تمرين: إذا فرضنا أن طول الشخص متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 175\,cm$ وانحراف معياري $\sigma = 7.5\,cm$ أكتب. حدد مهندس ارتفاع أبواب الغرف في منزل يقوم بتصميمه بحيث لا يضطر أكثر من 2% من الأشخاص إلى تخفيض رؤوسهم عند الدخول والخروج.

والحل: X يدل على طول الشخص

$$X \sim N(175\,;\,56{,}25)$$

إذا فرضنا أن ارتفاع الأبواب $a = cm$ عندئذٍ يجب أن:

$$P(X > a) \leq 0.02$$

وبالتالي

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) \overset{\text{معيارية}}{=} 1 - P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{a-175}{7{,}5}\right) \leq 0.02 \Rightarrow \phi\left(\frac{a-175}{7{,}5}\right) \geq 0.98$$

لكن من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$0.98 = \phi(2.06)$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{a-175}{7{,}5}\right) \geq \phi(2{,}06)$$

بالمقارنة وعلماً أن ϕ دالة متزايدة

$$\Rightarrow \frac{a-175}{7{,}5} \geq 2.06 \Rightarrow a \geq 190{,}45\ cm$$

تمرين: في إحدى ألعاب الحظ توضع ست مغلفات متماثلة في الشكل ويوجد داخل كل منها بطاقة تدل على عدد الليرات التي يربحها اللاعب عند سحبه لمغلف ما. إذا كان كل من المغلفين الأول والثاني يحوي بطاقة تحمل الرقم 15 ويحوي المغلف الثالث بطاقة تحمل الرقم 10 والرابع يحمل الرقم 20 والخامس والسادس يحملا الرقم 5.

① إذا قام شخص بـ 36 عملية سحب (مع إعادة) فما هو احتمال أن يجمع مبلغاً يزيد على 350 ليرة

② ما هو أصغر مبلغ يمكن أن يحصل عليه باحتمال 95%

الحل: بفرض X يدل على عدد الليرات التي يكسبها اللاعب عند سحب الكرات فيكون لـ X جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

X	0 (x_1)	10 (x_2)	15 (x_3)	20 (x_4)	مجموع
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}=1$

الطلب ①: 36 عملية سحب مع الإعادة هو كعملية سحب عينة عشوائية حجمها $n=36$ من مجتمع له توزيع X. فإذا فرضنا أن $X_1, X_2, \ldots, X_{36}$ عينة عشوائية لـ X فإن:

المتغير $T=\sum_{i=1}^{36} X_i$ ~~$T=\sum_{i=1}^{36} X_i$~~

يدل على مجموع ما يجمعه اللاعب عندما يقوم بـ 36 عملية سحب

وبما أن $n=36>30$ فيمكن استخدام مبرهنة النهاية المركزية:

$$T=\sum_{i=1}^{36} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{36}\mu_i , \sum_{i=1}^{36}\sigma_i^2\right)$$

$$= N(36\mu_X , 36\sigma_X^2)$$

لكن:

$$\Rightarrow \mu_X=\sum x_i f_X(x_i)$$

$$=(0)\left(\frac{2}{6}\right)+(0)\left(\frac{1}{6}\right)+(15)\left(\frac{2}{6}\right)+(20)\left(\frac{1}{6}\right)=10$$

/ متوسط هذا المتغير يساوي 10 /

حسب الجدول

$$EX^2=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 f_X(x_i)=(0)^2\left(\frac{2}{6}\right)+(10)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(15)^2\left(\frac{2}{6}\right)+(20)^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$=\boxed{}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2=EX^2-\mu_X^2=\frac{350}{6}$$

$\Rightarrow T \sim N(360, 2100)$

$\Rightarrow p(T > 350) = 1 - p(T \leq 350)$

$\overset{\text{بالمعايرة}}{=} 1 - p\left(\frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \leq \frac{350 - 360}{\sqrt{2100}}\right)$

$= 1 - \phi(-0.22)$

$= 1 - (1 - \phi(0.22))$

$= \phi(0.22) = 0.587$

المطلوب ② : T_1 يدل على أصغر مبلغ يحصل عليه جابر.

$p(T \geq T_1) = 0.95$

$\Rightarrow 1 - p(T < T_1) = 0.95 \Rightarrow 1 - p\left(\frac{T - \mu_T}{\sigma_T} < \frac{T_1 - 360}{\sqrt{2100}}\right) = 0.95$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{T_1 - 360}{\sqrt{2100}}\right) = 0.05 = 1 - 0.95 = 1 - \phi(1.645)$
$= \phi(-1.645)$

$\Rightarrow \frac{T_1 - 360}{\sqrt{2100}} = -1.645 \Rightarrow T_1 = 284.6$

- القاعدة التجريبية (قاعدة 3σ)

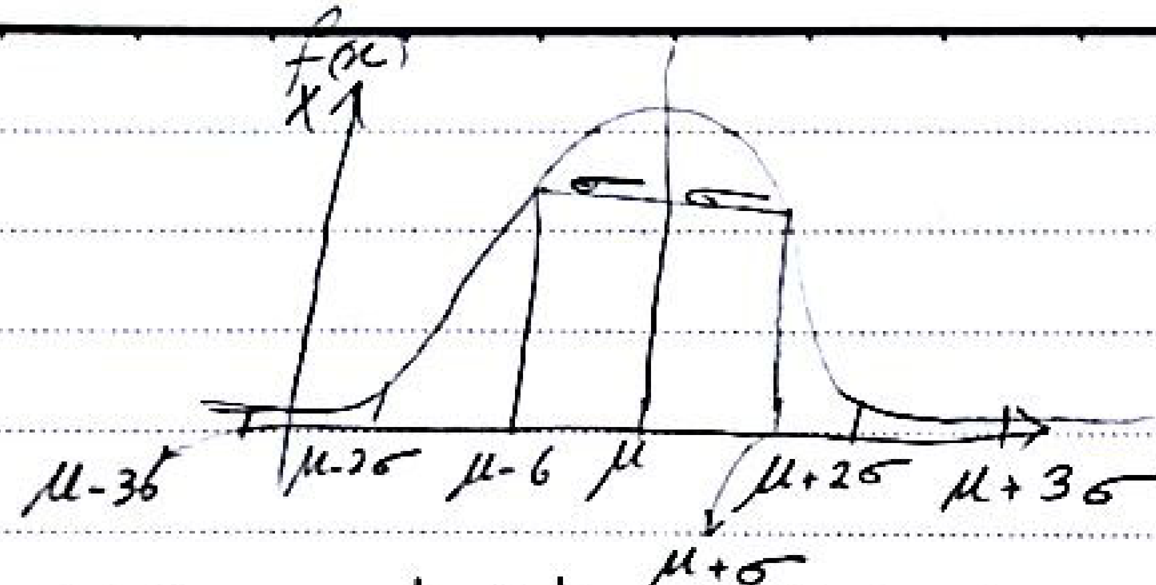
مبرهنة : إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن :

① $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$

أي أن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $\{\mu - \sigma, \mu + \sigma\}$ لا تقل عن $68,26\ \%$.

② $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$

أي أن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ لا تقل عن $99,74\ \%$.



نستخدم هذه المبرهنة لمعرفة فيما إذا كان المجتمع المدروس يتوزع "طبيعياً" للتوزيع الطبيعي أم لا وذلك بتحديد نسبة قياسات العينة الواقعة في المجالات : $[\bar{X}-S, \bar{X}+S]$

$[\bar{X}-2S, \bar{X}+2S]$

$[\bar{X}-3S, \bar{X}+3S]$

حيث $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

ونقارن النسب مع النسب المعطاة في المبرهنة.

فإذا كانت قريبة منها بشكل مقبول قلنا أن المجتمع يتوزع طبيعياً.

برهان ①: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)$$

$$\overset{\text{المعايرة}}{=} P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq +1)$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$$

$$= \phi(1) - \phi(-1)$$

$$= 2\phi(1) - 1 \underset{\text{ج.د}}{=} 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

متراجحة ماركوف.

إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ فقط قيماً غير سالبة عندئذٍ من أجل $k>0$ يكون:

$$p(X \geq k) \leq \frac{E(X)}{k}$$

متراجحة تشيبتشيف:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متوسطه μ وتباينه σ^2 (محدوداً) من أجل $\epsilon>0$ يكون

$$p(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

نتيجة من متراجحة ماركوف:

إذا كان X متغير عشوائي (يمكن سالب ويمكن موجب) فإنه

$$p(|X| \geq k) \leq \frac{E|X|}{k}$$

البرهان غير مطلوب:

- تأتي أهمية متراجحتي ماركوف وتشيبيشيف لكوننا نستطيع بواسطتهما تحديد حدود الاحتمال لمتغير عشوائي وذلك عند معرفتنا فقط المتوسط (في حالة ماركوف) أو المتوسط والتباين معاً (في حالة تشيبيشيف) دون معرفتنا للتوزيع الاحتمالي.

تمرين: إذا افترضنا أن عدد الأجهزة التي تنتجها شركة سيرونيكس أسبوعياً هو متغير عشوائي متوسطه 50.

(أ) ماذا يمكن أن نقول عن احتمال أن يفوق عدد الأجهزة المنتجة في الأسبوع الـ 75 جهاز.

(ب) إذا علمنا $\sigma^2 = 25$ فماذا نقول عن احتمال أن يكون عدد الأجهزة المنتجة في الأسبوع يقع بين 40 و 60 جهازاً.

الحل: X يدل على عدد الأجهزة المنتجة أسبوعياً فإن

(1) (استخدام متراجحة ماركوف)

$$p(X > 75) \leq \frac{E(X)}{75}$$

$$\leq \frac{50}{75}$$

$$\leq \frac{2}{3} \approx 0.66$$

أي أن احتمال أن يتجاوز عدد X مهرة الـ 75 حصة أعلى 0.66

② $$P(40 < X < 60) = P(50-10 < X < 50+10)$$

$$= P(|X - 50| < 10)$$

$$= 1 - P(|X-50| \geq 10)$$

وباستخدام متراجحة تشيبيشيف يكون :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{\sigma^2}{(10)^2}$$

$$\leq \frac{25}{100} = 0.25$$

ومنه يكون

$$P(40 < X < 60) \geq 1 - 0.25 \geq 0.75$$

قانون الأعداد الكبيرة :

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها نفس التوزيع متوسطها μ وتباين σ^2 محدود فإنه من أجل $\epsilon > 0$ يكون :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) = 0$$

أي أن

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\bar{X} - \mu| \leq \epsilon) = 1$$

يسمى تقارباً أكيداً

ملاحظة : لقانون الأعداد الكبيرة تطبيقات مهمة في الإحصاء وذلك إذا كان احتمال تقدير متوسط التوزيع الذي تتبعه المتغيرات العشوائية المستقلة بمتوسطها، فالقانون يشير أنه كلما كان n كبيراً كان المتوسط $\bar{X}$ أقرب إلى μ .

عدد المتغيرات المستقلة

تقريب التوزيع الثنائي (الحدي) إلى التوزيع الطبيعي :

أحد ما سابقاً أنه إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات برنولية

فإن $X_i \sim Ber(p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, p)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n.p \quad , \quad Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n.p.q$$

نظرية :

إذا كانت $X_1, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي (برنولي) لها المعلم p فإنه حسب نظرية النهاية المركزية من أجل n كبيرة فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n.p, n.p.q)$$

شرط :

$$n.p \geq 5$$
$$n.q \geq 5$$

ومنه نجد :

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = p\left(x_1 - \frac{1}{2} \leq Y \leq x_2 + \frac{1}{2}\right)$$

حيث $Y \sim N(n.p, n.p.q)$ وقد قمنا بتعديل طرفي المجال لـ Y لأننا قمنا بتقريب توزيع منفصل إلى توزيع مستمر إضافة أو طرح $\left(\frac{1}{2}\right)$ تسمى تصحيح الاستمرار

تمرين: إذا قذفنا قطعة نقود متوازنة (10) مرات فما هو احتمال أن نحصل على الصورة ثلاث مرات أو أربعاً أو خمساً.

الحل: X يدل على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود 10 مرات

$$R_X = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$$

ويكون لـ X التوزيع الحداني بوسيطين $n = 10$ ، $P = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f_X(x) = C_x^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$

$$= C_x^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \; ; \; x = 0, \ldots, 10$$

$$\Rightarrow P(3 \le X \le 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= C_3^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_4^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_5^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} [120 + 210 + 252] = 0.5683$$

طريقة ثانية: نلاحظ أن: $np = 5$ و $nq = 5$

فيمكن استخدام التقريب من التوزيع الطبيعي أي:

$$Y \approx N(np, \underbrace{n\overset{\frac{1}{2}}{p}q}_{5})$$

$$\approx N(5, 2.5)$$

معامل التصحيح : يضيف $\frac{1}{2}$ لليسار ، $\frac{1}{2}$ لليمين

$$\Rightarrow P(3 \le X \le 5)$$
$$= P(2.5 \le Y \le 5.5)$$

إشارة

$$= P\left(\frac{2.5-5}{\sqrt{2.5}} \le \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} \le \frac{5.5-5}{\sqrt{2.5}}\right)$$

$$= P(-1.58 \le Z \le 0.316)$$

$$= \phi(0.316) - \phi(-1.58)$$
$$= \phi(0.316) - (1 - \phi(1.58))$$

$$= 0.62 - 0.0571 = 0.5629$$

نلاحظ أن القيمة الناتجة صحيحة إلى ثلاث ارقام عشرية على الرغم من أن $n = 10$ فقط

الفصل السادس:
عزوم العينة ودوالها

١- تعريف العينة العشوائية: نقول عن مجموعة من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$

بأنها عينة عشوائية من الحجم n للمتغير العشوائي X إذا كانت هذه المتغيرات مستقلة ولها جميعاً قانون التوزيع لـ X

أي أن :

$$f_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)$$

٢- تعريف الاحصاء: نسمي كل دالة في عينة عشوائية لا تتعلق بوسطاء مجهولة احصاء (او احصاءة)

فإذا كانت $X_1,\dots,X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي فإن الدوال:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad , \quad \prod_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad X_5 + X_6$$

تكون كلها احصاءات بينما الدوال

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu\sigma \quad ، \quad \prod_{i=1}^{n} (X_i - \sigma^2) \quad و \quad \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

(ليست احصاءات لأن μ و σ^2 مجهولان ولكنها تغدو احصاءات عندما تكون الوسطاء μ و σ^2 معلومات)

٣- متوسط العينة: إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من المتغير عشوائي X

عندئذ متوسط هذه العينة بالتعريف هو الاحصاء:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

مثال عن عينة عشوائية:

$X \sim N(80, 100)$ يدل على وزن الشخص البالغ في مجتمع ما

فالعينة مثلاً: 10 أشخاص من هذا المجتمع فلكل منهم (شخص) وزن معين نرمز X_i $(1 \le i \le 10)$

تباين العينة:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

نريد أن نبرهن:

$$\star \quad S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$$

برهان الصيغة المختزلة ★:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2$$

حسب $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}(n\bar{X}) + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2}{n-1}$$

نضرب بـ $\left(\frac{n}{n}\right)$

$$= \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

- توزيع كاي - مربع وتوزيع ستيودنت :

~~[illegible]~~ وهما توزيعان هامان مستخدمان

في نطاق واسع في الاقتصاد التطبيقي

وسنبدأ بتعريف دالة غاما ذات العلاقة بهما :

تعريف **دالة غاما** : هي الدالة المعرفة بالعلاقة :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} \, dx$$

وبإنجاز هذا التكامل بالتجزئة نجد أن :

$$\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$$

بعض خواص دالة غاما :

1) إذا كان n عدداً طبيعياً .

فإن : $\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

أي أن : $\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \, dx = \sqrt{\pi}$

توزيع X^2 (كاي مربع): نقول إن المتغير العشوائي المستمر

X له التوزيع X^2 (كاي مربع) بدرجة من الحرية $\boxed{V}$ نيو

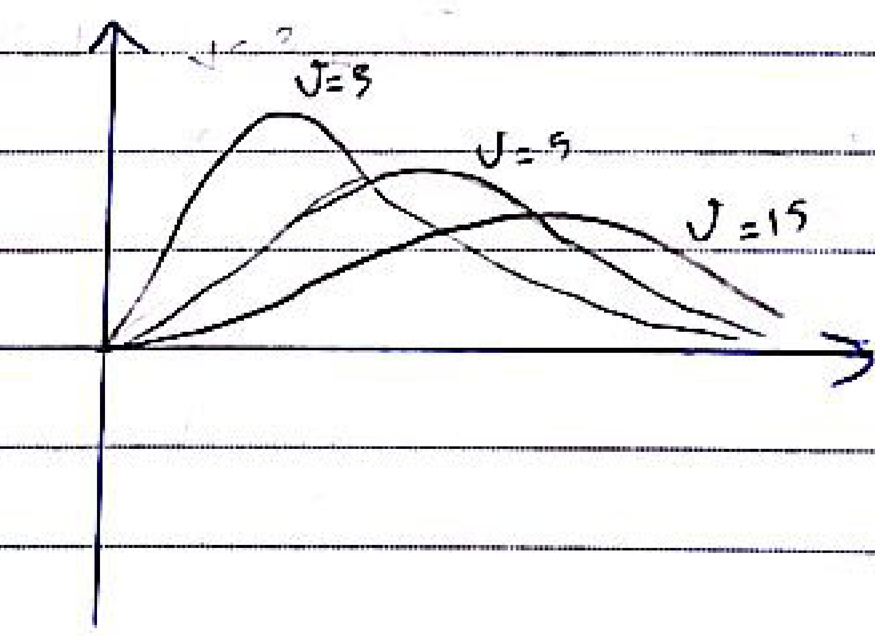
إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية

X_i	X_i^2
⋮	
⋮	
ΣX_i	ΣX_i^2

$\{X_i\}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\, x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad ; \quad x>0$$

ودرجة الحرية هنا تعتبر خاصية لـ ل عد الوسط V نيو



بعض خواص توزيع X^2 (كاي مربع)

1) إذا كان Z متغير عشوائي طبيعي معياري فإن Z^2

له توزيع كاي مربع X^2 بدرجة حرية (V=1)

2) إذا كانت المتغيرات العشوائية $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$

مستقلة ولكل منها التوزيع الطبيعي المعياري

فإن المتغير العشوائي

$$K^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

له التوزيع X^2 (كاي مربع) بدرجة حرية

$V = n$ ~~V_2~~

3- إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ولكل منهما التوزيع X^2 كاي مربع بدرجة حرية V_1 و V_2 على الترتيب فيكون المتغير العشوائي $Y = X_1 + X_2$ توزيع كاي مربع X^2 بدرجة حرية $V = V_1 + V_2$

4- إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين وكان $X_1 \sim X^2_{(V_1)}$ وكان لمجموعهما التوزيع لـ X^2 أي: $X_1 + X_2 \sim X^2_{(V)}$ حيث $V > V_1$

فإنه يكون لـ X_2 توزيع كاي مربع بدرجة حرية $V_2 = V - V_1$

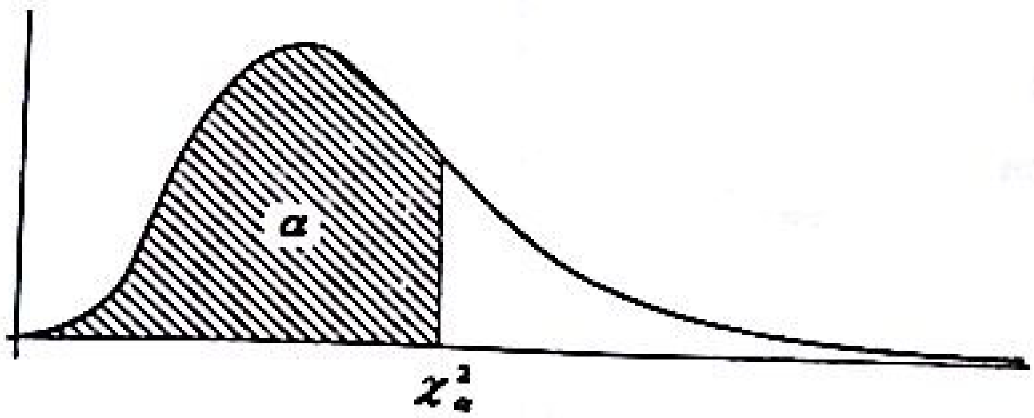
5- إذا كان $X \sim X^2_{(V)}$ فإن

$$\boxed{Var(X) = 2V \quad ; \quad E(X) = V}$$

لهذا التوزيع جدول (جدول توزيع كاي مربع) يستخدم لحساب الاحتمالات والقيم المقابلة لهذه الاحتمالات

جـ. الجدول (3)

جدول توزيع كاي - مربع



Degrees of freedom	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.20}$	$\chi^2_{.30}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.70}$	$\chi^2_{.80}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
1	.000	.000	.001	.004	.016	.064	.148	.455	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.010	.020	.051	.103	.211	.446	.713	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.00	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	10.3	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	11.3	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	12.3	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	13.3	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	14.3	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	15.3	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	16.3	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	17.3	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.83	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	18.3	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	19.3	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	23.3	27.1	29.6	33,2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.1	24.4	26.5	29,0	32.3	34.9	39.3	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.3	34.8	37.7	41.3	44.3	49.3	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	50.6	53.8	59.3	65.2	69.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0

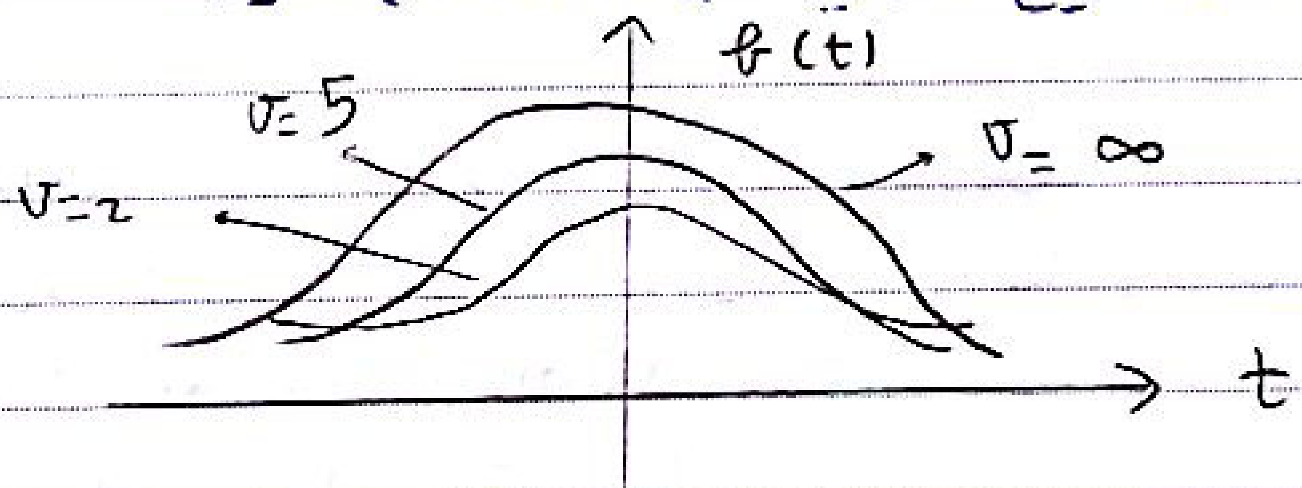
ج- توزيع t - ستيودنت:

نقول عن المتغير العشوائي المستمر X انه يتبع توزيع ستيودنت بـ v درجة حرية إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{v+\frac{1}{2}}$$

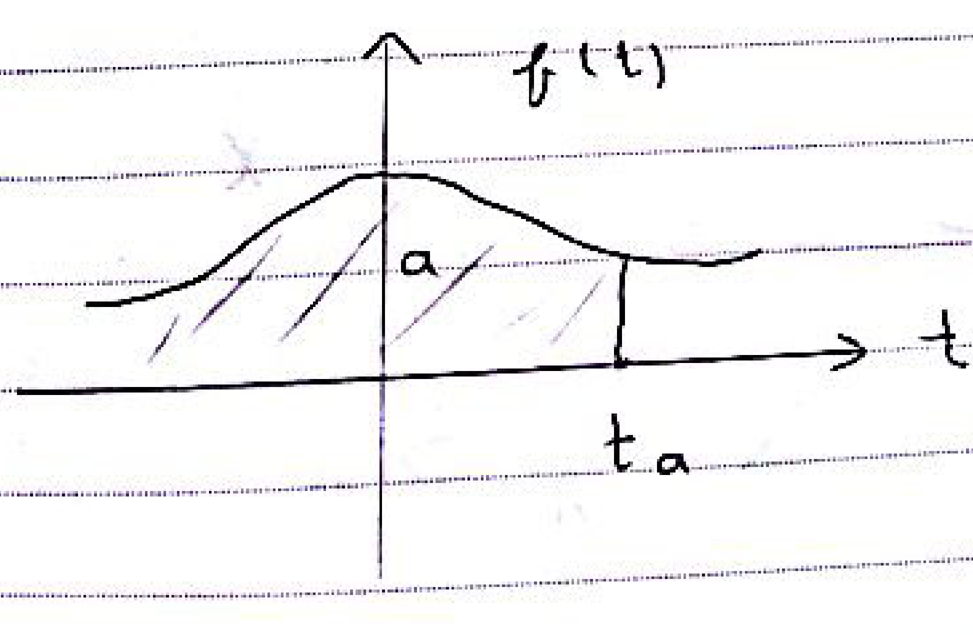
$$-\infty < x < +\infty$$

و v عدد صحيح موجب يدعى درجة حرية



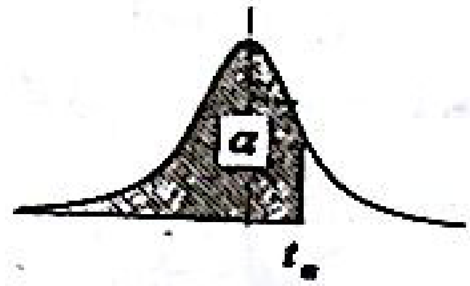
المنحنى البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب ويمتد عن الوسيط v.

جدول توزيع t - ستيودنت:



ب - الجدول (2)

جدول توزيع t - ستيودنت



Degrees of Freedom	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.65}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.9995}$
1	.158	.325	.510	.727	1.00	1.38	1.96	3.08	6.31	12.7	31.8	63.7	637
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.06	1.39	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.25	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	12.9
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.19	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.16	1.48	2.01	2.57	3.36	4.03	6.86
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.13	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.12	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50	5.40
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.11	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.10	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.09	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.09	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.08	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	4.32
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.08	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.08	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	4.14
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.07	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.07	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	4.02
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.07	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.07	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.07	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.06	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84	3.85
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.06	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.82
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.06	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.79
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.06	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.77
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.06	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.74
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.06	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79	3.72
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.06	1.32	1.70	2.06	2.48	2.78	3.71
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.06	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.69
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.06	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.67
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.05	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76	3.66
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.05	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.65
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.04	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.29

$v \backslash a$	$t_{0.55}$	$t_{0.60}$	$t_{0.65}$	...	$t_{0.9995}$
1	0.158				
2		$t_{0.60}(2) = 0.289$			
3					
⋮					
15		$t_{0.60}(15) = 0.258$			
⋮					
30					
∞					3.29

مبرهنة: خاصية مهمة لتوزيع t ستيودنت:

إذا كان Z متغير عشوائي طبيعي معياري وكان X

متغير عشوائي له توزيع $X^2(v)$ بدرجة حرية v وكان

Z و X مستقلين، فإنه يكون للمتغير

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}} \sim t(v)$$

أي (توزيع t ستيودنت بدرجة حرية)

توزيعات بعض الإحصاءات الشهيرة:

1- توزيع متوسط العينة $\bar{X}$:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ حسب مبرهنة سابقة فإن:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

أما إذا كانت هذه العينة لمتغير عشوائي $X \sim F(t)$ متوقعة μ وتباينة σ^2 فحسب مبرهنة النهاية المركزية فإن التوزيع الاحتمالي لمتوسط العينة سيكون $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ بشرط $n \geq 30$

تمرين: إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_9$ عينة عشوائية لمتغير $X \sim N(3, 16)$ أوجد $P(0.5 < \bar{X} < 6)$

الحل:

$X \sim N(3, 16) \Leftarrow \mu = 3 \ , \ \sigma^2 = 16$

وبما أن العينة لها التوزيع الطبيعي فإن:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = N(3, \frac{16}{9})$$

$$\Rightarrow P(0.5 < \bar{X} < 6) \overset{\text{معايرة}}{=} P\left(\frac{0.5-3}{(\frac{4}{3})} < \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} < \frac{6-3}{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= P(-1.875 < Z < 2.25) = \Phi(2.25) - \Phi(-1.875)$$

$$= \Phi(2.25) - (1 - \Phi(1.875)) = 0.9878 - (1 - 0.9696)$$

$$= 0.9574$$

تمرين 2: إذا كان متوسط الدخل الأسبوعي لمجموعة كبيرة من العمال المهرة هو 1200 ل.س بانحراف معياري قدره 100 ل.س ما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكثر من 1180 ل.س في الأسبوع؟

الحل: $\sigma = 100$, $\mu = 1200$

$n = 64 > 30$

حسب مبرهنة النهاية المركزية يكون:

$$\bar{X} = \frac{1}{n=64}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\approx N\left(1200, \frac{10000}{64}\right)$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} > 1180) = 1 - P(\bar{X} \le 1180)$$

$$\overset{\text{معيار}}{=} 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \le \frac{1180 - 1200}{\frac{100}{8}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \le -1.6) = 1 - \Phi(-1.6) = \Phi(1.6)$$

$$= 0.9452$$

---

2 - توزيع مجموع عناصر عينة $\sum_{i=1}^{n} X_i$

إذا كانت $X_1, \ldots, X_n$ عينة لـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

حسب مبرهنة سابقة فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

أما إذا كانت $X_1, \ldots, X_n$ عينة لمتغير $X \sim F(t)$ حسب مبرهنة النهاية المركزية فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

بشرط أن $n \geq 30$

تمرين 3: تتوزع أوزان أمتعة المسافر جواً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 20 كغ وانحراف معياري 5 كغ وتتسع إحدى الطائرات لـ 100 راكب ما هو احتمال ان يتجاوز الوزن الكلي لأمتعة المسافرين 2150 كغ.

الحل:

أوزان الأمتعة $X \sim N(20, 25)$

$\{X_i\}_{1 \le i \le n} \quad n = 100$

الوزن الكلي للأمتعة $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n=100} X_i \sim N\big((100)(20), (100)(25)\big)$

$\sim N(2000, 2500)$

$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 2150\right) = 1 - P\left(\sum X_i \le 2150\right)$

المعايرة $= 1 - P\left(\frac{\sum X_i - \mu_{\sum X_i}}{\sigma_{\sum X_i}} \le \frac{2150 - 2000}{50}\right)$

$= 1 - P(Z \le 3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987$

$= 0.0013$

تمرين 4: في عيادة أحد الأطباء 36 مراجعاً وقد بدأ باستقبالهم في الثامنة صباحاً ففي أية ساعة سيكون متأكداً 99% من انه سينهي عمله إذا كان يعلم من خبرته السابقة ان متوسط الزمن اللازم لمقابلة كل مريض هو 6 دقائق وبانحراف معياري مقداره 2 دقيقة

الحل: إذا كان X_i زمن مقابلة المريض i حيث $1 \le i \le 36$

فيكون $\mu = EX_i = 6$

$$\sigma^2 = var(X_i) = 4$$

وبما أن $n = 36 > 30$ حسب مبرهنة النهاية المركزية

$$\sum_{i=1}^{36} X_i \sim N((36)(6), (36)(4))$$

$$\sim N(216, 144)$$

الآن نعين y بحيث يكون:

$$P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i > y\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\sum X_i - \mu_{\sum X_i}}{\sigma_{\sum X_i}} < \frac{y - 216}{12}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{y-216}{12}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{y-216}{12}\right) = 0.99 = \Phi(2.33)$$

$$\Rightarrow \frac{y-216}{12} = 2.33 \Rightarrow y \approx 244$$ دقيقة.

وهكذا نجد أنه باحتمال 0.99

سينهي مقابلاته للمرضى عند الساعة

$\underbrace{244}_{\text{دقيقة}}$ + 5 ساعة ((أي عند الساعة 9:04 تقريباً))

4 ساعات + 4 دقائق

٣_ توزيع الاحصاء $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$:

إذا كان $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة عشوائية من الحجم n لمتغير عشوائي طبيعي : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

فإن :

١) $\bar{X}$ و S^2 متغيرات عشوائيان مستقلان

٢) للمتغير العشوائي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n ـ ١).

مبرهنة : إذا كان $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة عشوائية من الحجم n لمتغير طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فيكون للمتغير العشوائي :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

توزيع t ستودنت بـ (n-1) درجة حرية

البرهان : بملاحظة أن :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

و

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

وحسب مبرهنة سابقة :-

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} \sim t(\nu)$$

$$\Rightarrow T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{(n-1)}}}$$

$$= \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$$

تمرين: إذا كانت أوزان أكياس الطحين التي تنتجه
إحدى المؤسسات تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 30 كغ.
أخذنا عينة حجمها 10 أكياس من إنتاج هذه المؤسسة
فوجدنا أن الانحراف المعياري 1 كغ أوجد احتمال
أن يزيد متوسط العينة عن 51 كغ.

$$P(\bar{X} > 51) = P\Big(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}}_{T \sim t_{\underset{9}{(n-1)}}} > \frac{51 - 50}{1/\sqrt{10}}\Big)$$

$$= P(T > \sqrt{10}) = P(T(9) > 3.16)$$

$$= 1 - P(T(9) \leq \underbrace{3.16}_{t_a})$$

حيث a هو الاحتمال P

$t_a = t_{0.995}$

$\nu \backslash a$	0.995
9	3.16

جدول t ستودنت

$$= 1 - 0.995 = 0.005$$

عزوم العينة :

تعريف : إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لـ X فإن العزم العيني من الدرجة r لـ X هو :

$$M_r := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

ملاحظات : 1) ان M_r مهما يكن $r \in N$ هو احصاء وبالتالي هو متغير عشوائي تتعين قيمة من أجل كل عينة .

2) يجب ان نميز M_r عن عزوم المتغير العشوائي X من الدرجة r $m_r := EX^r$ والذي هو مقدار ثابت

3- $$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

تمرين : متغير عشوائي بواسوني وسيطه (λ) . أخذنا عينة عشوائية حجمها 6 من ذلك المجتمع الاحصائي فوجدنا النتائج التالية : 6 ، 2 ، 10 ، 7 ، 4 ، 5 احسب عزوم هذه العينة من الدرجات 3، 2، 1

الحل :

$$* \quad M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \frac{1}{6} [5 + 4 + 7 + 10 + 2 + 6]$$
$$= 5.667$$

$$* \quad M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{6} [25 + 16 + 49 + 100 + 4 + 36]$$
$$= 38.333$$

$$* \; M_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 = \frac{1}{6}\left[125 + 64 + 343 + 1000 + 8 + 216\right]$$

$$= 292.667$$

تمرين: من مجتمع طبيعي تباينه $\sigma^2 = 8$ سحب عينة عشوائية $n=25$ فاذا كان S^2 تباين العينة فما هو احتمال

أ) ان يكون تباين العينة S^2 اكبر من 9.1

ب) " " " " ما بين (3.462) و (10.745)

الحل: العينة $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ للمتغير العشوائي $X \sim N(\mu, 8)$

$$P(S^2 > 9.1) = P\left(\underbrace{\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \frac{(9.1)(24)}{8}\right)$$

$$= P(\chi^2(24) > 27.3) = 1 - P(\chi^2(24) \le 27.3)$$

جدول توزيع χ^2

$$= 1 - 0.75 = 0.25$$

ب- $P(3.462 \le S^2 \le 10.745)$

$$= P\left(\frac{(3.462)(24)}{8} \le \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \le \frac{(10.745)(24)}{8}\right)$$

$$= P(10.386 \le \chi^2(24) \le 32.235)$$

$$= P(\chi^2(24) \le 32.235) - P(\chi^2(24) \le 10.386)$$

جدول χ^2

$$= 0.85 - 0.005 = 0.845$$

تمرين: من المجتمع الطبيعي الأول $N(3,4)$ نأخذ عينة حجمها $n_1=4$ ومن المجتمع الطبيعي الثاني $N(2,4)$ نأخذ عينة حجمها $n_2=4$

أ) ما هو احتمال ان يكون متوسط العينة الأولى اكبر من متوسط العينة الثانية

ب) ما هو احتمال ان يكون الفرق بين المتوسطين أقل من 0.5

الحل:

$$X^1 \sim N(3,4)$$

$$\Rightarrow X^1_i \sim N(3,4) \quad ; \quad i=1,\dots,4$$

$$\Rightarrow \overline{X^1} \sim N(3,1)$$

$$X^2 \sim N(2,4)$$

$$\Rightarrow X^2_i \sim N(2,4) \quad ; \quad i=1,\dots,4$$

$$\Rightarrow \overline{X^2} \sim N(2,1)$$

أ) $P(\overline{X^1} > \overline{X^2}) = P(\overline{X^1} - \overline{X^2} > 0)$

ولكن حسب مبرهنات سابقة فإن:

$$\overline{X^1} - \overline{X^2} \sim N(1, 2)$$

$$N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow P(\overline{X^1} - \overline{X^2} > 0)$$

نرمال

$$= P\Big(\underbrace{\frac{(\overline{X^1} - \overline{X^2}) - \mu}{\sigma}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{0-1}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$\Rightarrow P\Big(Z > \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big) = 1 - P\Big(Z \leq \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$= 1 - \phi\Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big) = \phi\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$= \phi(0.767) = 0.7794$$

$$P(|\underbrace{\overline{X^1} - \overline{X^2}}_{\overline{X}}| < 0.5) \qquad (ب$$

$$= P(|\overline{X}| < 0.5) = P(-0.5 < \overline{X} < 0.5)$$

نرمال

$$= P\Big(\frac{-0.5-1}{\sqrt{2}} < \underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{0.5-1}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$= P\Big(\frac{-3}{2\sqrt{2}} < Z < \frac{-1}{2\sqrt{2}}\Big)$$

$$= P\left(Z < -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - P\left(Z > \frac{-3}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\Phi(-0.3535) - \Phi(-1.06)$$

$$= [1 - \Phi(0.3535)] - [1 - \Phi(1.06)]$$

$$= \Phi(1.06) - \Phi(0.3535)$$

$$= 0.8554 - 0.6368 = 0.2186$$

ملاحظة: الفرق بين المتوسطين هو القيمة المطلقة لاننا لم نحدد الفرق بين أي متوسطين وبالتالي أخذنا الحالتين :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 0.5$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 < 0.5$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > -0.5$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < 0.5$$

تمرين: من مجتمع طبيعي $N(\ , \ )$ نسحب عينة عشوائية حجمها $n=16$

أ) ما احتمال ان يكون متوسط العينة اقل من 3

ب) ما احتمال ان يكون الانحراف المعياري للعينة أكبر من $\sqrt{15}$

الحل:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$= N\left(2, \frac{9}{16}\right)$$

أ) $$P(\bar{X} < 3) \overset{\text{المعايرة}}{=} P\left(\frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} < \frac{3-2}{\sqrt{\frac{9}{16}}}\right)$$

$= P(Z < \frac{4}{3}) = \phi(1.33) = 0.9082$

ب) $P(S > \sqrt{15}) = P(S^2 > 15)$

$= P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} > \frac{15(15)}{9} \right)$

$= P\left(X^2(n-1) > \frac{225}{9} \right) = 1 - P(X^2(15) < 25)$

$\overset{\text{جدول } X^2}{=} 1 - 0.95 = 0.05$

نظرية التقدير - التقدير النقطي:

التوزيع الاحتمالي لـ X يتبع لوسطاء وعندما تكون هذه الوسطاء مجهولة نلجأ الى تقديرها بالاعتماد على عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها n وإذا كان θ وسيط هذا المجتمع (مجهول) فاننا نقوم بتقدير θ ونرمزه $\hat{\theta}$

أ- طرائق التقدير

١- طريقة العزوم في التقدير النقطي

تعتمد على مطابقة عزوم العينة والتي تتبع فقط لعناصر العينة مع عزوم المتغير العشوائي والتي هي دوال في وسطاء هذا المجتمع المجهولة

مثلاً: ليكن X متغير عشوائي يتبع توزيعاً و سيطاء $\theta_1, \dots \theta_k$ مجهولة فاننا نكتب k معادلة من الشكل:

$m_r = M_r \quad ; r = 1, 2, \dots, k$

حيث k يمثل عدد الوسطاء المجهولة و بالحل المشترك لجملة هذه المعادلة . نحصل على المقدرات: $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ على الترتيب

تمرين: إذا كان $X \sim Poiss(\lambda)$ ، أوجد بطريقة العزوم لـ λ

الحل: $m_1 = EX = \lambda$ عزم المتغير

ولكن: $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ عزم العينة

بمساواة العزمين $m_1 = M_1$

نجد $\lambda = \bar{X}$ فنكتب أن $\boxed{\hat{\lambda} = \bar{X}}$ مقدر الوسيط λ هو متوسط العينة

تمرين: ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ أوجد بطريقة العزوم مقدراً لـ μ و σ^2

الحل: نعلم أن:

$m_1 = EX = \mu$

$m_2 = EX^2 = \mu^2 + \sigma^2$

لأن $\sigma^2 = var(X) = EX^2 - \mu^2$

ولكن عزوم العينة:

$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

وبمساواة العزوم المتناظرة مع بعضها:

$m_1 = \mu_1 \Rightarrow \mu = \bar{X}$

$m_2 = \mu_2 \Rightarrow \boxed{\mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

بالحل المشترك نجد أن

$\hat{\mu} = \bar{X}$ وهو مقدر للوسط μ

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ 〃 〃 σ^2