2016/5/9 .

المحاضرة الحادية عشرة: تطبيقات نظرية الفئات

النواة:

تذكرة بالتعريف:

(N,f) نواة المورفيزمين u_1, u_2 إذا تحققت:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

1) لأجل كل $X \in ob(\ell)$ ولأجل كل مورفيزم $u: X \longrightarrow A$ يحقق: $u_1.u = u_2.u$

يوجد مورفيزم وحيد $g: X \longrightarrow N$ لأجله: $f.g = u$

2) إذا وجد لأجل كل مورفيزم $u: X \longrightarrow A$ ، $g: X \longrightarrow N$ يحقق:

$f.g = u$

عندئذٍ: $u_1.u = u_2.u$

نتيجة:

إذا كانت (N,f) نواة المورفيزمين u_1, u_2 عندئذٍ: $u_1.f = u_2.f$

البرهان:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[ur, "I_N"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

لما كانت (N,f) نواة المورفيزمين u_1, u_2

وأنه لأجل $f: N \longrightarrow A$ يوجد: $I_N: N \longrightarrow N$ يحقق:

$f.I_N = f$

من الشرط (2) يكون: $u_1.f = u_2.f$

مبرهنة:

ليكن $u_1, u_2: A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة ℓ.

إذا كانت كل من (N,μ) , (M,f) نواة المورفيزمين u_1, u_2

عندئذٍ يوجد ايزومورفيزم وحيد $\alpha: N \longrightarrow M$ بحيث $f.\alpha = \mu$.

البرهان:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "\mu"] & \\ M \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

لما كانت (M,f) نواة المورفيزمين u_1, u_2 فإن: $u_1.f = u_2.f$

وحسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $\beta: M \longrightarrow N$ يحقق:

$\mu.\beta = f$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

من جهة أخرى لما كانت (N,μ) نواة المورفيزمين u_1, u_2 فإن: $u_1.\mu = u_2.\mu$

وحسب الشرط الأول يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: N \longrightarrow M$ يحقق:

$\boxed{f.\alpha = \mu}$

$$\mu = f.\alpha = (\mu.\beta).\alpha = \mu.(\beta.\alpha)$$
$$f = \mu.\beta = (f.\alpha).\beta = f.(\alpha.\beta)$$

وحسب التعريف نجد أن :

$$\boxed{\beta.\alpha = I_N}$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "\mu"] & \\ N \arrow[ur, "{\beta.\alpha, I_N}"] \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

وحيد مورفيزمين يجعلان المساواة محققة ولكن حسب التعريف يجب أن يكون المورفيزم وحيد ومنه فإن $\beta.\alpha = I_N$

أيضاً نجد أن : $\boxed{\alpha.\beta = I_M}$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[ur, "{\alpha.\beta, I_M}"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

وهذا يبين أن α ايزومورفيزم .

بقي علينا اثبات الوحدانية . الوحدانية محققة

لأن α هو مورفيزم وحيد يحقق أن $f.\alpha = \mu$

مبرهنة: إذا كانت (N,f) نواة للمورفيزمين $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ عندئذٍ :

f مونومورفيزم وبالتالي N شيء جزئي من A .

البرهان:

لدينا : $f : N \longrightarrow A$

كي يكون f مونومورفيزم لنبرهن على أن التطبيق :

$$\alpha : \mathcal{f}(X,N) \longrightarrow \mathcal{f}(X,A)$$
$$\alpha(\lambda) = f.\lambda$$

متباين وذلك أياً كان $X \in ob(\mathcal{f})$

ليكن $w_1, w_2 \in \mathcal{f}(X,N)$ بحيث :

$$\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$$
$$f.w_1 = f.w_2$$

لما كان f نواة المورفيزم u_1, u_2 فإن : $u_1.f = u_2.f$

ومنه :
$$u_1.(f.w_1) = (u_1.f).w_1$$
$$= (u_2.f)w_1 = u_2.(f.w_1)$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "f.w_1"'] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

وحسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $g_1 : X \longrightarrow N$

بحيث : $\boxed{f.g_1 = f.w_1 = f.w_2}$

Scanned by CamScanner

ولما كان (N,f) نواة نجد أن $\omega_1 = \omega_2$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[ur, "\omega_1, \omega_2"] \arrow[r, "f.\omega_1 = f.\omega_2"'] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\ & B & \end{tikzcd}$$

وهذا يبين أن α متباين

وبالتالي f مونومورفيزم .

<u>مبرهنة:</u>

لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ ، مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$.

عندئذٍ أياً كان $X \in ob(\mathcal{C})$ يوجد دالي غير مباشر :

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow set's$$

$$F(X) = \{ f : f \in \mathcal{C}(X,A) \ , \ u_1.f = u_2.f \}$$

البرهان: واضح أن F تطبيق أشياء .

ليكن $\omega : N \longrightarrow M$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$

$$F(\omega) : F(M) \longrightarrow F(N)$$

$\mathcal{C}(M,A)$ $\qquad$ $\mathcal{C}(N,A)$

$$\forall \lambda \in F(M) \ , \ F(\omega)(\lambda) = \lambda.\omega$$

$\lambda : M \longrightarrow A \ , \ u_1.\lambda = u_2.\lambda$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] & A \\ N \arrow[u, "\omega"] \arrow[ur, "\lambda\omega"'] & \end{tikzcd}$$

واضح أن: $\lambda.\omega \in \mathcal{C}(N,A)$

وأن:

$$u_1.(\lambda.\omega) = (u_1.\lambda).\omega = (u_2.\lambda).\omega = u_2.(\lambda.\omega)$$

وهذا يبين أن $\lambda.\omega \in F(N)$

ليكن $\omega_1, \omega_2 : N \longrightarrow M$ بحيث : $\omega_1 = \omega_2$

$$F(\omega_1)(\lambda) = \lambda.\omega_1$$

$$F(\omega_2)(\lambda) = \lambda.\omega_2$$

$\boxed{\forall \lambda \in F(M)}$

ومنه : $\lambda.\omega_1 = \lambda.\omega_2$ أي :

$$F(\omega_1)(\lambda) = F(\omega_2)(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad F(\omega_1) = F(\omega_2)$$

$$F(I_N) : F(N) \longrightarrow F(N)$$

$$\forall \mu \in F(N) \subset \mathcal{C}(N,A)$$

$$u_1.\mu = u_2.\mu$$

$$F(I_N)(\mu) = \mu . I_N = \mu$$

وهذا يبين أن: $F(I_N) = I_{F(N)}$

ليكن $w : N \longrightarrow M \xrightarrow{v} K$ مورفيزمين للفئة f.

$$v.w : N \longrightarrow K$$

$$F(v.w) : F(K) \longrightarrow F(N)$$

$$\forall \alpha \in f(K)$$

$$F(v.w)(\alpha) = \alpha.(v.w) = (\alpha.v).w$$

$$F(w) : \underbrace{F(M)}_{\subset f(M,A)} \longrightarrow F(N)$$

ولدينا أيضاً:

$$\alpha.v \in f(M,A)$$

لما كان: $\alpha \in F(K)$ فإن: $\alpha \in f(K,A)$

$$u_1.\alpha = u_2.\alpha$$

$$(u_1.\alpha).v = (u_2.\alpha).v$$

$$u_1.(\alpha.v) = u_2.(\alpha.v)$$

وهذا يبين أن $\alpha.v \in F(M)$

ومنه: $F(w)(\alpha.v) = (\alpha.v).w$

وبالتالي:

$$\boxed{F(v.w)(\alpha) = F(w)(\alpha.v)}$$

$$F(v) : F(K) \longrightarrow F(M)$$

$$\alpha \in F(K)$$

$$F(v)(\alpha) = \alpha.v$$

$$F(v.w)(\alpha) = F(w)(\alpha.v) = F(w)\big(F(v)(\alpha)\big) = F(w).F(v)(\alpha)$$

$$F(v.w) = F(w).F(v)$$

ومنه نجد أن F دالية غير مباشرة.

انتهت المحاضرة الحادية عشرة

هبة