12/5/2016 الخميس المحاضرة 13

القياس الخارجي / المجموعة القيوسة

تمارين :

إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً قيوساً برهن أن :

1) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \wedge \mu(A \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

3) نعرف التابع $\mu_B : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ حيث $B \subseteq X$

$$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

برهن أن μ_B قياس

4) إذا كان $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathbb{R}), \mu)$ فضاء بوريل
احسب قياس المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ حيث

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + 4^{-n}, n + 2^{-n}]$$

وضح بالرسم المجموعة A حيث :

$n = 1, 2, 3$

أهم المفاهيم في نظرية القياس :

- الجبر - الجبر التام - بيان أنه مغلق بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات
- تعريف فضاء القياس $(X, \mathcal{A}, \mu)$
- خواص القياس
- أنواع القياسات الشهيرة
- القياس الخارجي (مثال قياس خارجي ليس بقياس).
- المجموعة القيوسة.

- مبرهنة : مقصور القياس الخارجي على المجموعات القيوسية يمثل قياساً.
- التابع القيوسي
- التابع المميز (الدرجي) خواصه.
- التابع البسيط وتكتب كتركيب خطي لتوابع درجية
- تكامل لوبيغ لتابع بسيط (أمثلة)

القياس الخارجي :

$$P(X) \quad , X \neq \emptyset$$

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

نقول عن μ^* أنه يمثل قياس خارجي على X (أو على أجزاء X) إذا تحققت الشروط :

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3) $\forall A_i \in P(X)_{i \in \mathbb{N}} : \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

ملاحظة :

كل قياس هو قياس خارجي (العكس غير صحيح دوماً).

مثال معاكس :

نعرف التابع : $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\forall A \in P(X) : \mu^*(A) = \sqrt{|A|}$$

عدد عناصر المجموعة A : $|A| = n$

والمطلوب :

① برهن أن μ^* قياس خارجي على أجزاء X
② وضح أن μ^* ليس بقياس
③ استنتج جبر تام $\mathcal{A}$ بحيث $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$ (مقصور القياس الخارجي على $\mathcal{A}$)

الحل:

$\boxed{1}$

1) $A=\phi \Longrightarrow \mu^*(\phi)=\sqrt{|\phi|}=0$

2) $A\subseteq B \Longrightarrow |A|\leq |B|$

$\sqrt{|A|}\leq\sqrt{|B|}$

$\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

$\sqrt{|A|+|B|}\leq\sqrt{|A|}+\sqrt{|B|}$

3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in P(X)$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_n$$

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|\leq |A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|$$

$$\sqrt{|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|A_i|}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|A_i|}$$

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A_i)$$

بالاستقراء نكتب $\Longrightarrow$ $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$

إذاً μ^* قياس خارجي على أجزاء X

$\boxed{2}$

$A, B \in P(X) : A\cap B=\phi$

$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$

$|A\cup B| = |A|+|B|$

انتباه لأن $A\cap B=\phi$

$$\sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{|A|+|B|} \neq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$$

$$\neq \mu^*(A)+\mu^*(B)$$

لايمكن كتابتها

$\mu^*(A \cup B)$: μ^*

$$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A)+\mu^*(B)$$

مثال عدد للتوضيح:

كتابته هامة جداً بالفحص

$A = \{1, 2, \dots, 9\}$: 9

$B = \{10, \dots, 25\}$: 16

$$A \cap B = \emptyset$$

$A \cup B = \{1, \dots, 25\}$

$|A \cup B| = 25$

$|A| = 9$ $\qquad$ $|B| = 16$

جذر الـ 25

$$\left.\begin{array}{l} \mu^*(A \cup B) = 5 \\ \mu^*(A) = 3 \\ \mu^*(B) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \neq 3+4$$

إذاً μ^* ليس بقياس

$\boxed{3}$ الجبر التام:

$\mu^*: P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ هو جبر تام

$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$

بحيث لو عوضنا بـ * طلعت دائماً صحيحة

المجموعة القيوسة :

$P(X) \qquad X \neq \emptyset$

$\mu^*: P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

نقول عن $A \subseteq X$ إنها قيوسة

إذا تحقق الشرط :

$$\forall E \subseteq X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

توضيح من أين هذا التعريف :

$E = E \cap X \qquad A \in P(X)$

$E = E \cap (A \cup A^c)$

$E = \underbrace{(E \cap A)} \cup \underbrace{(E \cap A^c)}$

مجموعتين منف ليستن مثنى مثنى

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

في التعريف فرضنا الحالة العكسية $\geq$ فحصلنا على $=$

نتيجة :

$\emptyset$ مجموعة قيوسة وَ X مجموعة قيوسة

لأن : $\emptyset \subseteq X$

$$\forall E \subseteq X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(E \cap X)$$

$\Rightarrow \mu^*(E) = E$ قيوسة

مبرهنة : $\mathcal{M}^* = \mathcal{A}$ جميع المجموعات القيوسة

ليكن لدينا :

$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ قياس

$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

أستطيع من القياس الخارجي أن أحصل على مجموعات قيوسة

$\mu^*/_{\mathcal{A}} = \mu : \mathcal{A} : \mathcal{M}^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

(مقصور القياس الخارجي على $\mathcal{A}$ هو قياس)

التابع القيوسي :

$$(X, \mathcal{A}, M_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}, M_2)$$

نعرف التابع :

$$f : X \longrightarrow Y$$

نقول عن التابع f أنه تابع قيوسي إذا كانت الصورة العكسية للمجموعة القيوسة في المستقر هي مجموعة قيوسة في المنطلق بصيغة جبرية :

$$\forall B \in \mathcal{B} \Longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

المستقر — المنطلق

f قيوسي :

تابع مميز دارجي

$$X : \mathcal{A} \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$A \subseteq X$$

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, A, A^c\}$$ جبر تام بالنسبة للتابع الدارجي

$$X_\emptyset(x) = 0$$
$$X_X(x) = 1$$

$$X_{A \cup B}(x) = X_A(x) + X_B(x)$$

$$A \cap B = \emptyset$$