لنشكل المجموعة S هي مجموعة من الأعداد الصحيح m

$$S=\{ m \ , \ m \in \mathbb{Z}^+ \}$$

m عدد الأضلاع في البيانات التي عدد عقدها $K+1$

S مجموعة مرتبة وبالتالي

$$\exists t \in S \ , \ \forall \lambda \in S \Rightarrow t \leq \lambda$$

يكون البيان

$H_t=(V_t ; E_t)$; بيان مواقق لـ t

$$|V_t| = K+1$$

$$\exists e \in E_t :$$

حيث يكون البيان $H_t - \{e\}$ بيان غير مترابط

وبالتالي نحصل على مركبتين

/ /

أي. سهلنا على بيان غير مترابط حكون من مركبتين فقط

$H_t = (V_t; E_t)$

بسمي المركبة الأولى

$H_t'' = (V_t''; E_t'')$

بسمي المركبة الثانية

ولدينا مايلي محقق

$$V_t' \cup V_t'' = V_t$$

$$E_t' \cup E_t'' = E_t - \{e\}$$

البيان H_t' يحقق العلاقة $|V_t'| < K+1 \Rightarrow$ عدد عقد المركبة الأولى

أي أن $|E_t'| \geq |V_t'| - 1$

وأيضاً

البيان H_t'' يحقق العلاقة $|V_t''| < K+1 \Rightarrow$

أي أن $|E_t''| \geq |V_t''| - 1$

لدينا مايلي

$$E_t = E_t' + E_t'' + \{e\}$$
$$|E_t| = |E_t'| + |E_t''| + 1$$
$$|E_t| \geq |V_t'| - 1 + |V_t''| - 1 + 1$$
$$|E_t| \geq |V_t| - 1$$

$\Leftarrow$ العلاقة محققة من أجل $K+1$ وبالتالي هي دوماً محققة.

سؤال دوره / البرهيدية / لنكن لدينا مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{Z}^+$ كيف تكون العلاقة التالية محققة.

$$\sum_{i=1}^{K} (n_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{K} n_i\right)^2 - (K-1)\left(2\sum_{i=1}^{K} n_i - K\right)$$

"البرهان رياضياً وظيفي"

مثال: سنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة التالية: 1, 2, 3

$$l_1 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$l_2 = 36 - (2)(12-3) = 18$$

$$14 \leq 18$$

العلاقة صحيحة.

تعريف: ليكن البيان الموجه الذي مجموعة رؤوسه $V = \{v_1, \ldots, v_8\}$ بحيث يكون

$$i > j \iff [v_i, v_j] \in \vec{E}$$

وبيّن ما يلي العلاقة بين درجات العقد في هذا البيان وبيان الخواص الأخرى التي يتمتع بها هذا البيان (تناظر، غير تناظر، ...)

ملاحظة: بالكتاب يوجد تمارين للحل !!!..

انتهت.