Subject : / /

المحاضرة التاسعة - الاربعاء
ع 13 / 4 / 2016

التكامل المركب (تكامل دالة عقدية بمتغير عقدي على منحنى عقدي)

ليكن f تابعاً عقدياً معرفاً على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ و Γ منحني في A بحيث تكون f محدودة على Γ

"أي $\exists M > 0 : |f(z)| \le M \quad \forall z \in \Gamma$"

وليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

تمثيلاً وسيطياً لـ Γ و

$P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$

تجزئة لـ $[a,b]$ و

$\sigma = \{\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n\}$

$\tau_k \in [t_{k-1} , t_k]$

نعرف المجموع التالي

$$S(P, \sigma, f, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

بتكامل ريمان ستيلجس

تكامل ستيلجس هو تكامل بالنسبة لـ ...

أما ريمان $S = \sum f(c_i) \frac{\Delta x_i}{(x_i - x_{i-1})}$ دالة موجودة ...

$\int f(x)\, dx$ وهو حالة خاصة

ريمان حالة خاصة من تكامل ريمان ستيلجس

إذا وجد عدد عقدي A بحيث يحقق ما يلي "لأجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد تجزئة P_ε لـ $[a,b]$ بحيث تحقق المتراجحة

$$|S(P, \sigma, f, \gamma) - A| < \varepsilon$$

لأجل كل تجزئة P أدق منها أي $(P_\varepsilon \subset P)$ ولأجل كل اختيار لنقاط σ" فإننا نقول إن f تحول قابل للمكاملة على التمثيل الوسيطي γ وفي هذه الحالة f تحول Γ في $\mathbb{C}$ فإننا نرمز لهذا العدد أي العدد العقدي

$$\int_\gamma f \text{ أو } \int_\gamma f(z)\, dz$$

ملاحظة: إن قابلية مكاملة f على Γ تكافئ قابلية مكاملة $(f \circ \gamma)$ بالنسبة لـ γ على المجال $[a,b]$ وإن

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\, dt$$

تعريف: إذا كان f قابلاً للمكاملة على γ فإننا نقول إن f قابل للمكاملة على Γ ونكتب

$$\int_\Gamma f = \int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

ملاحظة: من شروط التعريف السابق إن التكامل مستقل عن التمثيل الوسيطي لـ Γ "أي مهما غيرنا التمثيل الوسيطي ستبقى قيمة التكامل ثابتة"

مبرهنة: إذا كانت f مستمرة على منحني Γ فإن f كمول على Γ وإذا كان Γ أملس وممثل بـ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ فإن f كمول على Γ وإن

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) . \gamma'(t) . dt$$

تم تعويضه بمجهول معين

موجود لأنه أملس

ومنه التكامل موجود هنا

"يمكن تعميم هذه المبرهنة الى حالة Γ أملس قطعيا و f مستمر قطعيا على γ

أي يحوي نقاط انقطاع ولكن عددها منتهٍ وهي من النوع الأول أي نهايته من اليمين واليسار

أي أن $f(\gamma(t))$ مستمر قطعيا على $[a,b]$ ونعطي التكامل بـ

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) . \gamma'(t) . dt$$

مثال: هل التابع $f(z) = \frac{1}{z}$ كمول على دائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب، وإذا كان كمول احسب تكامله على الدائرة

تم البرهان سابقاً على أن الدائرة منحني أملس

نرمز للدائرة بـ $C^+(0,1)$

الاتجاه الموجب — مركزها — نصف قطرها

أو $|z| = 1$

$f(z) = \frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$ و $\mathbb{C}^*$ تحوي

$C^+(0,1)$ حسب المبرهنة السابقة بأن f كمول

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz$$

$$= \int_0^b \frac{1}{\gamma(t)} . \gamma'(t) . dt$$

$f(\gamma(t))$

ونعلم أن

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = e^{it}$

تمثيل مسموح به لـ $C^+(0,1)$

$$\Rightarrow \int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} . i e^{it} . dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,dt$$

$$= [it]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi i$$

ملاحظة: إن $\frac{1}{z}$ دورة $f(z)$ محمولاً على دائرة الواحدة المحسوبة عشرة مرات متتالية بالأدنى. الحوض لا f مستمر على $\mathbb{C}^*$ الحاوية للدائرة. وإن هذا المنحنى أملس قطعياً لأنه مكون من عشر قطع ملساء من البرهنة السابقة يكون f محمول على هذه الدائرة وإن التكامل. يساوي $10 \times 2\pi i = 20\pi i$

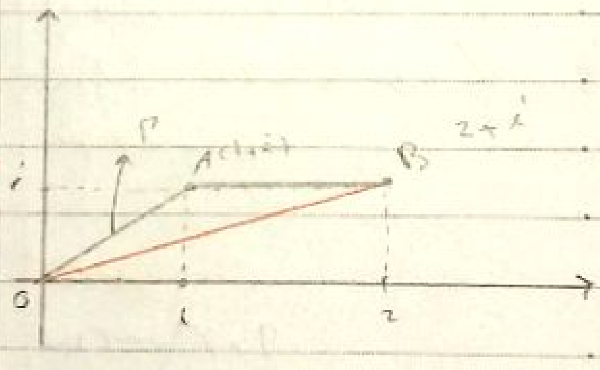
مثال: احسب التكامل $\int_{\Gamma} \bar{z}\,dz$

حيث $\Gamma = [OA] \oplus [AB]$

و $[OA]$ هي القطعة المستقيمة التي مبدؤها 0 وتنتهي بالنقطة $A(1,1)$ و

$[AB]$ القطعة المستقيمة التي مبدؤها A

وتنتهي $B(2,1)$



$$\int_{\Gamma} \bar{z}\,dz = \int_{[OA]} \bar{z}\,dz + \int_{[AB]} \bar{z}\,dz$$

تذكر $y = x$ معادلة المستقيم الأول

أولاً: القطعة $[OA]$

$\gamma_1(t) = t + it$

$0 \le t \le 1$

هو تمثيل مسموح به لـ $[OA]$

نستطيع استخدام التمثيل الوسيطي المشهور للقطعة المستقيمة

على OA ⇐

$$\Rightarrow \int_{OA} \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)}\,\gamma_1'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t - it)(1+i)\,dt$$

$$= (1-i)(1+i)\int_0^1 (t)\,dt$$

$$= (1-i)(1+i)\left[\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= 2\cdot\left[\frac{1}{2} - 0\right]$$

$$= 1$$

ثانياً: $[AB]$ "الجزء التخيلي ثابت دوماً ويساوي الواحد"

$\gamma_2(t) = t + i \quad ; \quad 1 \le t \le 2$

ملاحظة: يمكن استخدام التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة المشهور وهو $(1-t)z_1 + tz_2$ ويعطي نفس الجواب ولكن يجب أن ننتبه إلى أنه دائماً نأخذ فيها $t \in [0,1]$ عند أخذ التمثيل المشهور للقطعة المستقيمة

على $[AB]$ ⇐

$$\int_{AB} \bar{z}\,dz = \int_1^2 \overline{\gamma_2(t)}\,\gamma_2'(t)\,dt$$

$$= \int_1^2 (t - i)(1)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - it\Big|_1^2\right]$$

$$= 2 - 2i - \left(\frac{1}{2} - i\right)$$

$$= \frac{3}{2} - i$$

ومنه

$$\int_{\Gamma=[OA]\cup[AB]} \bar{z}\, dz = \int_{OA} \bar{z}\, dz + \int_{AB} \bar{z}\, dz$$

$$= 1 + \frac{3}{2} - i$$

$$= \frac{5}{2} - i$$

طلب إضافي:

احسب التكامل على $[OB]$ .. وبين $\bar{z}$

$$\gamma_3(t) = (1-t)O + tB$$

$$= (2+i)t \quad ; 0 \le t \le 1$$

+ سنرسم المنحنى المستوي [illegible]

+ طريقة 2 . $y = mx$

$1 = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

$\gamma_3(t) = t + \frac{t}{2} i \Leftarrow 0 \le t \le 2$

$$\int_{OB} \bar{z}\, dz = \int_0^1 (2-i)t(2+i)\, dt$$

$$= (2-i)(2+i)\int_0^1 t\, dt$$

$$= 5 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{2}$$

+ نستنتج إن التكامل غير مستقل عن الطريق المسلوك

أي Γ له نفس بداية ونهاية OB ولكن التكامل على

Γ لا يساوي التكامل على OB "

تمرين ①: نفس المثال السابق ولكن

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}\, z\, dz$$

تمرين ②:

احسب التكامل $\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\, dz$ حيث

Γ هي قوس المنحني المكافئ $y = x^2$

المحصور بين O و A من O إلى A

من النقطة الكائنة O [illegible]

$\gamma(t) = t + it^2 \quad , 0 \le t \le 1$

ثم قارن بينه وبين OA

تمرين ③: عين مجال تعريف التابع

$$g(z) = \log(z^2+4)$$

ثم أوجد مجموعة تحليلية التابع

$$f(z) = \mathrm{Log}(z^2+4)$$

ثم عين مشتقه

ملاحظة:

لدينا تابعين f و g

g تحليلي على مجموعة A و f تحليلي على مجموعة

$g(A)$ فإن $f \circ g$

سيكون تحليلي على A

و إن

$$(f \circ g)' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

$$\forall z \in A$$

AL.SAMRAH

Scanned by CamScanner

المحاضرة العاشرة - الخميس
في 14 / 4 / 2016

⊕ خواص التكامل العقدي

ليكن f و g تابعين عقديين كل منهما كمول على منحني Γ و α ثابتة عقدية عندئذ:

$$\int_\Gamma (f+g) = \int_\Gamma f + \int_\Gamma g$$

$$\int_\Gamma \alpha f = \alpha \int_\Gamma f$$

$$\int_{\Gamma^-} f = -\int_\Gamma f$$

مثال:

احسب التكامل لـ $f(z) = \frac{1}{z}$ على $C^-(0,1)$

سبق وحسبنا التكامل على $\Gamma = C^+(0,1)$

$\Rightarrow \Gamma^- = C^-(0,1)$

حسب الخاصية الثالثة

$$\int_{C^-(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = -\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = -2\pi i$$

ليكن f كمولاً على Γ_1 و Γ_2 عندئذ

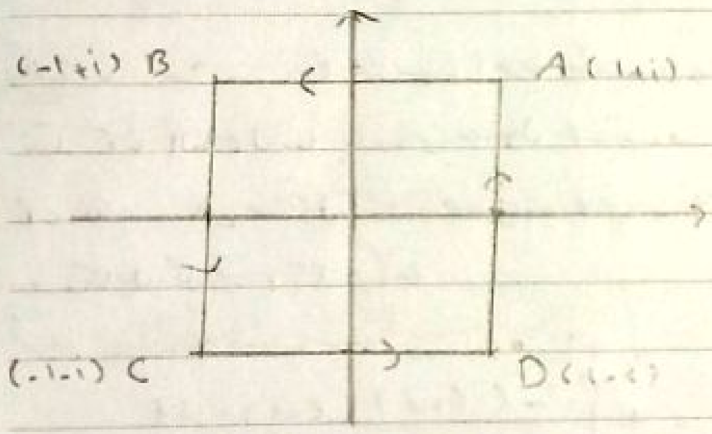
$$\int_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$$

مثال: احسب التكامل $\int \frac{1}{z}\,dz$ على المربع الذي رؤوسه

$A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$

هنا لم يخبرنا عن جهة أو عدد مرات المسح وحيث المربع ممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب مع كامل الحرية باختيار نقطة الانطلاق ونقطة الانطلاق هي إحدى الرؤوس..

نأخذ A: منحني أملس قطعياً..



$\Gamma = [AB] \oplus [BC] \oplus [CD] \oplus [DA]$

أولاً:

$$\int_{[AB]} \frac{1}{z}\,dz$$

$\gamma_1(t) = -t + i$

$-1 \le t \le 1$

$$\int_{AB} \frac{1}{z}\,dz = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{-t+i}\,(-1)\,dt$$

التمثيل الوسيطي يمكن أخذه التمثيل المشهور، ولكن هنا سنأخذ كالتالي: القسم التخيلي ثابت ومنه اعتبرنا القسم الحقيقي متحول ولكنه باتجاه معاكس لـ ox^+ ومنه نأخذ $-t$ حتى يمسح القطعة AB بعكس الاتجاه الموجب للمحور

Subject: / /

ملاحظة هامة جداً

لا نستطيع أن نستخدم اللوغاريتم العقدي لأنه لا يمكننا الاستفادة كاملاً ... أن نكمله ل نشتق العددي من تكامل الدوال ... السؤال

هل هناك طرق أخرى لإيجاد الاستقامة

مثلاً $\frac{1}{-t+i}$

الجواب: مع الطالب

الثاني: سنضع طريقة أخرى بالحساب وهي بما أن الناتج لدينا عدد يحتوي جزء حقيقي وجزء أي هو على شكل "عدد حقيقي + i جزء تخيلي" ونكامل كل جزء على حدة.

$$= + \int_{-1}^{+1} \frac{-(t+i)}{(-t+i)(-t-i)} (-1)\, dt$$

$$= + \int_{-1}^{1} \frac{-(t+i)}{t^2+1} (-1)\, dt$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{-t}{t^2+1}\, dt - \int_{-1}^{1} \frac{-i}{t^2+1}\, dt$$

فردية

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t^2+1|\right]_{-1}^{1} + i\left[\arctan t\right]_{-1}^{1}$$

$$= 0 + i \arctan(t)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= i\left(\arctan(1) - \arctan(-1)\right)$$

$$= i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} i$$

تذكرة حول التكاملات الفردية والزوجية

S_m و S_m^{-1} دوال فردية

T_m دالة فردية

C_m دالة زوجية

C_m^{-1} ليست فردية وليست زوجية

لأنه هناك انسحاب بالمقدار $\frac{\pi}{2}$ وهو أن يكون متناظراً بالنسبة للصفر

التكاملات الثلاث الباقية مع الطالب وستكون

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} = i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\pi i$$

ملاحظة:

التكامل السابق ليس بالضرورة أن يكون مساحة فالتكامل لا يختلف عن أي ... إذا كان موجه ومعتبر .. لذلك لا نستطيع إيجاد ضلع واحد من المربع والقول إن الأضلاع الثلاثة الأخرى ستكون مساوية له .. لكن بالتمرين كانت صدفة

ملاحظة:

التكامل $\frac{1}{z}$ على أي منحني مغلق يحيط بالمبدأ سيكون مساوياً لـ $2\pi i$

وسنبرهن على هذا لاحقاً...

تمرين: احسب $\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z}\, dz$ حيث r عدد حقيقي موجب.

توجيه: $\gamma(t) = r.e^{it}$

الجواب يساوي $2\pi i$

ملاحظة: التابع العقدي الأسي ليس بالضرورة أن يكون متزايد كما لا يمكن أن نقول إن التابع الأسي العقدي متزايد كما الحال مع التابع الأسي الحقيقي. والسبب بذلك أنه لا يوجد علاقة ترتيب في $\mathbb{C}$ أساساً..

• إذا كان f محدوداً على منحني Γ فإن

$$\left|\int_\Gamma f\right| \le \underset{\text{حد أعلى موجبة}}{M}\ \underset{\text{طول المنحني}}{\ell(\Gamma)}$$

مثال: اثبت أن

$$\left|\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1}\, dz\right| \le \frac{4\pi e^2}{3}$$

حيث $\Gamma: |z|=2$

$|z|=2$ هي دائرة مركزها (0) ونصف قطرها 2 ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب

التابع $\frac{e^z}{z^2+1}$ مستمر على $\mathbb{C}\setminus\{(-i,i)\}$

والدائرة $|z|=2$ محتواة في $\mathbb{C}\setminus\{(-i,+i)\}$

أي $C^+(0,2) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{(-i,+i)\}$

$$z \in C^+(0,2) \Rightarrow -2 \le \operatorname{Re} z \le 2$$

واضحاً:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \le e^2$$

لأن e^x أسي حقيقي متزايد

وأن

$$|z^2+1| \ge \left||z^2|-1\right| \quad \forall z \in C^+(0,2)$$

$$\Rightarrow |z| = 2$$

$$\Rightarrow |z^2+1|_{C^+(0,2)} \ge 4-1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^z}{z^2+1}\right|_{C^+(0,2)} \le \frac{e^2}{3} = M$$

ومن الخاصة السابقة نلاحظ

$$\left|\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1}\right| \le M.\,\underbrace{\ell(|z|=2)}_{\text{محيط الدائرة}}$$

$$\le \frac{e^2}{3}\,(2\pi(2))$$

$$\le \frac{4\pi e^2}{3}$$

و.هـ.م

ملاحظة للتذكير ،،
إذا كان المنحنى مرشد بار طوله يعطى بالتكامل
$$\ell(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \ell(\gamma)$$

مثال: احسب التكامل $\int_\Gamma c\, dz$

حيث c ثابت عقدي و Γ طريق ما
إن الثابت تام مستمر ومنه التابع كمول
على Γ لكن هنا لا نستطيع استخدام المبرهنة
السابقة بالتكامل لأننا لم نحدد إن Γ أملس !!

ليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$
ممثل لـ Γ ولتكن

$P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$
تجزئة ما لـ $[a,b]$

و

$\sigma = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots \tau_n\}$
مجموعة مناسبة لـ $[a,b]$ الباقية
$\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

ولنوجد المجموع

$$S = (P, \sigma, f, \gamma)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\gamma(\tau_k))}_{c}\,(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

$$= c\,[(\gamma(t_1) - \gamma(t_0)) + (\gamma(t_2) - \gamma(t_1)) + \dots + (\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1}))]$$

$$= c\,[\gamma(t_n) - \gamma(t_0)]$$

$$= c(z_f - z_i)$$

حيث z_f هي نقطة ~~[illegible]~~
الرئيسية للطريق Γ
و z_i هي نقطة البداية للطريق Γ

$$\Rightarrow S(P, \sigma, f, \gamma) - c(z_f - z_i) = 0$$
$$\forall P,\ \forall \sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Gamma c\, dz = \int_\gamma c\, dz = c(z_f - z_i)}$$

نلاحظ أنه في هذه الحالة التكامل مستقل عن
الطريق المسلوك ويتعلق فقط ببداية
ونهاية الطريق..

تمرين:

أثبت أن

$$\int_\Gamma z\, dz = \frac{z_f^2}{2} - \frac{z_i^2}{2}$$

حيث Γ منحني أملس ..

سؤال الدكتور
ص ١٨٠ بالكتاب
$\sin^2 z \pm 3 \sin z$

$2 \cos z = 1$

$\frac{\sin z}{\cos z} = 1$

$\Rightarrow \sin z = \cos z$

Made in
Mérand

AL SAMRAH